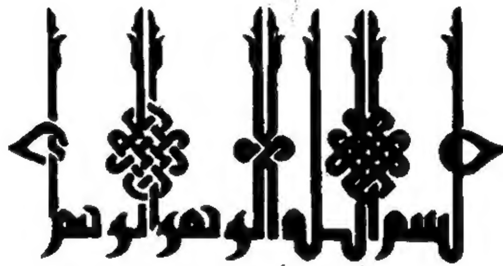
العناصر لتحليل حقيقي

الطبعة الثانية

الدكتور روبرت ج. بارتل



A Wiley Arabook


بسم الله الرحمن الرحيم

العناصر لتحليل حقيقى

الطبعة الثانية

تأليف

الدكتور روبرت ج. بارتل
أستاذ الرياضيات
جامعة الينوى . أربانا . شامبين

ترجمة

الأستاذ الدكتور محمد على السمرى
رئيس قسم العلوم الرياضية بجامعة حلوان
جمهورية مصر العربية

مراجعة

الأستاذ الدكتور فؤاد محمد رجب
أستاذ الرياضيات - كلية الهندسة
جامعة القاهرة - جمهورية مصر العربية

جون وايلى وأولاده
نيويورك شيشستر بريسبين تورنتو

ISBN 0 - 471 - 06391 - 6

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

محمد أبو يوسف اللحويشي

مقـــدمـــة

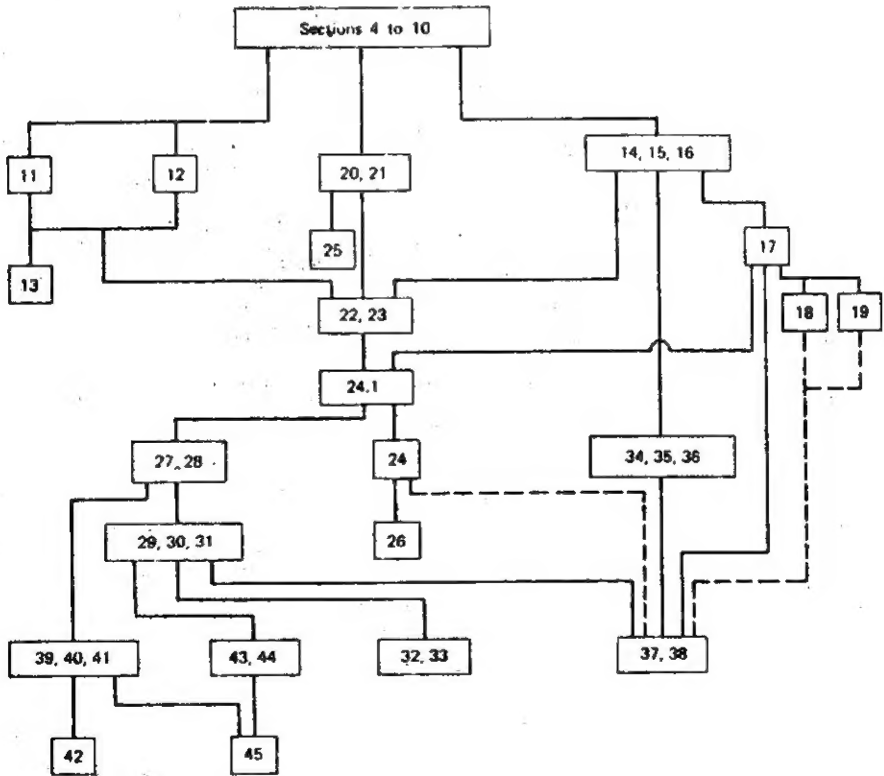
فى وقت ما توقع طالب الجامعة الذى يدرس رياضيات متقدمة فى مرحلة البكالوريوس تطوير مقدرته الفنية فى حل مسائل تحتوى على حساب عظيم الأهمية ، لكن ، لم يتوقع سيادة « الاحتيالات النظرية » مثل تقارب منتظم أو اتصال منتظم . وكان مطلوباً منه أن يكون قادراً على استخدام نظرية الدالة الضمنية ، لكن بدون معرفة فروضها . قد تغير هذا الحال ، ويعتبر الآن من الأهمية أن كل طلبة الرياضيات المتقدمة — الرياضات المستقبلة ، علماء الكمبيوتر ، الفيزيائيون ، المهندسون ، أو الاقتصاديون — يفهمون الطبيعة الأساسية النظرية للموضوع . هم حينئذ سوف يفهمون كلا من قوة تحديد النظرية العامة بدرجة أكثر تماماً .

نشأ هذا الكتاب المدرسى من خبرتى بتدريس التحليل الحقيقى فى جامعة الينوى منذ عام ١٩٥٥ . جمهور المستمعين لى غالباً من أشخاص جدد مجهزين جيداً عادة إلى خريجى الجامعة . معظمهم عادة لا يدرسون الرياضيات كعلم أساسى ، لكنهم درسوا على الأقل ما يكافىء ثلاثة فصول دراسية فى دراسة (ليست عنيفة) التفاضل والتكامل ، المحتوى على تفاضلات جزئية ، تكاملات مضاعفة ، تكاملات خطية ، ومتسلسلات لا نهائية . من المرغوب فيه لكل الدراسين أن يدرسوا فصلا دراسياً فى الجبر الخطى أو الجبر الحديث لكى يمهدوا الطريق لهذا المقرر الذى نبرهن فيه نظريات تحليلية . لكن حيث أن كثيراً من الطلبة الذين ألتقى بهم ليس عندهم هذه الخلفية . فأبدأ دراسة التحليل ببراهين جبرية قليلة ، لكى أضعهم على بداية طريقهم .

أقدم فى هذه الطبعة ، الخواص المرتبة والجبرية لنظام الأعداد الحقيقية فى باب ٤ ، ٥ بطريقة أسهل من تلك التى استخدمتها فى الطبعة الأولى . وبالإضافة إلى ذلك أقدم التعاريف لفراغ متجه وفراغ عمودى فى باب ٨ ، حيث أن هذه المفاهيم تحدث كثيراً فى الرياضيات الحديثة . قصرت أيضاً أبواباً كثيرة لسهولة وسرعة الحصول على المادة العلمية وتقديم قابلية ثنى إضافية عند استخدام هذا الكتاب ككتاب مدرسى . أضفت تمرينات ومشروعات جديدة وكثيرة ، لكنى حاولت أن أجعل الكتاب فى نفس المستوى كالطبعة الأولى . يوجد فقط تغييرات طفيفة فى الجزء الأول من الكتاب لكن ، بما أن الخبرة قد أثبتت أن النقاش

للتفاضل والتكامل فى الفراغ كان مختصراً جداً فى الطبعة الأولى . فإنى جمعت نظرية الدوال المتغير واحد فى فصل واحد وأسهبت بعناية فائقة فى معالجة دوال متغيرات متعددة .

قدمت فى باب ١ إلى ٣ ، المصطلحات العلمية للفئات النظرية ومفهوماً استخدم فيما بعد ويقدم أفكاراً أساسية قليلة . لكن ، هذه الأبواب لا تعطى تمثيلا نظامياً لنظرية الفئة . (لا نحتاج إلى مثل هذا التمثيل ، أو نرغب فيه فى هذه المرحلة) . يجب فحص هذه الأبواب بإيجاز والرجوع إليها فيما بعد إذا كان ذلك ضرورياً . فى الحقيقة نبدأ الكتاب بالباب الرابع ، ويقدم الباب السادس « تحليلا » ومن الممكن دراسة الأبواب من ٤ إلى ١٢ ومن ١٤ إلى ١٧ ومن ٢٠ إلى ٢٤–١ ومعظم ٢٧ إلى ٣١ فى فصل دراسى واحد . ينبغى أن أستعمل حق امتياز المعلم . وباختصار أقدم بعض موضوعات خاصة أخرى (مثل المتسلسلات) على حساب نتائج مختلفة سهلة المواقع (أو حتى حذف بعض النتائج) التى ليست ضرورية للمادة السابقة . حيث أن الكتاب بأكمله يعطى مادة أكثر قليلا عما يمكن دراسته عادة وعما نقدر لتغطيته فى عام واحد لهذا المستوى ، فسوف يحصر المعلم بمادة نقاش بعض الأبواب . لكن من المفيد



للدارس أن يحفظ المادة الإضافية كمرجع فى المستقبل . درسنا هنا معظم الموضوعات المرتبطة عموماً مع مقررات فى « التفاضل والتكامل المتقدم » الاستثناء الأساسى هو موضوع تكاملات خطية وتكاملات على سطح ونظرية استوكس ؛ لم يناقش هذا الموضوع ، حيث أن معالجة بدهية هى بالأصح جزء من التفاضل والتكامل وتحتاج معالجة قوية إلى نقاش شامل نوعاً ما لكى يكون مثمراً .

الاعتماد المنطقى للأبواب المختلفة فى هذا الكتاب المدرسى موضح بالشكل المجاور يوضح خط جامد فى هذا الشكل اعتماداً على الباب السابق ويدل خط منقط على اعتماد بسيط فمثلا كل التعريفات ، النظريات ، النتائج ، المفترضات ، بالتتالى حسب رقم الباب ، خصصت اسمه للنظريات الأكثر أهمية طالما بدا راسم مناسب . تنطلق البراهين من الكتاب برأس البرهان وتنتهى بعبارة وهو المطلوب إثباته .

ليس من الممكن زيادة تأكيد أهمية التمارين والمشروعات باستخدام مجهودات جدية ومتفق عليها لحلها يمكن للشخص أن يأمل فى أن يسيطر على مادة هذا الكتاب . تنمى المشروعات موضوعاً معيناً لمتتابعة متصلة ، نعتقد أنها تنقل للطالب على الأقل مذاق اللذة (أو العذاب !) عند عمل بحث فى الرياضيات آمل فى أنه سوف لا يفشل طالب فى أن يمرن يده على كثير من هذه المشروعات لأنى أعتقد أنها بوجه خاص ملامح قيمة لهذا الكتاب .

جلبت عند كتابة هذا الكتاب ، من خبرتى فى الفصل الدراسى وتأثرت بمصادر كثيرة . استفدت من نقاشى مع الطلبة والزملاء ، ومنذ نشر الطبعة الأولى ، أجريت مكاتبات شاملة مع الطلاب والمدرسين فى معاهد أخرى . أقدم شكرى لكل من قدم تفسيرات واقتراحات . شغفهم لتحسين الكتاب شجعنى على تدبير هذا التنقيح . قرأ الأساتذة أندرسون ، باد ، برسينى بروفة الطبعة الأولى وقدموا اقتراحات مفيدة . أخص بالشكر زميلى ، الأستاذ برندت ، لأجل تعليقاته وتصحيحاته الكثيرة والصارمة . أقدم شكرى إلى كارولين ج . بلومكر لصبرها وكتابتها المتقنة للبروفة المصححة تحت ظروف متنوعة . أخيراً أقدم تقديرى العظيم لمساعدة وتعاون إدارة ويل .

روبرت ج. بارتل

٢٣ يونيو ١٩٧٥
اربانا — شامبين ، الينوى

محمد يوسف اللموشي

ز

ملخصات فصول

الصفحة

الصفحة

الصفحة

الصفحة

الصفحة

مقدمة

لمحة عن نظرية الفئة

فكرة الفئة هي الأساس لكل الرياضيات ، وجميع الموضوعات والتركيبات الرياضية ترجع أخيراً إلى نظرية الفئة ونظراً للأهمية الأساسية لنظرية الفئة سنقدم هنا مجملا قصيراً للرموز والمصطلحات الخاصة بنظرية الفئة والتي ستستعمل كثيراً في هذا المرجع . لكن ، حيث أن الغرض من هذا الكتاب هو تقديم العناصر (دون الأساسيات) للتحليل الحقيقي ، لذلك سنختار من وجهة نظرنا أساليب بسيطة نوعاً ما . وسنكتفي بالمناقشة العادية وسنعتبر أن الكلمة « فئة » كمفهومها وكرادف الكلمات « رتبة ومجموعة ، وفصل وطقم » . ولا يوجد محاولات لتعريف هذه المصطلحات لتدوينها في قائمة بدهيات لنظرية الفئة . القارىء الذي عنده دراية كافية والملم بتطور الموضوع يجب أن يسترشد بالمراجع على نظرية الفئات في نهاية هذا الكتاب . ومنها سيتعلم كيف يمكن وضع هذه المادة في بدهيات أساسية . وسيجد أن هذه البدهيات ستكون تطويراً قاطعاً لأساسيات الرياضة . لكن بما أننا سنعتبر أن هذا بعيداً عن رقعة هذا العلم في الكتاب الحالي لذلك سوف لا نتعمق في التفاصيل . وننصح بشدة القارئ بقراءة هذه المقدمة سريعاً لمعرفة وحفظ الرموز والعلامات التي سوف نستخدمها . وباستثناء الأبواب الأخيرة التي يجب دراستها يمكن اعتبار هذه المقدمة مادة أساسية يرجع إليها . ويجب على القارىء ألا يضيع وقتاً كبيراً فيها .

الباب الأول – جبر الفئات :

إذا كانت A تدل على فئة وكانت x عنصراً فيها ، فمن المناسب أن يكتب

$$x \in A$$

كاختصار لقولنا إن x عنصر من عناصر الفئة A ، أو x عضو في الفئة A ، أو الفئة A تحتوى العنصر x ، أو أن x تكون في A . نحن لا نفحص طبيعة خاصية عنصر من فئة أكثر من هذا ولأغراض أكثر يمكن استخدام المعنى البسيط للعضوية حيث الميزة البدهية لهذه العلاقة غير ضرورية .

إذا كانت A فئة والعنصر x ينتمى إلى الفئة A ، فإننا نكتب غالباً $x \notin A$

وطبقاً لفكرتنا البسيطة عن الفئة سنتطلب واحدة تماماً من الإمكانيتين

$$x \in A, \qquad x \notin A$$

لعنصر x وفئة A .

إذا كانت A ، B فئتين ، x عنصر ، حينئذ سيوجد فى الأصل أربع إمكانيات (انظر شكل ١ – ١)

(١) $x \in A$ و $x \in B$ ، (٢) $x \in A$ و $x \notin B$

(٣) $x \notin A$ و $x \in B$ ، (٤) $x \notin A$ و $x \notin B$

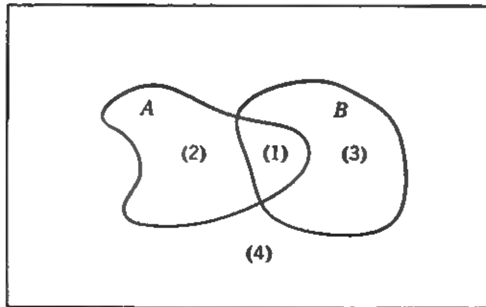
إذا كانت الحالة الثانية لا تحدث (أى إنه إذا كان كل عنصر من الفئة A هو أيضاً عنصر من الفئة B) ، حينئذ سنقول إن الفئة A تكون محتوية فى الفئة B أو أن الفئة B تحتوى A أو أن الفئة A هى فئة جزئية من B ويعبر عن ذلك كما يلى :

$$A \subseteq B \quad \text{أو} \quad B \supseteq A$$

إذا كانت $A \subseteq B$ وأيضاً يوجد عنصر فى B غير موجود فى A ، فنقول إن A هى الفئة الجزئية الفعلية للفئة B .

ويجب ملاحظة أن التعبير $A \subseteq B$ لا يمنع تلقائياً إمكانية الفئة A احتواء كل عناصر الفئة B . وعندما يكون ذلك صحيحاً فالفئتان A ، B تكونان متساويتين بالمعنى الذى سنعرفه الآن .

١ – ١ تعريف . الفئتان تكونان متساويتان إذا كانتا تحتويان على نفس العناصر إذا كانت الفئتان A ، B متساويتين فنكتب $A = B$.



(شكل ١ – ١)

أى إنه لكى نوضح أن الفئتين B و A متساويتان يجب أن نوضح أن الإمكانيتين (2) ، (3) المشار إليهما لا يمكن أن تحدث . وتحقيقاً للتكافؤ يجب توضيح أن كلا $B \subseteq A$ و $A \subseteq B$. إن كلمة خاصية ليس من السهل أن تعرف بالضبط ، ولكننا لن نتردد فى استخدامها بالتصور العادى لها وهو أنه إذا كانت P تبين خاصية معرفة لمجموعة من العناصر ، فإننا سنتفق على كتابة

$$\{x : P(x)\}$$

لفئة جميع العناصر x التى تحقق الخاصية P . وعادة نقرأها مثل « الفئة لكل العناصر x حيث $P(x)$ » . ومن الأهمية غالباً أن نحدد أى العناصر التى نختبرها للخاصية P . حينئذ غالباً ستكتب

$$\{x \in S : P(x)\}$$

للفئة الجزئية من S التى تحقق الخاصية P .

أمثـــلة :

(ا) إذا كانت $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ تعين فئة الأعداد الطبيعية ، حينئذ الفئة :

$$\{x \in N : x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

تحتوى تلك الأعداد الطبيعية التى تحقق المعادلة المذكورة . الآن الحلان الوحيدان لمعادلة الدرجة الثانية $x^2 - 3x + 2 = 0$ هما $x = 1$ و $x = 2$. وبالتالى بدلا من كتابة التعبير السابق (حيث يوجد عندنا معلومات مفصلة خاصة بجميع عناصر الفئة المختبرة) فإننا نرمز عادة لهذه الفئة بالرمز $\{1, 2\}$ مسجلين بذلك عناصر الفئة .

(ب) ويستعمل أحياناً قانون لاختصار وصف فئة . مثال ذلك : فئة كل الأعداد الطبيعية الزوجية يمكن كتابتها على الصورة $\{2x : x \in N\}$ بدلا من كتابتها على الصورة المعقدة $\{y \in N : y = 2x, x \in N\}$.

(جـ) الفئة $\{x \in N : 6 < x < 9\}$ يمكن كتابتها ببساطة مثل $\{7, 8\}$ ومن ثم عرض لعناصر الفئة . طبعاً توجد أوصاف أخرى ممكنة كثيرة لهذه الفئة . مثال ذلك :

$$\{x \in N : 40 < x^2 < 80\},$$
$$\{x \in N : x^2 - 15x + 56 = 0\},$$
$$\{7 + x : x = 0 \quad \text{أو} \quad x = 1\}$$

(د) وبالإضافة إلى فئة الأعداد الطبيعية (المحتوية على العناصر المعرفة بواسطة

$1, 2, 3, \ldots$ والتى سنرمز لها بالتماثل بالرمز $\mathbf{N}$ فإنه يوجد فئات أخرى قليلة سنقدم لها دلالة موحدة كما يتضح من الأمثلة الآتية :

فئة الأعداد الصحيحة هى :

$$\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$$

فئة الأعداد القياسية هى :

$$\boldsymbol{Q} = \{m/n : m, n \in \boldsymbol{Z} \quad \text{and} \quad n \neq 0\}$$

سنعالج الفئات $\boldsymbol{Q}$ و $\boldsymbol{Z}$ و $\mathbf{N}$ كما إذا كانت مفهومة جيداً وسوف لا نختبر ثانياً خواصها بتفصيلات أكثر . ومن الفئات التى لها أهمية أساسية لدراستنا القادمة هى الفئة $\boldsymbol{R}$ لجميع الأعداد الحقيقية التى ستختبر فى الأبواب ٤ — ٦ . الفئة الجزئية الخاصة للفئة $\boldsymbol{R}$ التى لها فائدة هى فترة الوحدة .

$$\boldsymbol{I} = \{x \in \boldsymbol{R} : 0 \leq x \leq 1\}$$

أخيراً سنرمز لفئة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbf{C}$ حيث سنعطى فى الباب الثالث عشر تعريفاً مفصلا للفئة $\mathbf{C}$ ووصفاً مختصراً لبعض خواصها .

عمليات الفئة :

سنقدم بعض الطرق لتكوين فئات جديدة من فئات معطاة :

١ — ٢ تعريف . إذا كانت A و B فئتين ، فإن تقاطعهما هى الفئة التى كل عناصرها تنتمى إلى كل من A ، B وسنرمز لتقاطع الفئتين B و A بالرمز $A \cap B$ الذى يقرأ « B تقاطع A » . (انظر شكل ١ — ٢) .

١ — ٣ تعريف . إذا كانت A ، B فئتين ، فإن اتحادهما هى الفئة التى كل عناصرها تنتمى إلى الفئة A أو إلى الفئة B أو إلى كل من A ، B وسنرمز لاتحاد الفئتين B ، A بالرمز $A \cup B$ الذى يقرأ B اتحاد A . (انظر شكل ١ — ٢) .

ويمكننا أيضاً تعريف

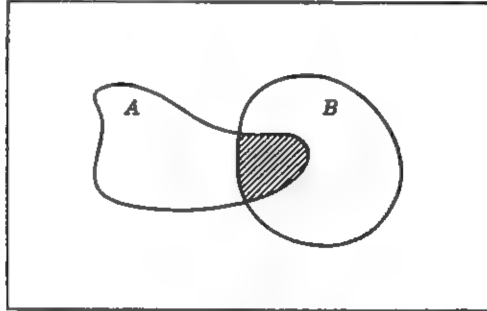
$A \cap B$ ، $A \cup B$ كالآتى

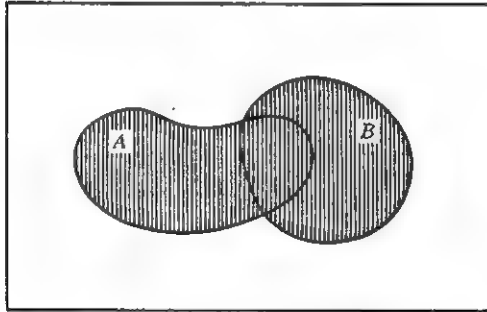
$$A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{و} \quad x \in B\}$$
$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{أو} \quad x \in B\}$$

بالرجوع إلى ما سبق ، نجد أنه من المهم أن نحقق أن الكلمة « أو » مستعملة بمعنى شامل مألوف استعماله فى الرياضيات والمنطق . يرمز لهذا المعنى الشامل فى قانون المصطلحات العلمية بالرمز « و / أو » .

سنفترض ضمنياً أن تقاطع واتحاد فئتين هو أيضاً فئة . ومن بين أشياء أخرى هذا يتطلب أن هناك يجب أن توجد فئة ليس لها عناصر بالمرة (لأنه إذا كانت B ، A ليس لهما عناصر مشتركة فتقاطعهما لا يحتوى عناصر) .

١ — ٤ تعريف . الفئة التى ليس لها عناصر تسمى فئة خالية أو فئة شاغرة وسنعينها بالرمز $\emptyset$. إذا كانت B و A فئتين ليس بينهما عناصر مشتركة (أى إنه إذا كانت $A \cap B = \emptyset$) فحينئذ نقول إن B و A غير مربوطة أو إنهما غير متقاطعين .





(شكل ١ — ٢) تقاطع واتحاد فئتين

النتيجة الثانية تعطى بعض الخواص الجبرية للعمليات على الفئات التى سبق عرفناها . وحيث إن البراهين لتلك الفروض دارجة وروتينية فسوف نترك معظمها كتمرينات للقارئ .

١ — ٥ نظرية . إذا كانت $A, B, C,$ أى ثلاث فئات ، فإن

$A\cap A=A,\quad A\cup A=A$ (أ)

$A\cap B=B\cap A,\quad A\cup B=B\cup A$ (ب)

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),\quad (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (جـ)

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (د)

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

هذه التساويات تسمى أحياناً بخاصية المماثلة وخاصية التبديل وخاصية الترافق وخاصية التوزيع على الترتيب لعمليات تقاطع واتحاد الفئات .

ولكى نعطى برهاناً كعينة ، سنبرهن المعادلة الأولى فى (د) . فبفرض x عنصر من $A\cap(B\cup C)$ ، حينئذ $x\in A$ و $x\in B\cup C$. هذا معناه أن $x\in A$ ، وأما $x\in B$ أو $x\in C$. ومن ذلك يكون لدينا إما (i) $x\in A$ و $x\in B$ أو يكون لدينا (ii) $x\in A$ و $x\in C$ لذلك إما $x\in A\cap B$ أو $x\in A\cap C$ ، إذن $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. وهذا يوضح أن $A\cap(B\cup C)$ هى فئة جزئية من $(A\cap B)\cup(A\cap C)$

بالعكس ، بفرض y عنصر من $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ فإما (iii) $y\in A\cap B$ أو (iv) $y\in A\cap C$. ومن ذلك ينتج $y\in A$ وإما $y\in B$ أو $y\in C$ ولذلك $y\in A$ أو $y\in B\cup C$ بحيث $y\in A\cap(B\cup C)$. إذن $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ هى فئة جزئية من $A\cap(B\cup C)$. بالنظر إلى تعريف ١ – ١ نختم أن الفئتين $A\cap(B\cup C)$ و $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ متساويتان .

وكإشارة إلى طريقة التغيير ، نلاحظ أن هناك فى الأصل مجموع $(=2^3)$ 8 من الإمكانيات لعنصر x بالنسبة إلى ثلاث فئات C و B و A (انظر شكل ١ – ٣) وهم :

(١) $x\in A, x\in B, x\in C$	(٢) $x\in A, x\in B, x\notin C$
(٣) $x\in A, x\notin B, x\in C$	(٤) $x\in A, x\notin B, x\notin C$
(٥) $x\notin A, x\in B, x\in C$	(٦) $x\notin A, x\in B, x\notin C$
(٧) $x\notin A, x\notin B, x\in C$	(٨) $x\notin A, x\notin B, x\notin C$

البرهان يتكون بتوضيح كل من الطرفين للمعادلة الأولى فى (د) تحتوى هذه وفقط هذه العناصر x المنتمية إلى الحالات (١) ، (٢) أو (٣) .

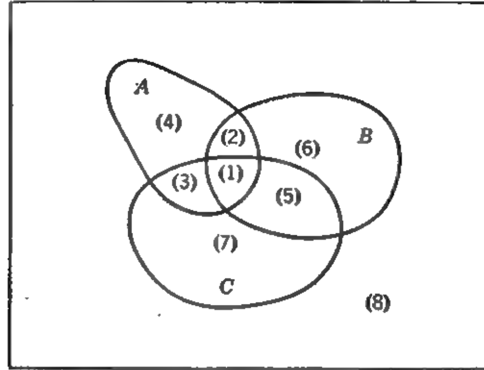
وبخصوص العلاقات الموجودة فى نظرية ١ – ٥ (جـ) فإننا عادة نحذف الأقواس

$$A\cap B\cap C,\qquad A\cup B\cup C$$

من الممكن أن نوضح أنه إذا كانت $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ مجموعة من الفئات ، فحينئذ يوجد فئة معرفة وحيدة A تحتوى كل العناصر المنتمية على الأقل لواحدة من هذه الفئات

وتوجد فئة معرفة وحيدة تحتوى كل العناصر المنتمية لكل الفئات $A_j, j = 1, 2, \ldots, n$: وبدون استعمال الأقواس ، نكتب $A_j, j = 1, 2, \ldots, n$،

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \qquad B = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$



(شكل ١ - ٣)

أحياناً - لتوفير الفراغ ، نقلد الرمز المستعمل فى حساب التفاضل والتكامل للمجموع ونستخدم رمزاً أكثر كثافة مثل

$$A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup\{A_j : j = 1, 2, \ldots, n\}$$

$$B = \bigcap_{j=1}^{n} A_j = \bigcap\{A_j : j = 1, 2, \ldots, n\}$$

بالمثل إذا كان لكل عنصر j فى الفئة J توجد فئة A_j فإن $\bigcup\{A_j : j \in J\}$ تبين فئة كل العناصر المنتمية على الأقل لواحدة من الفئات A_j . بنفس الطريقة $\bigcap\{A_j : j \in J\}$ تمثل فئة كل العناصر المنتمية إلى جميع الفئات A_j حيث $j \in J$.

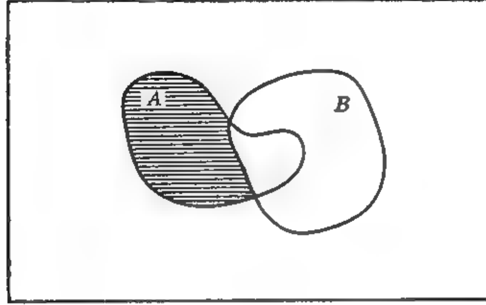
سنقدم الآن طريقة أخرى لتكوين فئة جديدة من فئتين معلومتين :

١ - ٦ تعريف . إذا كانت B ، A فئتين فإن الفئة المتممة للفئة B بالنسبة للفئة A هى الفئة التى كل عناصرها من A لا تنتمى إلى B . سنرمز لهذه الفئة بالرمز $A \setminus B$ (تقرأ « A ناقص B ») ، مع أن الرموز المرتبطة $A - B$ و $A \sim B$ أحياناً يستعملها مؤلفون آخرون (انظر شكل ١ - ٤) .

وباستخدام الرمز السابق ، يكون

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$$

أحياناً الفئة A تفهم ولا تحتاج إلى أن تذكر بوضوح وفى هذه الحالة ننوه إلى أن متممة الفئة B هى $A \setminus B$ ويرمز لها $\mathscr{C}(B)$. بالرجوع إلى شكل ١ — ١ نلاحظ أن العناصر x التى تحقق (١) تنتمى إلى $A \cap B$ ، وتلك التى تحقق (٢) تنتمى إلى $A \setminus B$ ، وتلك التى تحقق (٣) تنتمى إلى $B \setminus A$. سنوضح الآن أن A هو اتحاد الفئتين $A \cap B$ و $A \setminus B$



(شكل ١ — ٤) المتمم النسبى

١ — ٧ نظرية . الفئات $A \cap B$ ، $A \setminus B$ غير متقاطعة ويكون :

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

البرهان . بفرض $x \in A \cap B$ و $x \in A \setminus B$. ومما سبق يتبين أن $x \in A$ ، $x \notin B$ وهذا يناقض العلاقة $x \in A \cap B$. إذن الفئتان مفصولتان إذا كان $x \in A$ فحينئذ إما $x \in B$ أو $x \notin B$. فى الحالة السابقة $x \in A$ ، $x \in B$ أى أن $x \in A \cap B$. وأخيراً $x \in A$ و $x \notin B$ أى أن $x \in A \setminus B$. وهذا يوضح أن A هى فئة جزئية من $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$. وبالعكس ، إذا كان $y \in (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ فإن إما $y \in A \cap B$ أو $y \in A \setminus B$. فى أى حالة يكون $y \in A$ ، مما يثبت أن $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$ هى فئة جزئية من A . وهو المطلوب إثباته .

الآن سنذكر نص قوانين دى مورجان (*) لثلاث فئات وصيغة أكثر تعميما ستعطى فى التمارين .

(*) أجسطس دى مورجان (١٨٠٦ — ١٨٧٣) تعلم فى كلية جامعية ، لندن . كان رياضيا وعالما من علماء المنطق الرياضى وقد مهد الطريق لعلم المنطق الرياضى الحديث .

١ – ٨ نظرية . إذا كان A, B, C أى ثلاث فئات فإن :

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

البرهان . سنوضح العلاقة الأولى وسنترك العلاقة الثانية كتمرين القارىء .

ولإثبات تساوى الفئات سنبين أن كل عنصر فى $A \setminus (B \cup C)$ يكون محتوياً فى كل من $(A \setminus B)$ و $(A \setminus C)$ وبالعكس .

إذا كانت x فى $A \setminus (B \cup C)$ ، فإن x تكون فى A . لكن x لاتكون فى $B \cup C$. إذن x تكون فى A ، لكن x لاتكون إما فى B وإما فى C (لماذا ؟) . لذلك x تكون فى A لكن لا تكون فى B و x تكون فى A ولا تكون فى C . أى إن $x \in A \setminus B$ ، $x \in A \setminus C$ مما يثبت أن $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

وبالعكس ، إذا كانت $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ، فإن $x \in (A \setminus B)$ و $x \in (A \setminus C)$ أى $x \in A$ وكلا من $x \notin B$ ، $x \notin C$ ومن ذلك ينتج أن $x \in A$ و $x \notin (B \cup C)$ مما يثبت أن $x \in A \setminus (B \cup C)$.

بما أن الفئتين $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ و $A \setminus (B \cup C)$ تحتويان نفس العناصر فيكونان متساويين من التعريف ١ – ١ .

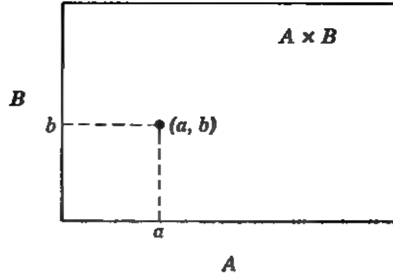
حاصل الضرب الكارتيزى :

الآن سنعرف حاصل الضرب الكارتيزى(**) لفئتين

١ – ٩ تعريف . إذا كانت B و A فئتين غير خاليتين فإن حاصل الضرب الكارتيزى للفئتين B و A هى فئة جميع الأزواج المرتبة (a, b) حيث $a \in A$ ، $b \in B$ (انظر شكل ١ – ٥) .

(التعريف المعطى حالياً غير مثالى أو غير كاف ما لم تعرف ما المقصود بالأزواج المرتبة) ونحن سوف لا نفحص الموضوع أكثر من ذلك باستثناء الإشارة إلى أن الزوج المرتب (a, b) يمكن تعريفه كفئة عناصرها المنفردة هى $\{a\}$ ، $\{a, b\}$. ويمكن إثبات أن الزوج المرتب (a, b) ، الزوج المرتب (a', b') يكونان متساويين إذا وإذا فقط كان $a = a'$ ، $b = b'$. هذه هى الخاصية الأساسية للأزواج المرتبة .

(**) رينيه ديكارت (١٥٩٦ — ١٦٥٠) مؤسس علم الهندسة التحليلية ، وكان رجلا فرنسيا مهذبا / جنديا ورياضيا وكان من أعظم فلاسفة عصره .



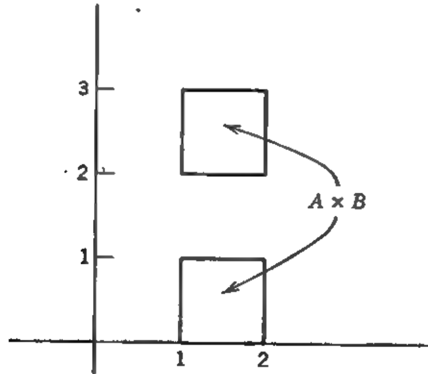
(شكل ١ – ٥) حاصل الضرب الكارتيزى

أى إنه إذا كانت $B = \{4, 5\}$ و $A = \{1, 2, 3\}$ ، فإن الفئة $A \times B$ هى الفئة التى عناصرها هى الأزواج المرتبة .

$$(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)$$

يمكننا رؤية الفئة $A \times B$ كفئة مكونة من ست نقط فى المستوى أحداثياتها هى التى دوناها حالا .

نحن غالباً نرسم شكلا توضيحياً (مثل شكل ١ – ٥) لنوضح حاصل الضرب الكارتيزى للفئتين B و A . كيفما كان فن المؤكد أن الشكل التوضيحى يمكن أن يكون للتبسيط تقريباً . مثال ذلك ، إذا كان $A = \{x \in \boldsymbol{R} : 1 \leq x \leq 2\}$ ؛ $B = \{x \in \boldsymbol{R} : 0 \leq x \leq 1$ أو $2 \leq x \leq 3\}$ فحينئذ بدلا من مستطيل ، نرسم تخطيطاً مثل شكل ١ – ٦ .



(شكل ١ – ٦) حاصل الضرب الكارتيزى

تمرينات :

١ – (ا) ارسم شكلا لتمثيل كل فئة مشار إليها فى نظرية ١ – ٥ .

١ – (ب) أثبت الجزء (جـ) من نظرية ١ – ٥ .

١ – (ج) أثبت الجزء الثانى من (د) من نظرية ١ – ٥ .

١ – (د) أثبت أن $A \subseteq B$ إذا وإذا فقط $A \cap B = A$.

١ – (هـ) بين أن الفئة D التى كل عناصرها تنتمى إما إلى A أو إلى B ولكن لا تنتمى إلى كليهما هى

$$D = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

هذه الفئة D غالباً تسمى اختلافاً متماثلا للفئتين B و A . مثلها بشكل توضيحى

١ – (و) وضح أن الاختلاف المتماثل D ، المعرف فى التمرين السابق هو أيضاً :

$$D = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

١ – (ز) إذا كانت $B \subseteq A$ فبين أن $B = A \setminus (A \setminus B)$.

١ – (ح) إذا كانت A و B أى فئتين ، فبين أن $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

١ – (ط) إذا كانت $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ مجموعة من الفئات ، وإذا كانت E أى فئة فبين أن

$$E \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} (E \cap A_j), \qquad E \cup \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} (E \cup A_j)$$

١ –(ى) إذا كانت $\{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ مجموعة من الفئات ، وإذا كانت E أى فئة فبين أن

$$E \cap \bigcap_{j=1}^{n} A_j = \bigcap_{j=1}^{n} (E \cap A_j), \qquad E \cup \bigcap_{j=1}^{n} A_j = \bigcap_{j=1}^{n} (E \cup A_j)$$

١ – (ك) بفرض أن E فئة ، $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ مجموعة من الفئات فحقق قوانين دى مورجان

$$E \setminus \bigcap_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} (E \setminus A_j), \qquad E \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcap_{j=1}^{n} (E \setminus A_j)$$

لاحظ أنه إذا كان $E \setminus A_j$ يعبر عنها بالمقدار $\mathscr{C}(A_j)$ فإن هذه العلاقات تأخذ الصورة

$$\mathscr{C}\Big(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\Big) = \bigcup_{j=1}^{n} \mathscr{C}(A_j), \qquad \mathscr{C}\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = \bigcap_{j=1}^{n} \mathscr{C}(A_j)$$

١ – (ل) بفرض J هى أى فئة ولكل عنصر $j \in J$ ، وبفرض A_j محتوية فى X . فبين أن

$$\mathscr{C}(\bigcap\{A_j : j \in J\}) = \bigcup\{\mathscr{C}(A_j) : j \in J\}$$
$$\mathscr{C}(\bigcup\{A_j : j \in J\}) = \bigcap\{\mathscr{C}(A_j) : j \in J\}$$

١ - (م) إذا كانت B_2 ، B_1 فئتين جزئيتين من B وكانت $B = B_1 \cup B_2$ فحينئذ :

$$A \times B = (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$$

البـــاب الثانى ــ دوال :

سنعود إلى مناقشة المفهوم الأساسى للدالة أو الراسم . وسنبين أن الدالة نوع خاص من الفئة . مع إن وجود تصورات أخرى وهى غالباً افتراضية . كل الأبواب الآتية ستختص بأنواع مختلفة من الدوال ، ولكن هذه ستكون عادة ذات طبيعة تجريدية بدرجة أقل من الموجودة فى مقدمة الباب الحاضر .

فى الرياضيات منذ قرن كلمة « دالة » عادة يقصد بها صيغة محدودة مثل

$$f(x) = x^2 + 3x - 5$$

الذى يرافق كل عدد حقيقى x عدد حقيقى آخر $f(x)$. وفى الحقيقة أن صيغاً معينة مثل

$$g(x) = \sqrt{x-5}$$

كانت لا تعطى أعداداً حقيقية لجميع القيم الحقيقية للمقدار x وكانت معروفة طبعاً ولكن كانت لا تعتبر أساساً كافياً تحتاج إليه فكرة امتداد تعريف الدالة . ومحتملا ظهور جدل بين الرياضيين حول كون القيمة المطلقة .

$$h(x) = |x|$$

للعدد الحقيقى « دالة غير متمـــيزة » أم لا . وبعد كل ذلك فتعريف $|x|$ المعطى فى « أجزاء » هو

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \text{ إذا كانت } \\ -x & x < 0 \text{ إذا كانت } \end{cases}$$

ومع تطوير الرياضيات أصبح بوضوح زائد عن الحاجة إلى أن الدالة تكون صيغة مقيدة أكثر من اللازم لأن تعريفا أكثر عموماً يكون مقيداً . ومن الواضح أيضاً أصبح هاما أن نفرق بوضوح بين الدالة نفسها وبين قيمة الدالة . ومن المحتمل أن يجد القارىء نفسه فى موقف الرياضى منذ قرن فى هذين الاعتبارين بدون خطأ منه . سنقترح إعادة القـــارىء إلى تاريخ استخدام وتعريف الدوال الحالى ولكن سنفعل ذلك فى خطوتين .

تعريفنا المنقح للدالة سيكون :

الدالة f من الفئة A إلى الفئة B هي قاعدة الاتصال التي تخصص لكل x في فئة جزئية معينة D من A عنصراً معيناً وحيداً $f(x)$ من B .

بالتأكيد الصيغ الصريحة من النوع المشار إليه أعلى محتوية في هذا التعريف التجريبي . والتعريف المقترح يسمح بإمكانية عدم تعريف الدالة لعناصر معينة من A وأيضاً يسمح باعتبار الدوال التي فيها الفئتان B و A ليست ضرورياً أعداداً حقيقية (لكن ربما تكون أدراج وكراسي – أو قطط وكلاب) .

مهما كان التعريف المقترح مقنعاً فإن به نقصاً له أهمية فهو ليس واضحاً . ستظل صعوبة تفسير العبارة « قاعدة الاتصال » وبدون شك يمكن للقارئ أن يفكر في تعبير يقنعه أفضل من السابق لكن ليس من المحتمل أنه سيزيل عدم الوضوح والضباب تماماً . وأحسن حل مقنع يبدو في تعريف « الدالة » بدلالة الفئات . والرموز والدلالات المذكورة في الباب السابق ذكره وهذه لها عدم فائدة لكونها غير حقيقية وفقدانها بعض الاكتفاء الوجداني بالوصف الأول ولكن الفائدة من الزيادة في الوضوح تتغلب على هذا النقص .

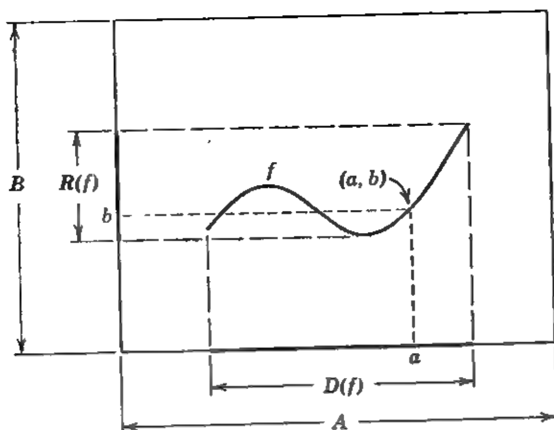
ومفتاح الفكرة هو التفكير في رسم بياني للدالة أي التفكير في مجموعة من الأزواج المرتبة ونلاحظ أن مجموعة اختيارية من الأزواج المرتبة لا يمكن أن تكون رسم دالة لأنه إذا عرف العنصر الأول من الزوج المرتب فإن العنصر الثاني يكون محدداً وحيداً .

٢ – ١ : تعريف . بفرض B و A فئتين (ليسا من الضروري متباينتين) فإن دالة من A إلى B هي فئة الأزواج المرتبة f في $A \times B$ مع خاصية أنه إذا كانت (a, b) ، (a, b') عنصرين من f فحينئذ $b = b'$. الفئة لكل العناصر للفئة A والتي توجد كالأعضاء الأولى من العناصر في f تسمى النطاق للفئة f ويرمز لها بالرمز $D(f)$. الفئة التي كل عناصرها من B والتي توجد كالأعضاء الثانية من العناصر في f تسمى مدى الفئة f (أو الفئة لقيم f) ويرمز لها $R(f)$. وفي حالة $D(f) = A$ ، فإننا غالباً نقول إن f راسم A إلى B (أو راسم A إلى B) ونكتب $f : A \to B$.

إذا كانت (a, b) عنصراً من دالة f ، فمن المعتاد أن نكتب :

$$b = f(a) \qquad \text{أو} \qquad f : a \mapsto b$$

بدلا من $(a, b) \in f$. نحن غالباً نشير إلى العنصر b كقيمة f عند النقطة a أو صورة a بواسطة الدالة f .



(شكل ٢ – ١) دالة كرسم بيانى

تمثيل جدولى :

يمكن تصور الدالة كرسم بيانى وهناك طريقة أخرى وهى هامة ومنتشرة الاستعمال وهى كجدول . اعتبر جدول ٢ – ١ الموجود فى صفحة التربية الرياضية من مجلة فوسلاند بوجل .

النطاق لدالة هذه الضربات الحرة f يتكون من التسعة لاعبين

$D(f)$ = {Anderson, Bade, Bateman, Hochschild, Kakutani, Kovalevsky, Osborn, Peressini, Rosenberg}

بينما المدى للدالة يتكون من الست أعداد .

$R(f) = \{0, 1, 2, 4, 5, 8\}$.

العناصر الفعلية للدالة هى الأزواج المرتبة

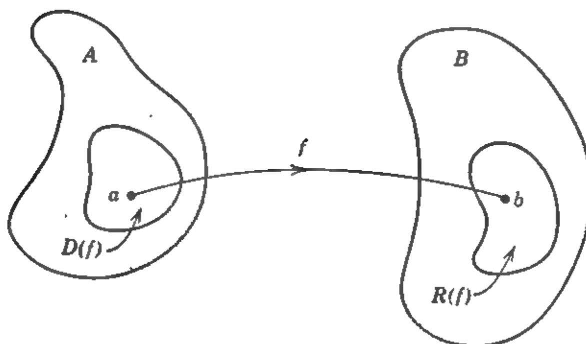
(Anderson, 2), (Bade, 0), (Bateman, 5),
(Hochschild, 1), (Kakutani, 4), (Kovalevsky, 8),
(Osborn, 0), (Peressini, 2), (Rosenberg, 4)

فى مثل هذا التمثيل الجدولى نكتب عادة فقط النطاق للدالة فى العمود الأيسر ، لأنه لا توجد حاجة للإشارة إلى الأعضاء من الفريق التى لم تلعب) ويمكن أن نقول قيمة الضربات الحرة للدالة f عند Anderson هى 2 ونكتب f (Anderson) = 2 أو Anderson → 2 وهكذا .

نحن جميعاً معتادون على استعمال مثل الجداول لنقل المعلومات . وهى أمثلة هامة للدوال وهى عادة ذات طبيعة من الصعب التعبير عنها بدلالة صيغة .

(جدول ٢ – ١)

اللاعب	عدد الضربات الحرة
Anderson	2
Bade	0
Bateman	5
Hochschild	1
Kakutani	4
Kovalevsky	8
Osborn	0
Peressini	2
Rosenberg	4

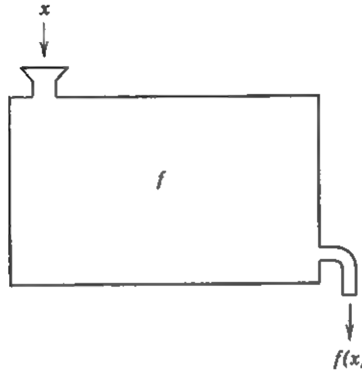


(شكل ٢ – ٢) دالة مثل تحويل

تحويلات وآلات :

توجد طريقة أخرى لتصور الدالة : مثل تحويل جزء من الفئة A إلى جزء من الفئة B وبتعبير أعم إذا كانت $(a, b) \in f$ فتفكيرنا عن f هو أخذ عنصر a من الفئة الجزئية $D(f)$ من A وتحويله أو نقله براسم إلى عنصر $b = f(a)$ فى الفئة الجزئية $R(f)$ للمقدار B . ونرسم غالباً شكلا توضيحياً مثل شكل ٢ – ٢ . وتستعمل كثيراً هذا التمثيل الهندسى للدالة حتى إذا كانت الفئتان A و B ليست فئات جزئية من المستوى .

وتوجد طريقة أخرى لتصور الدالة وذلك مثل الآلة التى سوف تستقبل عناصر $D(f)$ لتدخل فيها ثم تخرج منها بعد ميكنتها عناصر مناظرة فى الفئة الجزئية $R(f)$. أى إنه إذا أخذنا العنصر x من $D(f)$ ووضع فى f فحينئذ يخرج بالقيمة المناظرة $f(x)$. وإذا وضعنا عنصراً مختلفاً y من $D(f)$ فى f نحصل على $f(y)$ (الذى ربما يختلف أولا يختلف عن $f(x)$) . إذا حاولنا إدخال شيء ما لا ينتمى إلى $D(f)$ فى f فنجد عدم تبوله وذلك لأن قدرة f هى التأثير فقط على العناصر التى تنتمى إلى $D(f)$.
(انظر شكل ٢ - ٣)



١

(شكل ٢ - ٣) دالة مثل آلة

وهذا التصور الأخير يوضح بجلاء التمييز بين f ، $f(x)$. الأول الآلة والثانى هو نتاج الآلة عند وضع x فيها . ومن المفيد مؤكداً التمييز بين الآلة وإنتاجها . الشخص الأبله فقط هو الذى يرتبك ويحتار بين آلة فرم اللحم (المفرمة) واللحم المفروم . مهما كان فهناك كثيرون يخلطون بين الدوال وقيمها الأمر الذى يبين أهمية بذل مجهود بسيط للتمييز بينهما رمزياً .

قيود الدوال وامتداداتها :

إذا كانت f دالة نطاقها $D(f)$ ، D_1 فئة جزئية من $D(f)$ ، فإنه من المفيد أحياناً تعريف الدالة الجديدة f_1 التى نطاقها D_1 بأن $f_1(x) = f(x)$ وذلك لكل $x \in D_1$. هذه الدالة f_1 تسمى التقييد أو الحصر للدالة f فى الفئة D_1 . وبدلالة تعريف ٢ - ٢ يكون :

$$f_1 = \{(a, b) \in f : a \in D_1\}$$

أحيانا نكتب $f_1 = f | D_1$ للإشارة إلى قيد الدالة f إلى الفئة D_1 .

وهناك تركيب مماثل (يبدو أنه قريب من الحقيق) وهو الإشارة إلى (امتداد) ، فإذا كانت g دالة بنطاق $D(g)$ ؛ $D_2 \supseteq D(g)$ ، فإن أى دالة g_2 بنطاق D_2 بحيث أن $g_2(x) = g(x)$ لجميع قيم $x \in D(g)$ تسمى امتداد الدالة g للفئة D_2 .

تركيب الدوال :

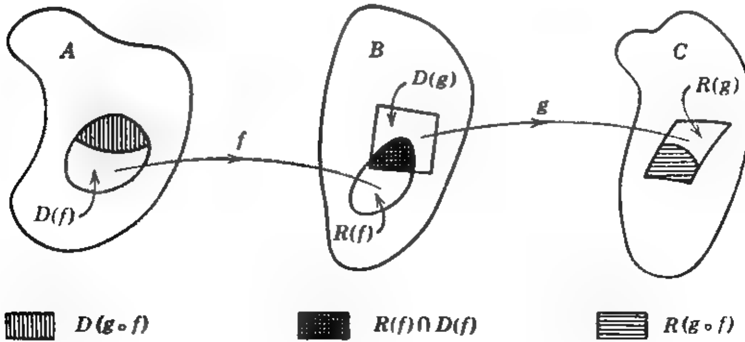
نحن الآن نريد أن نركب دالتين أولا باستخدام f لكل x فى $D(f)$ وبعد ذلك باستخدام g إلى $f(x)$ إذا كان ذلك ممكنا (أى إن عندما $f(x)$ تنتمى إلى $D(g)$) . لإجراء هذا نحتاج إلى العناية بفحص النطاق للدالة المحصلة . فمثلا ، إذا كانت f معرفة على R بواسطة $f(x) = x^3$ وكانت g معرفة للقيمة $x \geq 0$ بالتعريف $g(x) = \sqrt{x}$ فتركيب $g \circ f$ يمكن تعريفه فقط عندما $x \geq 0$ ولهذه الأعداد الحقيقية فإن قيمتها هى $\sqrt{x^3}$.

٢ — ٢ تعريف . بفرض أن f دالة بالنطاق $D(f)$ فى A والمدى $R(f)$ فى B وبفرض أن g دالة نطاقها $D(g)B$ فى B ومداها $R(g)$ فى C . (انظر شكل ٢ — ٤) فإن تركيب $g^\circ f$ (لاحظ الرتبة) هى الدالة من A إلى C المعطاة المعرفة .

$$g \circ f = (a, c) \in A \times C \; : \text{حيث يوجد عنصر } b \in B$$
$$\text{بحيث أن } (a, b) \in f \quad \text{و} \quad (b, c) \in g$$

٢ — ٣ نظرية . إذا كانت f ، g دالتين ، فإن تحصيل $g^\circ f$ هو الدالة ذات

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\}$$
$$R(g \circ f) = \{g(f(x)) : x \in D(g \circ f)\}$$



(شكل ٢ — ٤) تركيب الدوال

٢ – ٤ أمثلة . (أ) بفرض g و f دالتين قيمتهما عند العـــدد الحقيقى x هما الأعداد الحقيقية المعطاة بما يلى (*)

$$f(x) = 2x, \qquad g(x) = 3x^2 - 1 \quad .$$

بما أن $D(g)$ هى الفئة $\boldsymbol{R}$ لجميع الأعداد الحقيقية $R(f) \subseteq D(g)$ النطاق $D(g^\circ f)$ هو أيضاً $\boldsymbol{R}$ و $g \circ f(x) = 3(2x)^2 - 1 = 12x^2 - 1$. ومن ناحية أخرى $D(f \circ g) = \boldsymbol{R}$ ، لكن $f \circ g(x) = 2(3x^2 - 1) = 6x^2 - 2$.

(ب) إذا كانت h هى الدالة حيث $D(h) = \{x \in \boldsymbol{R} : x \geq 1\}$ المعرفة بالمقدار

$$h(x) = \sqrt{x - 1}$$

وإذا كانت f مثل (أ) ، فإن : $D(h \circ f) = \{x \in \boldsymbol{R} : 2x \geq 1\} = \{x \in \boldsymbol{R} : x \geq \frac{1}{2}\}$ ، $h \circ f(x) = \sqrt{2x - 1}$ أيضاً : $D(f \circ h) = \{x \in \boldsymbol{R} : x \geq 1\}$ ، $f \circ h(x) = 2\sqrt{x - 1}$.
إذا كانت g هى الدالة فى الجزء (أ) ، فإن :

$$D(h \circ g) = \{x \in \boldsymbol{R} : 3x^2 - 1 \geq 1\} = \{x \in \boldsymbol{R} : x \leq -\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

أو $x \geq \sqrt{\tfrac{2}{3}}\}$ ، $h \circ g(x) = \sqrt{3x^2 - 2}$ أيضاً $D(g \circ h) = \{x \in \boldsymbol{R} : x \geq 1\}$ ، $g \circ h(x) = 3x - 4$ (لاحظ أن الصيغة المعبرة $g^\circ h$ لهــا معنى لقيم x غير التى فى نطاق $g^\circ h$) .

(جـ) بفرض G و F دوال بالنطاقـــين : $D(F) = \{x \in \boldsymbol{R} : x \geq 0\}$ ، $D(G) = \boldsymbol{R}$ بحيث أن قيم F ، G عند النقطة x فى نطاقهما هى :

$$F(x) = \sqrt{x}, \qquad G(x) = -x^2 - 1$$

فإن $D(G \circ F) = \{x \in \boldsymbol{R} : x \geq 0\}$ ، $G \circ F(x) = -x - 1$ بينما : $D(F \circ G) = \{x \in D(G) : G(x) \in D(f)\}$. هذه الفئة الأخيرة تكون خالية مثل $G(x) < 0$ لكل $x \in D(G)$. أى إن الدالة $F^\circ G$ غير معرفة عند أى نقطة لذلك تكون $F^\circ G$ هى دالة شاغرة .

الدوال الادخالية والدوال العكسية :

سنعطى طريقة تكون دالة جديدة من الدالة المعطاة فى حالة كون الدالة الأصلية لا تأخذ نفس القيمة مرتين .

(*) نحن أيضا نبين هذا بكتابة : $f : x \to 2x$ ، $g : x \to 3x^2 - 1$ عند $x \in \boldsymbol{R}$.

٢ — ٥ تعريف . بفرض f دالة نطاقها $D(f)$ فى A ومداها $R(f)$ فى B . فإننا نقول إن الدالة f دالة إدخالية أو واحد – واحد إذا كان عندما (a, b) ، (a', b') عناصر من f فإن $a = a'$. إذا كانت f دالة إدخالية فيمكننا أن نقول إن f إدخال أو حقنة .

وبمعنى آخر الدالة تكون f إدخالية إذا وإذا فقط كانت العلاقتان $f(a) = b, f(a') = b$ تعنى ضمنياً أن $a = a'$. وبالتناوب تكون الدالة f إدخالية إذا وإذا فقط عندما a, a' يكونان فى $D(f)$ ، $a \neq a'$ فإن $f(a) \neq f(a')$.

نحن على حق فى حالة أنه إذا كانت f دالة إدخالية من A إلى B فإن الفئة من الأزواج المرتبة فى $B \times A$ التى يحصل عليها بإبدال العضو الأول والعضو الثانى من الأزواج المرتبة فى f تنتج دالة g التى هى أيضاً دالة إدخالية .

سنحذف برهان هذا الفرض وسيترك كتمرين وهو اختبار جيد للقارئ . العلاقات بين f ، g هى :

$$D(g) = R(f), \qquad R(g) = D(f)$$

$$(b, a) \in g \quad \text{إذا وإذا فقط} \quad (a, b) \in f$$

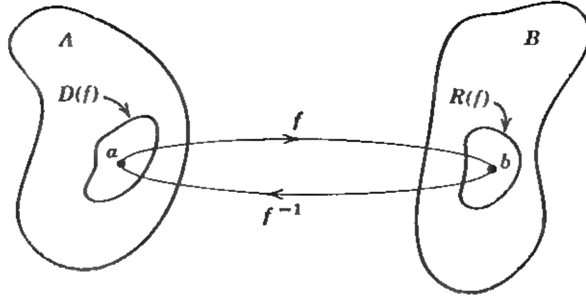
هذا النص الأخير يمكن كتابته على الصورة العادية

$$a = g(b) \quad \text{إذا وإذا فقط} \quad b = f(a)$$

٢ — ٦ تعريف . بفرض أن f دالة إدخالية لها نطاقها $D(f)$ فى A ومداها $R(f)$ فى B وبفرض أنه إذا كانت $g = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in f\}$ فإن g تكون إدخالية نطاقها $D(g) = R(f)$ فى B ومداها $R(g) = D(f)$ فى A . الدالة g تسمى بالدالة المكسية للدالة f ويرمز لها بالرمز f^{-1} .

الدالة المكسية يمكن تفسيرها من وجهة نظر الرامم . (انظر شكل ٢ — ٥) . إذا إذا كانت f دالة إدخالية فترسم عناصر مميزة من $D(f)$ إلى عناصر مميزة من $R(f)$. أى إن كل عنصر b من $R(f)$ هو صورة تحت f للعنصر الوحيد a فى $D(f)$. الدالة المكسية f^{-1} ترسم العنصر b إلى العنصر الوحيد a .

٢ — ٧ أمثلة . (ا) بفرض $F: x \mapsto x^2$ دالة نطاقها $D(F) = R$ ، الفئة لجميع الأعداد الحقيقية ، والمدى فى R بحيث أن القيمة للمقدار F عند العدد الحقيقى x هى $F(x) = x^2$. (وبمعنى آخر F تكون الدالة $\{(x, x^2) : x \in R\}$. من الواضح أن F ليست واحدا —



(شكل ٢–٥) الدالة العاكسة

واحداً . وفى الحقيقة الأزواج المرتبة $(-2, 4), (2, 4)$ كلاهما ينتميان إلى F . وبما أن F ليست واحداً – واحداً فليس لها دالة عكسية .

(ب) بفرض أن f الدالة التى نطاقها $R(f) = \boldsymbol{R}$ و $D(f) = \{x \in \boldsymbol{R} : x \geq 0\}$ التى قيمتها عند x فى $D(f)$ هى $f(x) = x^2$. لاحظ أن f هى قيد $D(f)$ للدالة F المذكورة فى جزء (أ) . بدلالة الأزواج المرتبة $f = \{(x, x^2) : x \in \boldsymbol{R}, x \geq 0\}$ بخلاف الدالة F فى الجزء (أ) تكون f دالة إدخالية لأنه إذا كانت $x^2 = y^2$ مع x, y فى $D(f)$ فإن $x = y$. (لماذا ؟) لذلك f لها دالة عكسية g لها :

$$D(g) = R(f) = \{x \in \boldsymbol{R} : x \geq 0\} \text{ ،} \quad R(g) = D(f) = \{x \in \boldsymbol{R} : x \geq 0\}$$

وبالإضافة إلى ذلك $y = x^2 = f(x)$ إذا وإذا فقط $x = g(y)$. هذه الدالة العكسية g عادة تسمى دالة الجذر التربيعى الموجب ويرمز لها :

$$g(y) = \sqrt{y}, \qquad y \in \boldsymbol{R}, \quad y \geq 0$$

(جـ) إذا كانت f_1 هى الدالة $\{(x, x^2) : x \in \boldsymbol{R}, x \leq 0\}$ فحينئذ كما فى (ب) ، تكون f_1 دالة واحداً – واحداً ولها نطاق $D(f_1) = \{x \in \boldsymbol{R} : x \leq 0\}$ ومدى $R(f_1) = \{x \in \boldsymbol{R} : x \geq 0\}$. لاحظ أن f_1 هى قيد $D(f_1)$ للدالة F المذكورة فى الجزء (أ) . الدالة g_1 الدالة العكسية للدالة f تسمى دالة الجذر التربيعى السالب ويرمز لها

$$g_1(y) = -\sqrt{y}, \qquad y \in \boldsymbol{R}, \quad y \geq 0$$

بحيث أن $g_1(y) \leq 0$.

(د) دالة الجيب F أى جا F فى حساب المثلثات حيث : $D(F) = \boldsymbol{R}$ و $R(F) = \{y \in \boldsymbol{R} : -1 \leq y \leq +1\}$ معروفة جيداً بأنها ليست دالة ادخالية (مثال

ذلك $(\sin 0 = \sin 2\pi = 0)$. لكن إذا كانت f هى تقييدها للفئة $D(f) = \{x \in \mathbf{R}:$ $-\pi/2 \leq x \leq +\pi/2\}$ حينئذ تكون f ادخالية ومن ثم يكون لها عكسية g حيث $D(g) = R(f)$ ، $R(g) = D(f)$. أيضا $y = \sin x$ حيث $x \in D(f)$ إذا وإذا فقط كانت $x = g(y)$. الدالة g تسمى (الفرع الأساسى) لدالة الجيب العكسية وغالباً يرمز لها بالرمز

$$g(y) = \text{Arc}\sin y \qquad \text{أو} \qquad g(y) = \text{Sin}^{-1} y$$

الدوال الفوقية والدوال التناظر احادية :

٢ – ٨ تعريف . بفرض أن f دالة نطاقها $D(f) \subseteq A$ ومداها $R(f) \subseteq B$. فنقول إن f دالة فوقية أو أن f ترتسم فوق B فى حالة كون المـدى $R(f) = B$. وإذا كانت f دالة فوقية فمن الممكن أن نقول إن f تكون فوق .

من المهم عند تعريف الدالة أن نحدد نطاق الدالة والفئة التى عناصرها هى القيم المأخوذة . وعند عمل هذا يكون من الممكن أن نستطلع ما إذا كانت الدالة فوقية أم لا .

٢ – ٩ تعريف . يقال الدالة f التى نطاقها $D(f) \subseteq A$ ومداها $R(f) \subseteq B$ إنها دالة أحادية إذا كانت (i) إدخالية (أى أنها واحد – واحد) ، (ii) فوقية (أى أن $D(f)$ ترتسم فوق B) . وإذا كانت f أحادية فيمكننا أن نقـول إن f تناظر أحادى .

الصور المباشرة والعكسية :

بفرض أن f دالة اختيارية نطاقها $D(f)$ فى A ومداها $R(f)$ فى B. سوف لا نفترض أن f إدخالية .

٢ – ١٠ تعريف . إذا كانت E فئة جزئية من A ، فإن الصورة المباشرة للفئة الجزئية E بواسطة f هى الفئة الجزئية $R(f)$ المعطاة كما يلى :

$$\{f(x) : x \in E \cap D(f)\}$$

نحن عادة نشير للصورة المباشرة للفئة E تحت f بالرمز $f(E)$. (انظر شكل ٢ – ٦) .

من الملاحظ أنه إذا كانت $E \cap D(f) = \emptyset$ فإن $f(E) = \emptyset$. إذا كانت E تحتوى على النقطة الوحيدة p فى $D(f)$ فإن الفئة $f(E)$ تحتوى على النقطة الوحيدة $f(p)$. تحتفظ الفئات ببعض خواصها تحت الصورة المباشرة كما نوضح الآن .

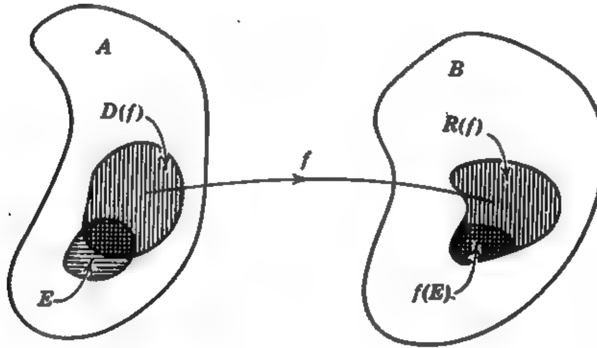
٢ – ١١ نظرية . بفرض أن f دالة نطاقها فى A ومداها فى B وبفرض أن E, F فئتان جزئيتان من A . فإن

(أ) إذا كان $E \subseteq F$, then $f(E) \subseteq f(F)$ (ب) $f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$

(جـ) $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$ (د) $f(E \setminus F) \subseteq f(E)$

البرهان . (أ) إذا كانت $x \in E$ فإن $x \in F$ وحينئذ $f(x) \in f(F)$ ، وحيث أن هذا صحيح لجميع قيم $x \in E$ فينتج أن $f(E) \subseteq f(F)$.

(ب) بما أن $E \cap F \subseteq E$ فينتج من الجزء (أ) أن $f(E \cap F) \subseteq f(E)$ وبالمثل $f(E \cap F) \subseteq f(F)$ ولذلك نستنتج أن $f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$



(شكل ٢ – ٦) الصورة المباشرة

(جـ) بما أن $E \subseteq E \cup F$ ، $F \subseteq E \cup F$ فينتج من الجزء (أ) أن $f(E) \cup f(F) \subseteq f(E \cup F)$. وبالعكس إذا كانت $y \in f(E \cup F)$ فحينئذ يوجد عنصر $x \in E \cup F$ بحيث أن $y = f(x)$. وبما أن $x \in E$ أو $x \in F$ فينتج أن اما $y = f(x) \in f(E)$ أو أن $y \in f(F)$.

لذلك نستنتج أن $f(E \cup F) \subseteq f(E) \cup f(F)$ الذى يكمل برهان الجزء (جـ) .

(د) الجزء (د) ينتج مباشرة من الجزء (أ)

وهو المطلوب إثباته

سيتضح فى تمرين (٢ – ى) أنه بوجه عام من غير الممكن استبدال علامة الحصر فى (ب) بعلامة التساوى .

الآن نقدم مدلول الصورة العكسية تحت دالة . لاحظ أنه ليس من المطلوب أن تكون الدالة إدخالية .

٢ – ١٢ تعريف . إذا كانت H فئة جزئية من B ، فإن الصورة العكسية للفئة الجزئية H تحت f هي الفئة الجزئية $D(f)$ المعطاة فى الصورة :

$$\{x : f(x) \in H\}$$

نحن عادة نرمز للصورة العكسية لفئة H تحت f بالرمز $f^{-1}(H)$. (انظر شكل ٢ – ٧) .

مرة أخرى ، نؤكد أن f لا تحتاج أن تكون دالة إدخالية حتى لا نحتاج إلى وجود الدالة العكسية f^{-1} . (لكن إذا كانت f^{-1} موجودة فإن $f^{-1}(H)$ هى الصورة المباشرة للفئة H تحت f^{-1}) .

٢ – ١٣ نظرية . بفرض أن f هى دالة نطاقها فى A ومداها فى B ونفرض أن H و G هما فئتان جزئيتان من B . فإن

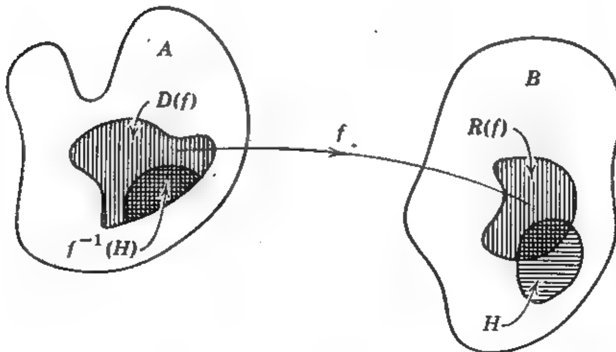
(ا) إذا كان $G \subseteq H$ فإن $f^{-1}(G) \subseteq f^{1}(H)$.

(ب) $f^{-1}(g \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$.

(جـ) $f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$.

(د) $f^{-1}(G\ H) = f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H)$.

البرهان . (ا) نفرض أن $x \in f^{-1}(G)$ فيكون $f(x) \in G \subseteq H$ ، وحينئذ $x \in f^{-1}(H)$



(شكل ٢ – ٧) صور عكسية

(ب) بما أن $G \cap H$ هى فئة جزئية من G ، H فينتج من جزء (أ) أن

$$f^{-1}(G \cap H) \subseteq f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$$

وبالعكس ، إذا كانت : $x \in f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$ فإن $f(x) \in G$ ، $f(x) \in H$ لذلك $f(x) \in G \cap H$ ، $x \in f^{-1}(G \cap H)$

(جـ) بما أن G ، H فئتان جزئيتان من $G \cup H$ ، فينتج من جزء (أ) أن :

$$f^{-1}(G \cup H) \supseteq f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$$

وبالعكس ، إذا كانت $x \in f^{-1}(G \cup H)$ فإن $f(x) \in G \cup H$ ومن ذلك ينتج أنه إما $f(x) \in G$ حيث $x \in f^{-1}(G)$ أو $f(x) \in H$ وفى هذه الحالة $x \in f^{-1}(H)$ إذن

$$f^{-1}(G \cup H) \subseteq f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$$

(د) إذا كانت $x \in f^{-1}(G \setminus H)$ فإن $f(x) \in G \setminus H$ لذلك $x \in f^{-1}(G)$ ، $x \notin f^{-1}(H)$ ومن ذلك ينتج أن .

$$f^{-1}(G \setminus H) \subseteq f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H).$$

وبالعكس ، إذا كانت $w \in f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H)$ فإن $f(w) \in G$ ، $f(w) \notin H$ حيث $f(w) \in G \setminus H$ ومن ذلك ينتج أن .

$$f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(G \setminus H)$$

وهو المطلوب إثباته

تمرينات :

٢ – (أ) أثبت أن تعريف ٢ – ٢ ينتج فعلياً دالة وليس بالضبط فئة جزئية .

٢ – (ب) . بفرض $A = B = \mathbf{R}$ واعتبار الفئة الجزئية $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ للمقدار $A \times B$ هل هذه الفئة دالة نطاقها فى $\mathbf{R}$ ومداها فى $\mathbf{R}$ ؟

٢ – (ج) باعتبار الفئة الجزئية للمقدار $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ المعرفة بما يلى $D = \{(x, y) : |x| + |y| = 1\}$ صف هذه الفئة بالكلام ، هل هى دالة ؟

٢ – (د) أعط مثالا لدالتين g و f على $\mathbf{R}$ إلى $\mathbf{R}$ بحيث أن $f \neq g$ ، ولكن بحيث أن $f \circ g = g \circ f$.

٢ – (هـ) أثبت أن إذا كانت f إدخالية من A إلى B فإن : $f^{-1}=\{(b,a):(a,b)\in f\}$ دالة وأثبت أنها إدخالية .

٢ – (و) بفرض أن f إدخالية . فاثبت أن $f^{-1}\circ f(x)=x$ لجميع قيم x فى $D(f)$ ، وأثبتها أيضاً $f\circ f^{-1}(y)=y$ لجميع قيم y فى $R(f)$.

٢ – (ز) بفرض f ، g دالتين وبفرض أن $g\circ f(x)=x$ لجميع قيم x فى $D(f)$. أثبت أن f إدخالية وأن $R(f)\subseteq D(g)$ ، $R(g)\supseteq D(f)$.

٢ – (ح) بفرض g و f دالتين بحيث أن :

$$g\circ f(x)=x \quad \text{لجميع قيم } x \text{ فى } D(f)$$

$$f\circ g(y)=y \quad \text{لجميع قيم } y \text{ فى } D(g)$$

أثبت أن $g=f^{-1}$

٢ – (ط) أثبت أن الصورة المباشرة $f(E)$ خالية إذا وإذا فقط كانت :

$$E\cap D(f)=\emptyset$$

٢ – (ى) بفرض أن f هى الدالة على R إلى R والمعطاة $f(x)=x^2$ ونفرض : $E=\{x\in R:-1\le x\le 0\}$ ، $F=\{x\in R:0\le x\le 1\}$ فإن $E\cap F=\{0\}$ بينما $f(E\cap F)=\{0\}$ $f(E)=f(F)=\{y\in R:0\le y\le 1\}$ ومن ذلك استتبع أن $f(E\cap F)$ هى فئة جزئية فعلية للمقدار $f(E)\cap f(F)$. احذف الآن O من E ، F .

٢ –(ك) إذا كانت F و E و f كما فى تمرين (٢ – ظ) ، فإن : $E\setminus F=\{x\in R:-1\le x<0\}$ ، $f(E)\setminus f(F)=\emptyset$ ومن ذلك لا ينتج أن

$$f(E\setminus F)\subseteq f(E)\setminus f(F)$$

٢ – (ل) بين أنه إذا كانت f إدخالية للمقدار $D(f)$ إلى $R(f)$ وإذا كانت H هى فئة جزئية من $R(f)$ ، فإن الصورة المكسية للفئة الجزئية H تحت f تنطبق على الصورة الماكسة للفئة الجزئية H تحت الدالة الماكسة f^{-1} .

٢ – ٣ إذا كانت f ، g كما فى تعريف ٢ – ٢ فاثبت أن : $D(g\circ f)=f^{-1}(D(g))$

البـــاب الثالث ـــ فئات محدودة وفئات غير محدودة :

الغرض من هذا الباب محدود جداً، وهو لتقديم العبارات منتهية ، معدودة ولا نهائية . هذا الباب سيمدنا بأساس دراسة الأعداد الأصلية ولكنه سوف لا يواصل هذه الدراسة .

ومع أن نظريات الأعداد الأصلية والعادية فاتنة بطبيعتها فإن عوضاً صغيراً جداً لها يكون فى الحقيقة حيوياً لموضوعات هذا الكتاب(*) .

سنفترض تعودنا على فئة الأعداد الطبيعية . وسنرمز لهذه الفئة بالرمز N ، عناصر فئة الأعداد الطبيعية يرمز لها بالرموز العادية .

$$1, 2, 3, \ldots$$

إذا كانت $n, m \in N$ فإننا جميعاً عندنا فكرة بدهية عن المعنى المقصود بقولنا n أقل من أو تساوى m وسنستعير هذه الفكرة الآن محققين أن الدقة الكاملة تتطلب تحليلا أكثر مما أعطينا . سنفترض أن كل فئة جزئية غير خالية للمقدار N تحتوى على الأقل على عنصر واحد . وهذه هى خاصية هامة للمقدار N ، أحياناً نقول إن N جيدة الترتيب بمعنى أن N لها هذه الخاصية . وهذه أى خاصية حسن الترتيب مكافئة للاستنتاج الرياضى . سنشعر بحرية استخدام براهين أساسها الاستنتاج الرياضى الذى سنفترض أنه مألوف للقارئ .

يقصد بالقطعة الابتدائية للمقدار N فئة تتكون من جميع الأعداد الطبيعية التى تكون أقل من أو تساوى عنصراً ثابتاً من عناصر N . أى إن قطعة ابتدائية S_n للمقدار N تحدد عنصراً وتكون محدودة بعنصر مثل n من عناصر N كما يلى :

عنصر x من عناصر N ينتمى إلى S_n إذا وإذا فقط كانت $x \leq n$.

مثال ذلك : الفئة الجزئية $S_2 = \{1, 2\}$ هى القطعة الابتدائية للمقدار N المحدودة بالعدد الطبيعى 2 ، الفئة الجزئية $S_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ هى القطعة الابتدائية للمقدار N المحدودة بالعدد الطبيعى 4 ، لكن الفئة الجزئية $\{1, 3, 5\}$ للمقدار N ليست قطعة ابتدائية للمقدار N لأنها تحتوى 3 ولا تحتوى 2 وأيضاً تحتوى 5 ولا تحتوى 4 .

٣ - ١ تعريف . فئة B تكون محدودة ، وإذا كانت خالية أو إذا كان يوجد تناظر أحادى مع نطاق B ومدى فى قطعة ابتدائية من N . إذا لم يوجد دالة كهذه فإن الفئة تكون غير محدودة أو لا نهائية . إذا كان هناك تناظر أحادى للمقدار B فوق N ، فإن الفئة B تكون تنازلية عددية . إذا كانت الفئة إما محدودة أو عددية فيقال إنها معدودة .

عند وجود دالة إدخالية (أى واحد - واحد) نطاقها B ومداها C ، فإننا نقول أحياناً إن B يمكن وضعها إلى واحد - واحد بالتناظر أى إلى تناظر أحادى مع C . وباستعمال هذا المصطلح نعيد تعريف ٣ - ١ ونقول إن فئة B تكون محدودة إذا كانت خالية أو يمكن

(*) القارىء الذى يرغب فى تعلم هذه الموضوعات يرجع الى كتاب Halmos المدون فى المراجع.

وضعها كتناظر أحادى مع فئة جزئية من قطعة ابتدائية للفئة N ونقول إن B تنازلية عددية إذا كان من الممكن وضعها كتناظر أحادى مع كل عناصر N .

من الملاحظ من التعريف أن الفئة B إما محدودة أو غير محدودة ، لكن ، تبعاً لتعريف الفئة ، ليس من السهل أن نقرر ما إذا كانت الفئة المعطاة B محدودة أو غير محدودة .

الفئات الجزئية المقدار N المبينة بالآتى : $\{2, 3, \ldots, 100\}$ ، $\{2, 4, 5, 8, 10\}$ ، $\{1, 3, 5\}$، محدودة ، بالرغم من أن هذه الفئات الجزئية ليست قطعا جزئية الفئة N فإنها تكون محتوية فى قطع جزئية للمقدار N . ومن ثم يمكن وضعها كتناظر أحادى مع فئات جزئية لقطع ابتدائية للفئة N . فئة الأعداد الطبيعية الزوجية E .

$$E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

وفئة الأعداد الطبيعية الفردية O

$$O = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$$

ليست قطعا ابتدائية للفئة N . كيفما كان ، حيث أنه يمكن وضعها كتناظر أحادى مع كل الفئة N (كيف ؟) فتكونان معاً فئة عددية .

ومع أن الفئة Z لجميع الأعداد الصحيحة

$$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

تحتوى الفئة N فيمكن إيضاح أن Z فئة عددية (كيف ؟) .

سنقرر الآن بعض نظريات بدون برهان ومن المحتمل عند القراءة الأولى قبولها بدون اختبار . وبقراءة تالية سيحاول القارئ أن يبرهن هذه النظريات . وبعمل هذا سيجد أن خاصية الاستنتاج للفئة N للأعداد الطبيعية مفيدة (*) .

٣ — ٢ نظرية . فئة B تكون عددية إذا وإذا فقط وجد إدخال بين النطاق B ومدى فى N .

٣ — ٣ نظرية . أى فئة جزئية من فئة محدودة تكون محدودة وأى فئة جزئية من فئة عددية تكون أيضاً عددية .

(*) انظر كتب هالموس وهاميلتون — لاندن فى المراجع .

٣ – ٤ نظرية . اتحاد مجموعة محدودة لفئات محدودة تكون فئة محدودة . واتحاد مجموعة عددية لفئة عددية تكون فئة عددية .

ونتيجة من الجزء الثانى من نظرية ٣ – ٤ أن الفئة Q لجميع الأعداد الجذرية تكون فئة عددية (المقصود بالعدد المنطق أو الجذرى هو كسر m/n حيث m و n أعداد صحيحة ، $n \neq 0$) . لتوضيح أن Q تكون فئة عددية تكون الفئات

$$A_0 = \{0\},$$
$$A_1 = \{\tfrac{1}{1}, -\tfrac{1}{1}, \tfrac{2}{1}, -\tfrac{2}{1}, \tfrac{3}{1}, -\tfrac{3}{1}, \ldots\},$$
$$A_2 = \{\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{2}, -\tfrac{2}{2}, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, \ldots\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = \left\{\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, -\frac{2}{n}, \frac{3}{n}, -\frac{3}{n}, \ldots\right\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

نلاحظ أن كلا من الفئات A_n عددية وأن اتحادها هو الفئة Q كلها . إذن نظرية ٣ – ٤ تؤكد أن Q عددية . وفى الحقيقة يمكننا جعل Q عددية بطريقة القطر

$$0, \tfrac{1}{1}, -\tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{1}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots .$$

وباستخدام هذا النوع من الاستدلال يمكن القارىء أن يكون برهان نظرية ٣ – ٤ . انظر أيضاً تمرين (٣ . ك) .

عدم قابلية العد للمقدارين R و I

بالرغم من حقيقة أن الأعداد المنطقية لها قابلية العد فإن الفئة R لجميع الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد . وفى الحقيقة الفئة I للأعداد الحقيقية x التى تحقق $0 \leq x \leq 1$ غير قابلة للعد . ولتوضيح هذا سنستعمل استدلال القطر لمخترعها ج. كانتور(*) . سنفترض أنه من المعلوم أن كل عدد حقيق x حيث $0 \leq x \leq 1$ له تمثيل عشرى على الصورة ...

$$x = 0.\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots,$$

حيث كل a_k يشير إلى واحد من الأرقام $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. ومن المعروف أن أعداداً حقيقية معينة لها تمثيلات فى هذه الصورة (مثال ذلك الكسر $\frac{1}{10}$ له تمثيلان :

$$0.1000\ldots \quad \text{و} \quad 0.0999\ldots$$

(*) جورج كانتور (١٨٤٥ — ١٩١٨) ولد فى بيترى بورج ، تعلم فى برلين مع فيرشتراس ودرس فى Halle (هاليه) وهو معروف بأبحاثه بنظرية الفئات حيث طورها خلال السنوات ١٨٧٤ — ١٨٩٥ .

ويمكننا اختيار التمثيل الذى نريده ولكن ليس من الضرورى عمل ذلك . وحيث إنه يوجد عدد لا نهائى من الأعداد الجذرية فى الفترة $0 \leq x \leq 1$ (لماذا؟) فلا يمكن أن تكون الفئة محدودة وسنبين الآن أن I غير عددية فإذا فرضنا أنه يوجد تعداد $x_1, x_2, x_3, \ldots$ لكل أعداد حقيقية حيث $0 \leq x \leq 1$ تعطى بالعلاقة .

$$x_1 = 0.a_1a_2a_3 \cdots$$
$$x_2 = 0.b_1b_2b_3 \cdots$$
$$x_3 = 0.c_1c_2c_3 \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

الآن نفرض أن y_1 رقم يختلف عن $0, a_1$ ، 9 ونفرض أن y_2 رقم يختلف عن $0, b_2$ ، 9 و نفرض أن y_3 رقم يختلف عن $0, c_3$ ، 9 ، الخ . نعتبر العدد y بتمثيل عشرى

$$y = 0.\, y_1\, y_2\, y_3 \ldots$$

الذى بوضوح يحقق $0 \leq y \leq 1$. العدد y ليس واحداً من الأعداد ذات التمثيلين العشريين لأن $y_n \neq 0, 9$. وفى نفس الوقت $y \neq x_n$ لأى n (لأن الرقمين النونيين فى التمثيل العشرى لكل من y ، x_n مختلفان) ولذلك أى مجموعة عددية لأعداد حقيقية تنتمى إلى هـذه الفترة ستحذف على الأقل عدداً حقيقياً واحداً ينتمى إلى هذه الفترة مما يثبت أن هذه الفترة ليست فئة عددية .

نفرض أن A فئة غير محدودة وسنفترض وجود تناظر أحادى بين فئة جزئية للفئة A والفئة N بأكلها بمعنى آخر سنفترض أن كل فئة غير محدودة تحتوى على فئة جزئية عددية. هذا الافتراض ليس قوياً من وجهة نظر « بدهية الاختيار » التى هى من البدهيات المفيدة فى نظرية الفئات . بعد هضم القارىء لمحتويات هذا الكتاب سيشرع فى المعالجة البدهية للأساسيات التى نوقشت فى هذا الكتاب بصيغة غير رسمية ولكنه فى الوقت الحاضر سيأخذ النصوص كبدهيات وقتية ويمكن إبدالها فيما بعد ببدهيات أكثر شمولا فى نظرية الفئات .

تمرينات :

٣ – (أ) استعرض تناظراً أحادياً بين فئة الأعداد الطبيعية الزوجية E ، N .

٣ – (ب) استعرض تناظراً أحادياً بين الفئة O للأعداد الطبيعية الفردية ، N .

٣ – (ج) استعرض تناظراً أحادياً بين N والفئة الجزئية الفعلية للفئة N .

٣ – (د) إذا كانت A محتوية فى قطعة ابتدائية ما للفئة N ، باستخدام خاصية الترتيب الجيد للفئة N عرف إدخالا للفئة A فوق قطعة ابتدائية ما للفئة N .

٣ – (هـ) اعط لمجموعة عددية لفئات محدودة بحيث يكون اتحادها غير محدود .

٣ – (و) باستخدام حقيقة كون كل فئة غير محدودة لها فئة جزئية عددية لتوضح أن كل فئة غير محدودة يمكن وضعها كتناظر أحادى مع فئة جزئية فعلية لنفسها .

٣ – (ز) وضح أنه إذا كانت الفئة A يمكن وضعها كتناظر أحادى مع فئة B ، فإن الفئة B يمكن وضعها كتناظر أحادى مع الفئة A .

٣ – (ح) أثبت أنه إذا كانت الفئة A يمكن وضعها كتناظر أحادى مع الفئة B ، وكانت B بحيث يمكن وضعها كتناظر أحادى مع الفئة C ، فإن الفئة A يمكن وضعها كتناظر أحادى مع الفئة C

٣ – (ط) باستخدام الاستنتاج على $n \in N$ ، وضح أن القطعة الابتدائية المحددة بالمقدار n لايمكن وضعها كتناظر أحادى مع القطعة الابتدائية المحددة بالمقدار $m \in N$ إذا كانت $m < n$.

٣ – (ى) أثبت أن N لا يمكن وضعها كتناظر أحادى مع أى قطعة ابتدائية للمقدار N .

٣ – (ك) لكل $n \in N$ بفرض $A_n = \{a_{nj} : j \in N\}$ وبفرض أن $A_n \cap A_m = \emptyset$ حيث $n \neq m ; n, m \in N$ أثبت أن الدالة $f(n, j) = \frac{1}{2}(n+j-2)(n+j-1)+n$ تعطى تعداداً للمقدار $\bigcup \{A_n : n \in N\}$

الأعداد الحقيقية

فى هذا الفصل سنشرح خواص نظام العدد الحقيقى . ومع إنه من الممكن تكوين هذا النظام من أكثر من فئة أولية (مثل الفئة N للأعداد الطبيعية أو الفئة Q للأعداد القياسية) فإننا سوف لانفعل ذلك وبدلا منه سنعرض قائمة من الخواص التى ترتبط بنظام العدد الحقيقى وسنوضح كيفية استنتاج خواص أخرى من الخواص التى فرضت .

لأجل التوضيح لا نفضل ذكر كل خواص نظام العدد الحقيقى مرة واحدة ، وبدلا منه سنقدم أولا فى الفصل الرابع « الخواص الجبرية » المؤسسة على عمليتى الجمع والضرب ونناقش باختصار بعض نتائجها . وبعد ذلك سنقدم « الخواص المرتبة » بينما فى الفصل السادس سنضيف « خاصية الإتمام » ويوجد أسباب عديدة لهذه العملية التى هى بنوع ما عملية قطعة فقطعة . يوجد أولا البراهين يجب مراعاتها ويستحسن أخذ قليل منها فى كل مرة . وبالإضافة إلى ذلك نجد أن البراهين اللازمة فى الخطوات الجبرية التمهيدية طبيعية بدرجة أكثر من بعض البراهين التالية .

وأخيراً بما أنه يوجد طرق مشوقة أخرى لإضافة « خاصية الإتمام » فنحن نرغب فيها منفردة أو منعزلة عن الفروض الأخرى .

جزء من هدف الفصلين الرابع والخامس هو مدنا بأمثلة براهين النظريات الابتدائية التى تستنتج من الفروض المنصوص عليها صراحة . وخبرتنا هى أن الطلبة الذين لم يتعرضوا للبراهين العنيفة يمكنهم تفهم المناقشة والبراهين فى هذه الأبواب جاهزة ، ويمكنهم بعد ذلك الانتقال إلى الباب السادس ، كيفما كان فإن الطلبة الذين لهم دراية بالطريقة البدهية وفن استخلاص البراهين بطريقة ميكانيكية يمكنهم الانتقال إلى الباب السادس بعد نظرة خاطفة إلى البابين الرابع والخامس .

فى الباب السابع نقدم تصور القطع فى نظام العدد الحقيقى ونعرف أنواعاً مختلفة من الخلايا والفترات . خاصية الخلايا المتداخلة الهامة للفئة R أقرت ووضحت بينما نوقشت فئة كانتور بإيجاز .

الباب الرابع ــ الخواص الجبرية للمقدار R :

فى هذا الباب سنعطى التركيب « الجبرى » لنظام العدد الحقيقى وبتعبير موجز تكون الأعداد الحقيقية « حقلا » فى موضوع الجبر المجرد . والآن سنشرح ما المقصود بذلك .

نقصد بالعملية الثنائية فى الفئة F الدالة B التى نطاقها $F \times F$ ومداها فى F . وبدلا من استعمال الرمز B (a و b) للدلالة على قيمة العملية الثنائية عند النقطة (a و b) فى $F \times F$ فقد اصطلح على أن نستعمل رموزاً مثل aBb أو $a+b$ أو $a \, . \, b$.

٤ – ١ الخواص الجبرية للفئة R : يوجد فى الفئة R للأعداد الحقيقية عمليتان (يشار إليهما بالعلامتين ، . وتسمى جمع وضرب على الترتيب) تحققان الخواص الآتية (*) .

(A1) $a+b=b+a$ لكل a, b فى R .

(A2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ لكل من a, b, c فى R .

(A3) يوجد عنصر 0 فى R حيث $0+a=a$ و $a+0=a$ لكل a فى R .

(A4) لكل عنصر a فى R يوجد عنصر $-a$ فى R بحيث أن $a+(-a)=0$ و $(-a)+a=0$

(M1) $a \cdot b=b \cdot a$ لكل a, b فى R .

(M2) $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$ لكل a, b, c فى R .

(M3) العنصر 1 فى R يختلف عن 0 وله الخاصية التى تجعل $1 \cdot a=a$ ، $a \cdot 1=a$ لكل a فى R .

(M4) لكل عنصر $a \neq 0$ فى R يوجد عنصر $1/a$ فى R بحيث أن $a \cdot (1/a)=1$ و $(1/a) \cdot a=1$

(D) $a \cdot (b+c)=(a \cdot b)+(a \cdot c)$ و $(b+c) \cdot a=(b \cdot a)+(c \cdot a)$ لكل b و a فى R .

هذه الخواص بالتأكيد معروفة للقارىء . وسنحصل على بعض نتائج سهلة (ليست مهمة) منها . فأولا سنبرهن أن 0 هو العنصر الوحيد للمقدار R الذى يحقق (A3) ، 1 هو العنصر الوحيد الذى يحقق (M3) .

٤ – ٢ نظرية . (أ) إذا كانت z ، a عناصر فى R بحيث أن $z+a=a$ فإن $z=0$.

(ب) إذا كانت w ، $b \neq 0$ عناصر فى R بحيث أن $w \, . \, b=b$ فإن $w=1$.

البرهان .من الفرض $z+a=a$. اجمع a – لكل من الطرفين واستخدم (A2), (A4), (A4)و(A3) لتحصل على

(*) هذه القائمة ليس المقصود بها أن تكون « أدنى أو أقل » . أى إن المعطيات الثانية فى (A3) و (A4) تنتج من المعطيات الأولى باستخدام (A1) .

$$0=a+(-a)=(z+a)+(-a)=z+(a+(-a))$$
$$=z+0=z.$$

البرهان لجزء (ب) يترك كتمرين . لاحظ أنه فى الفرض $b\neq 0$.

وهو المطلوب إثباته

الآن نوضح أن المنصرين a — و$1/a$ (عندما $a\neq 0$) يتعينان كمنصرين وحيدين بواسطة الخواص الموجودة فى (A4) و (M4) .

٤ – ٣ نظرية . (أ) إذا كانت a ، b عنصرين من R ، $a+b=0$ فإن $b=-a$.

(ب) إذا كانت $a\neq 0$ ، b عنصرين من R و $a \,.\, b=1$ فإن $b=1/a$.

البرهان . (أ) إذا كانت $a+b=0$ فنجمع a — إلى كل من الطرفين نحصل على $(-a)+(a+b)=-a+0$. نستعمل (A2) على الطرف الأيسر ، (A3) على الطرف الأيمن لحصول على .

$$((-a)+a)+b=-a$$

إذا استعملنا (A4) ، (A3) على الطرف الأيسر ، نحصل على $b=-a$.

البرهان لجزء (b) يترك كتمرين للطالب . لاحظ أنه فى الفرض $a\neq 0$.

وهو المطلوب إثباته

الخاصيتان (A4) و (M4) تضمنان إمكانية حل المعادلات

$$a+x=0, \qquad a\cdot x=1 \quad (a\neq 0)$$

للمقدار x ، ونظرية ٣ – ٤ تتضمن إثبات أن الحل وحيد . وسنوضح الآن أن الأطراف اليسرى من هذه المعادلات يمكن أن تكون عناصر اختيارية من R .

٤ – ٤ نظرية . (أ) بفرض أن b و a عناصر اختيارية من R . فإن المعادلة $a+x=b$ لها الحل الوحيد $x=(-a)+b$

(ب) بفرض $a\neq 0$ و b عنصرين اختياريين من R فإن المعادلة $a \,.\, x=b$ لها الحل الوحيد $x=(1/a)\,.\,b$.

البرهان . بما أن $a+((-a)+b)=(a+(-a))+b=0+b=b$ فمن الواضح أن $x=(-a)+b$ هو حل للمعادلة $a+x=b$ ولتقرير أن هذا هو الحل الوحيد فقط سنفرض أن x_1 هو أى حل لهذه المعادلة ، فإذن

$$a+x_1=b$$

نضيف a — إلى كل من الطرفين نحصل على

$$(-a)+(a+x_1)=(-a)+b$$

وإذا استخدمنا (A3) ، (A4) و (A2) نحصل على

$$x_1=0+x_1=(-a+a)+x_1$$
$$=(-a)+(a+x_1)=(-a)+b$$

إذن $x_1=(-a)+b$ وهو المطلوب إثباته

برهان الجزء (ب) يترك كتمرين .

٤ — ٥ نظرية . إذا كانت a ، b أى عنصرين من R ، فإن

(أ) $a \cdot 0=0$ (ب) $-a=(-1)\cdot a$

(ج) $-(a+b)=(-a)+(-b)$ (د) $-(-a)=a$

(هـ) $(-1)\cdot(-1)=1$

البرهان . (أ) من (M3) ، نعرف أن $a . 1 = a$. إذن

$$a+a\cdot 0=a\cdot 1+a\cdot 0=a\cdot(1+0)$$
$$=a\cdot 1=a$$

إذا استخدمنا نظرية ٤ — ٢ (أ) فنستدل أن $a . 0 = 0$.

(ب) من الواضح أن

$$a+(-1)\cdot a=1\cdot a+(-1)\cdot a=(1+(-1))\cdot a$$
$$=0\cdot a=0$$

وينتج من نظرية ٤ — ٣ (أ) أن $(-1) . a = -a$

(ج) لدينا

$$-(a+b)=(-1)\cdot(a+b)=(-1)\cdot a+(-1)\cdot b$$
$$=(-a)+(-b)$$

(د) من (A4) يكون $(-a)+a=0$ وبما أن الحل الوحيد حسب نظرية ٤ — ٣ (أ) فينتج أن $a = -(-a)$.

(هـ) فى جزء (ب) ، نعوض $a = -1$. فيكون

$$-(-1)=(-1)\cdot(-1)$$

إذن المطلوب ينتج من الجزء (د) بوضع $a = 1$. وهو المطلوب إثباته

٤ – ٦ نظرية. (أ) إذا كانت $a \in \mathbf{R}$ ، $a \neq 0$ فإن $1/a \neq 0$ ، $1/(1/a) = a$.

(ب) إذا كانت $a, b \in \mathbf{R}$ ، $a . b = 0$ فإنه إما $a = 0$ أو $b = 0$.

(ج) إذا كانت $a, b \in \mathbf{R}$ فإن $(-a) . (-b) = a . b$

(د) إذا كانت $a \in \mathbf{R}$ ، $a \neq 0$ فإن $1/(-a) = -(1/a)$.

البرهان . (أ) إذا كانت $a \neq 0$ ، فإن $1/a \neq 0$ لأنه خلاف ذلك $1 = a . (1/a)$ $= a . 0 = 0$ وهذا يخالف (M3) وبما أن $(1/a) . a = 1$ فيتبع من نظرية ٤–٣(ب) أن $a = 1/(1/a)$.

(ب) نفرض أن $a . b = 0$ وأن $a \neq 0$ بالضرب فى $1/a$ نحصل على

$$b = 1 \cdot b = ((1/a) \cdot a) \cdot b = (1/a) \cdot (a \cdot b)$$
$$= (1/a) \cdot 0 = 0.$$

وتعليل مشابه عند $b \neq 0$.

(ج) من نظرية ٤ – ٥ ، يكون $-a = (-1) . a$ ، $-b = (-1) . b$ إذن

$$(-a) \cdot (-b) = ((-1) \cdot a) \cdot ((-1) \cdot b)$$
$$= (a \cdot (-1)) \cdot ((-1) \cdot b)$$
$$= a \cdot ((-1) \cdot (-1)) \cdot b = a \cdot 1 \cdot b$$
$$= a \cdot b.$$

(د) إذا كانت $a \neq 0$ ،فإن $1/a \neq 0$ ، $-a \neq 0$. بما أن $a . (1/a) = 1$ ، ينتج من الجزء (ج) أن $(-a) . [-(1/a)] = 1$. إذا استعملنا نظرية ٤–٣ (ب) نستنتج أن $1/(-a) = -(1/a)$. وهو المطلوب إثباته

الأعداد الجذرية (المنقطة) :

من الآن سوف لا نستعمل النقطة لتشير إلى الضرب ونكتب $a\,b$ لأجل $a . b$. وكالمعتاد سنكتب a^2 لأجل aa ، a^3 لأجل $aaa = (a^2)a$، وإذا كانت $n \in \mathbf{N}$ فنعرف $a^{n+1} =$ $(a^n)a$ وينتج باستخدام الاستنتاج الرياضى أنه إذا كانت $m, n \in \mathbf{N}$ فإن

$$a^{m+n} = a^m a^n \qquad (*)$$

لأى $a \in \mathbf{R}$. بالمثل سنكتب ٢ لأجل ١ + ١ ، ٣ لأجل $2 + 1 = (1 + 1) + 1$ وهكذا . وبالإضافة إلى ذلك سنكتب عادة $b - a$ بدلا من $(-a) + b = b + (-a)$ وإذا كانت $a \neq 0$ ، عادة سنكتب

$$\frac{b}{a} \quad \text{أو} \quad b/a$$

بدلا من $(1/a) \, . \, b = b \, . \, (1/a)$. وأيضاً سنكتب a^{-1} لأجل $1/a$ ، a^{-n} لأجل $1/a^n$. ويمكن توضيح أن الصيغة $(*)$ السابقة صحيحة عندما $m, n \in Z$ بفرض أن $a \neq 0$.

عناصر R التي على الصورة

$$\frac{b}{a} \quad \text{أو} \quad \frac{-b}{a}$$

عندما $a, \, b \in N, \; a \neq 0$ يقال إنها أعداد قياسية أو جذرية أو منطقة وفئة كل الأعداد القياسية فى R سيرمز لها بالرمز Q القياسى . كل العناصر فى R التى ليست أعداداً قياسية يقال إنها أعداد غير قياسية . ومع أن هذا التعبير غير حسن لكنه قياسى وسنختاره .

وسنختم هذا الباب ببرهان الحقيقة التى تقول إنه لا يوجد عدد قياسى مربعه ٢ .

٤ – ٧ نظرية . لايوجد عدد قياسى r بحيث أن $r^2 = 2$.

البرهان . نفرض على العكس أن $(p/q)^2 = 2$، حيث p ، q أعداد صحيحة يمكننا بدون فقد العمومية أن نفرض أن p ، q ليس بينهما عامل مشترك صحيح (لماذا ؟) وبما أن $p^2 = 2q^2$ فينتج من ذلك أن p يجب أن تكون عدداً زوجياً صحيحاً (لأنه إذا كانت $p = 2k+1$ فردية فإن $p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ تكون فردية) أى إن $p = 2k$ لعدد صحيح ما k وحينئذ $4k^2 = 2q^2$ ومن ذلك ينتج أن $q^2 = 2k^2$ ومن ثم q يجب أن تكون أيضاً زوجية . وإذن كلا من p ، q يقبل القسمة على 2 وهذا عكس فرضنا .

وهو المطلوب إثباته

تمرينات :

٤ – (أ) أثبت جزء (ب) من نظرية ٤ – ٢ .

٤ – (ب) أثبت جزء (ب) من نظرية ٤ – ٣ .

٤ – (ج) أثبت جزء (ج) من نظرية ٤ – ٤ .

٤ – (د) باستخدام الاستنتاج الرياضى . وضح أنه إذا كانت $a \in R$ ، $m, n \in N$ فإن
$a^{m+n} = a^m a^n$

٤ – (هـ) وضح أنه إذا كانت $a \in R$ ، $a \neq 0$ ، $m, n \in Z$ فإن $a^{m+n} = a^m a^n$

٤ –(و) استخدم البحث المذكور فى نظرية ٤ – ٧ لتوضيح أنه لايوجد عدد قياسى s بحيث أن $s^2 = 6$.

٤ –(ز) أجر تعديلا فى برهنة نظرية ٤– ٧ لتوضح أن لايوجد عدد قياسى t بحيث أن $t^2 = 3$.

٤ – (ح) إذا كانت $\xi \in R$ غير قياسية $r \in R, r \neq 0$ قياسية فوضح أن $\xi + r$ ، $r\xi$ غير قياسيين .

الباب الخامس ــ الخواص المرتبة للفئــة R :

الغرض من هذا الباب هو إدخال أهمية الخواص المرتبة للمقدار R والتى ستلعب دوراً مهماً فى الأبواب القادمة . وأبسط الطرق لتصور الرتبة هو الاستفادة من تصور « الإيجابية الدقيقة أو الإيجابية المضبوطة » والتى سنشرحها .

٥ – ١ الخواص المرتبة للمقدار R . يوجد فئة جزئية غير خالية P من R تسمى الفئة للأعداد الحقيقية الموجبة الدقيقة وهى تحقق هذه الخواص .

(i) إذا كانت b و a تنتمى إلى P فإن $a + b$ تنتمى إلى P .

(ii) إذا كانت b و a تنتمى إلى P فإن ab تنتمى إلى P .

(iii) إذا كانت a تنتمى إلى R فتتحقق بالضبط واحدة من العلاقات الآتية :

الشرط (iii) أحياناً يسمى خاصية واحدة من ثلاث . وهى تعنى أن الفئة $N = \{-a : a \in P\}$ ، أحياناً تسمى الفئة للأعداد الحقيقية السالبة المضبوطة التى ليس لها عناصر مشتركة مع P . وفى الحقيقة الفئة الكلية R هى اتحاد الفئات الثلاث غير المتصلة وهى $P, \{0\}, N$.

٥ – ٢ تعريف . إذا كانت $a \in P$ فنقول إن a عدد حقيقى موجب مضبوط ونكتب $a > 0$ وإذا كانت a إما فى P أو صفراً ، فنقول إن a هى a عدد حقيقى موجب ويكتب $a \geq 0$ وإذا كانت $-a \in P$ فنقول إن a عدد حقيقى سالب مضبوط ويكتب $a < 0$ ، وإذا كانت a إما فى P أو صفراً فنقول إن 0 عدد حقيقى سالب ويكتب $a \leq 0$.

ومن الملاحظ – طبقاً لما قدم من مصطلحات – أن الرقم 0 يكون إما موجباً أو سالباً ، وهو العدد الوحيد الذى له هذه المنزلة المزدوجة . وهذا الاصطلاح ربما يبدو فى الأول غريباً ولكنه سيثبت أنه ملائم ببعض المؤلفين يحتفظون بالتغيير « موجب» لعناصر الفئة P ويستعملون التعبير « ليس سالباً » لعناصر الفئة $P \cup \{0\}$.

الآن نقدم العلاقات المرتبة .

٥ — ٣ تعريف . بفرض أن b و a عنصران من $\mathbf{R}$ وإذا كانت $a-b\in P$ فإننا نكتب $a>b$ ، وإذا كانت $-(a-b)\in P$ فإننا نكتب $a<b$ ، وإذا كانت $a-b\in P\cup\{0\}$ فإننا نكتب $a\geq b$ ، وإذا كانت ، $-(a-b)\in P\cup\{0\}$ فإننا نكتب $a\leq b$.

وكالمعتاد ، من المناسب غالباً إبعاد الإشارة ونكتب

$$b<a,\qquad b>a,\qquad b\leq a,\qquad b\geq a$$

على الترتيب وبالإضافة إلى ذلك إذا كانت $b<a$ ، $b<c$ ، فحينئذ غالباً نكتب .

$$a<b<c \quad \text{أو} \quad c>b>a$$

وإذا كانت $a\leq b$ ، $b<c$ ، فحينئذ غالباً نكتب

$$a\leq b<c \quad \text{أو} \quad c>b\geq a$$

خواص الرتبة :

الآن ستكون الخواص الأساسية لعلاقة الرتبة فى $\mathbf{R}$. هذه الخواص هى القوانين المألوفة للمتباينات التى قابلها القارىء فى مناهج سابقة ، وهذه ستستعمل بكثرة فى الأبواب القادمة ولها أهمية كبرى .

٥ — ٤ نظرية . بفرض أن a, b, c عناصر من $\mathbf{R}$ ، فإن

(أ) إذا كانت $a>b$ ، $b>c$ فإن $a>c$.

(ب) تتحقق بالضبط واحدة من الآتى $a<b$ ، $a=b$ ، $a>b$.

(ج) إذا كان $a\geq b$ ، $b\geq a$ فإن $a=b$.

البرهان . (أ) إذا كانت $a-b$ ، $b-c$ تنتمى إلى P ، فإنه من ٥ — ١ (i) ينتج أن $a-c=(a-b)+(b-c)$ أيضاً تنتمى إلى P . إذن $a>c$.

(ب) من ٥ — ١ (iii) يتحقق الضبط واحد من الاحتمالات الآتية :

$$a-b\in P,\quad a-b=0,\quad b-a=-(a-b)\in P$$

(ج) إذا كانت $a\neq b$ فن الجزء (ب) يجب أن يكون لدينا إما $a-b$ أو $b-a$ فى P . إذن إما $a>b$ أو $b>a$ وفى أى حالة واحدة من الفروض حدث له مناقضة .

وهو المطلوب إثباته

٥ – ٥ نظرية . (أ) إذا كانت $0 \neq a \in \mathbf{R}$ ، فإن $a^2 > 0$.

(ب) $1 > 0$.

(ج) إذا كانت $n \in \mathbf{N}$ ، فإن $n > 0$.

البرهان . (أ) إما a أو a – ينتمى إلى P . إذا كانت $a \in P$ فإنه من ٥–١ (ii) يكون $a^2 = aa \in P$ ، وإذا كانت $-a \in P$ ، فإنه من نظرية ٤ – ٧ (ج) يكون $a^2 = (-a)(-a) \in P$. إذن فى أى حالة $a^2 \in P$.

(ب) بما أن $1 = (1)^2$ ، الاستنتاج ينتج من (أ) .

(ج) نستعمل الاستنتاج الرياضى ، وصحة الفرض عند $n = 1$ هو جزء (ب) إذا كان ذلك صحيحاً للعدد الطبيعى k (أو بمعنى آخر نفرض أن $k \in P$) وبما أن $1 \in P$ فينتج من ٥–١ (i) أن $k+1 \in P$ ، إذن الفرض صحيح لكل الأعداد الطبيعية .

وهو المطلوب إثباته

الخواص الآتية من المحتمل أن تكون مألوفة للقارىء .

٥ – ٦ نظرية . بفرض d و c و b و a عناصر من $\mathbf{R}$ فإن :

(أ) إذا كان $a > b$ فإن $a+c > b+c$

(ب) إذا كان $a > b$ و $c > d$ فإن $a+c > b+d$

(جـ) إذا كان $a > b$ و $c > 0$ فإن $ab > bc$.

(جـ/) اذا كان $a > b$ و $c < 0$ فان $ac < bc$.

(د) إذا كان $a > 0$ فإن $1/a > 0$.

(د/) إذا كان $a < 0$ فان $1/a < 0$.

البرهان . (أ) لاحظ أن $(a+c)-(b+c) = a-b$

(ب) إذا كانت $a-b$ ، $c-d$ تنتمى إلى P ، إذن من ٥ – ١ (i) نستنتج أن $(a+c)-(b+d) = (a-b)+(c-d)$ تنتمى إلى P .

(جـ) إذا كانت $a-b$ ، c تنتمى إلى P ، فإنه من ٥ – ١ (ii) تكون $ac - bc = (a-b)c$ أيضاً تنتمى إلى P .

(جـ/) إذا كانت $a-b$ ، $-c$ تنتمى إلى P ، فإنه من ٥ – ١ (ii) $b\,c - a\,c = (a-b)(-c)$ أيضاً تنتمى إلى P .

(د) إذا كانت $a > 0$ ، فإن من ٥–١ (iii) $a \neq 0$ بحيث أن العنصر $1/a$ موجود . وإذا كانت $1/a = 0$ فإن $1 = a\,(1/a) = 0$ وهذا تناقض . وإذا كانت $1/a < 0$ فإن جزء (جـ) حيث $c = 1/a$ يدل على أن $1 = a\,(1/a) < 0$ وهذا تناقض مع ٥ – ٥ (ب) . لذلك يجب أن يكون لدينا $1/a > 0$ لأن الإمكانيتين الآخرتين قد استبعدتا .

(دَ) هذه يمكن برهنتها بطريقة مشابهة البرهان فى (د) أو مباشرة يمكن استحضار نظرية ٤ – ٦ (د) واستخدام (د) مباشرة .

وهو المطلوب إثباته

٥ – ٧ نظرية . إذا كان $a > b$ ، فإن $a > \frac{1}{2}(a+b) > b$

البرهان . بما أن $a > b$ فمن نظرية ٥ – ٦ (أ) بأخذ $c = a$ ينتج أن $2a > a + b$ ومن نظرية ٥ – ٦ (أ) بأخذ $c = a$ ينتج أن $a + b > 2b$ ومن نظرية ٥ – ٥ (ج) نعرف أن $2 > 0$ ومن نظرية ٥ – ٦ (د) نعرف أن $\frac{1}{2} > 0$. وباستخدام نظرية ٥ – ٦ (ج) بأخذ $c = \frac{1}{2}$ ، نستنتج أن $a > \frac{1}{2}(a+b)$ ، $\frac{1}{2}(a+b) > b$. إذن $a > \frac{1}{2}(a+b) > b$
وهو المطلوب إثباته

والنظرية التى برهنت حالا (عند $b = 0$) تدل على أنه لأى عدد موجب مضبوط معطى وليكن a ، يوجد عدد مضبوط موجب أصغر (يسمى $\frac{1}{2}a$) أى إنه لا يوجد عدد موجب حقيق مضبوط بحيث يكون أصغر ما يمكن .

قد رأينا من قبل أنه إذا كانت $a > 0$ ، $b > 0$ ، فإن $ab > 0$ وأيضاً إذا كانت $a < 0$ ، $b < 0$ فإن $ab > 0$. سنوضح الآن أن العكس صحيح .

٥ – ٨ نظرية . إذا كانت $ab > 0$ فإن إما $a > 0$ ، $b > 0$ وإما $a < 0$ ، $b < 0$.

البرهان . إذا كانت $ab > 0$ فإن $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ (لماذا ؟) . وإذا كانت $a > 0$ ، فإنه من نظرية ٥–٦ (د) نستدل على أن $1/a > 0$ ومن ٥ – ٦ (ج) نجد أن

$$b = ((1/a)\,a)\,b = (1/a)(ab) > 0$$

وبمعنى آخر إذا كانت $a < 0$ فينتج من نظرية ٥ – ٦ (د/) أن $1/a < 0$ ومن ٥ – ٦ (جـ/) نجد أن $b = ((1/a)a)b = (1/a)(ab) < 0$. وهو المطلوب إثباته .

٥ – ٩ نتيجة . إذا كانت $ab < 0$ فإنه إما $a > 0$ ، $b < 0$ أو $a < 0$ ، $b > 0$.

البرهان يترك كتمرين .

القيمة المطلقة :

الخاصية واحد من ثلاث المذكورة فى ٥ — ١ (iii) تؤكد أنه إذا كانت $a \neq 0$ فإن واحدا من الرقمين a ، $-a$ موجب مضبوط . القيمة المطلقة للمقدار $a \neq 0$ يعرف بأنه واحد موجب مضبوط من الزوج $\{a, -a\}$ ، والقيمة المطلقة للصفر تعرف بأنها تكونصفراً .

٥ — ١٠ **تعريف** . إذا كانت $a \in R$ فإن القيمة المطلقة للمقدار a يرمز لها بالرمز $|a|$ ويعرف بالآتى :

$|a| = a$ إذا كانت $a \geq 0$.

$= -a$ إذا كانت $a < 0$.

أى إن نطاق الدالة المطلقة القيمة هو كل الفئة R ، ومداه هو $P \cup \{0\}$ ويرسم العنصران $a, -a$ إلى نفس العنصر .

٥ — ١١ **نظرية** . (أ) $|a| = 0$ إذا وإذا فقط إذا كانت $a = 0$.

(ب) $|-a| = |a|$ لجميع $a \in R$

(ج) $|ab| = |a|\,|b|$ لكل $a, b \in R$

(د) إذا كانت $c \geq 0$ فإن $|a| \leq c$ إذا وإذا فقط $-c \leq a \leq c$.

(هـ) $-|a| \leq a \leq |a|$ لكل $a \in R$

البرهان . (أ) إذا كانت $a = 0$ فإنه من التعريف $|0| = 0$ ، وإذا كانت $a \neq 0$ فإنه أيضاً $-a \neq 0$ أى إن $|a| \neq 0$.

(ب) إذا كانت $a = 0$ فإن $|0| = 0 = |-0|$ ، وإذا كانت $a > 0$ فإن $|a| = a = |-a|$ ، وإذا كانت $a < 0$ فإن $|a| = -a = |-a|$.

(جـ) إذا كانت $a > 0$ ، $b > 0$ فإن $ab > 0$ ومن ثم $|ab| = ab = |a|\,|b|$ ، وإذا كانت $a < 0$ ، $b > 0$ فان $ab < 0$ وينتج $|ab| = -(ab) = (-a)b = |a|\,|b|$ والحالات الأخرى يمكن معالجتها بنفس الطريقة .

(د) إذا كانت $|a| \leq c$ ، فإن كلا من $a \leq c$ و $-a \leq c$ — (لماذا ؟) وكما سبق ومن نظرية ٥ — ٦ (ج /) نستنتج أن $-c \leq a$ — ومن ثم $-c \leq a \leq c$ — والعكس ، إذا كانت هذه العلاقة صحيحة فإن كلا من $a \leq c$ و $-a \leq c$ — مما يثبت أن $|a| \leq c$.

(هـ) استخدم جزء (د) عند $c = |a| \geq 0$ وهو المطلوب إثباته .

النتيجة القادمة ستستخدم كثيرا فيا ينجم عن ذلك . (تذكر أن $a \pm b$ تعنى كلا من $a + b$ و $a - b$) .

٥ – ١٢ متباينة المثلث . إذا كانت b و a أى عددين حقيقيين ، فإن

$$\big||a|-|b|\big| \le |a \pm b| \le |a|+|b|$$

البرهان . طبقاً لنظرية ٥ – ١١ (هـ) نجد أن $-|a| \le a \le |a|$ ، $-|b| \le \pm b \le |b|$ وباستخدام ٥ – ٦ (ب) نستنتج أن

$$-(|a|+|b|) = -|a|-|b| \le a \pm b \le |a|+|b|$$

من نظرية ٥–١١ (د) ينتج أن $|a \pm b| \le |a|+|b|$ مما يثبت الجزء الثانى من المتباينة .

وبما أن $|a| = |(a-b)+b| \le |a-b|+|b|$ (لماذا ؟) ينتج أن $|a|-|b| \le |a-b|$. وبالمثل $|b|-|a| \le |a-b|$ (لماذا ؟) بضم هاتين المتباينتين نستنتج أن $\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$ التى هى الجزء الأول من المتباينة بعلامة سالبة . للحصول على المتباينة بعلامة موجبة نضع $-b$ بدلا من b . وهو المطلوب إثباته

٥ – ١٣ نتيجة : إذا كانت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ أى أعداد حقيقية عددها n فإن

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \le |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

البرهان : إذا كانت $n = 2$ ، فالاستنتاج هو ٥ – ١٢ تماماً ، فإذا كانت $n > 2$ فنستخدم طريقة الاستنتاج الرياضى وكذلك الحقيقة التى تقول إن

$$|a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}| = |(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}|$$
$$\le |a_1+a_2+\cdots+a_k|+|a_{k+1}|$$

وهو المطلوب إثباته

تمرينات :

٥ – (أ) إذا كانت $a, b \in \mathbf{R}$ ، $a^2+b^2=0$ فبين أن $a = b = 0$.

٥ – (ب) إذا كانت $n \in \mathbf{N}$ فوضح أن $n^2 \ge n$ وحينئذ $1/n^2 \le 1/n$.

٥ – (ج) إذا كانت $a > -1, a \in \mathbf{R}$ فوضح أن $(1+a)^n \ge 1+na$ لكل $n \in \mathbf{N}$.
هذه المتباينة تسمى متباينة برنويل(*) (إرشاد : استعمل الاستنتاج الرياضى) .

٥ – (د) إذا كانت $c > 1, c \in \mathbf{R}$ فوضح أن $c^n \ge c$ لجميع $n \in \mathbf{N}$.
(إرشاد : $c = 1+a$ عندما $a > 0$) .

(*) چاكوب برنويل (١٦٥٤ – ١٧٠٥) من أسرة سويسرية التى أنتجت عدة رياضيين الذين لهم فضل فى تطوير علم التفاضل والتكامل .

• — (هـ) إذا كانت $c>1, c\in R$ فوضح أن $c^m \geq c^n$ عند $m \geq n,\ m, n \in N$

• — (و) بفرض أن $0<c<1$ وإذا كانت $m \geq n,\ m, n \in N$ فوضح أن $0 < c^m \leq c^n < 1$.

• — (ز) وضح أن $n < 2^n$ لجميع $n \in N$ ومن ثم $1/2^n < 1/n$ لكل $n \in N$

• — (ح) إذا كانت a ، b عددين حقيقيين موجبين ، $n \in N$ فإن $a^n<b^n$ إذا وإذا فقط كانت $a<b$.

• — (ط) بين أى إذا كانت $a \leq x \leq b$ ، $a \leq y \leq b$ فإن $|x-y| \leq b-a$. فسر ذلك هندسياً .

• — (ى) بفرض $\delta>0,\ a\in R$. وضح أن $a-\delta<x<a+\delta$ إذا وإذا فقط ، $|x-a|<\delta$ وبالمثل $a-\delta \leq x \leq a+\delta$ إذا وإذا فقط $|x-a| \leq \delta$.

• — (ك) إذا كانت $a, b \in R$ ، $b \neq 0$ فبين أن $|a/b|=|a|/|b|$.

• — (ل) وضح إذا كانت $a, b \in R$ فإن $|a+b|=|a|+|b|$ إذا وإذا فقط $ab \geq 0$.

• — (م) ارسم رسما تخطيطيا (رسم مجمل) للنقط (x,y) فى المستوى $R\times R$ حيث $|x|=|y|$

• — (ن) ارسم رسما تخطيطياً (رسم مجمل) للنقط (x, y) فى المستوى $R\times R$ حيث $|x|+|y|=1$

• — (س) إذا كانت x, y, z تنتمى إلى R فإن $x \leq y \leq z$ إذا وإذا فقط $|x-y|+|y-z|=|x-z|$.

• — (ع) إذا كانت $0<a<1$ فإن $0<a^2<a<1$ بينما إذا كانت $1<a$ فان $1<a<a^3$.

الباب السادس ــ خاصية الاتمام او الاكمال للمقدار R :

فى هذا الباب سنقدم خاصية إضافية لنظام العدد الحقيقى التى تسمى غالباً « خاصية الإتمام » حيث تضمن وجود العناصر فى R عند تحقيق فروض معينة . يوجد روايات أو تحويلات كثيرة لخاصية التتام أو الإتمام ولكن سنختار هنا إعطاء الطريقة الأكثر فاعلية مفترضين أن الفئات المحدودة فى R محدودة من أعلى .

الأعلى والأدنى :

الآن سنقدم تصوراً للحد الأعلى لفئة أعداد حقيقية . وهذه الفكرة لها أهمية قصوى فى الأبواب القادمة .

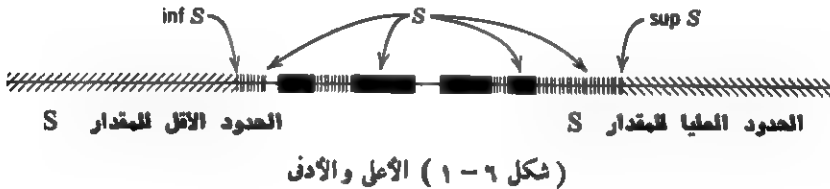
٦ – ١ تعريف . بفرض S فئة جزئية من $\boldsymbol{R}$.

(أ) عنصر $u \in \boldsymbol{R}$ يقال إنه حد أعلى للفئة الجزئية S إذا كانت $s \leq u$ لكل $s \in S$

(ب) عنصر $w \in \boldsymbol{R}$ يقال إنه حد أسفل للفئة الجزئية S إذا كانت $w \leq s$ لكل $s \in S$

نلاحظ أن فئة جزئية $S \subseteq \boldsymbol{R}$ ربما ليس لها حد أعلى (مثال ذلك عند أخذ $S = \boldsymbol{R}$. لكن إذا كانت لها حد أعلى واحد فحينئذ يكون لها عدد لا نهائى (لأنه إذا كانت u حداً أعلى للفئة S فحينئذ $u + n$ هو أيضاً حد أعلى للفئة S لأى $n \in \boldsymbol{N}$) . ومرة أخرى الفئة $S_1 = \{x \in \boldsymbol{R} : 0 < x < 1\}$ الحد الأعلى لها هو واحد صحيح ، وفى الحقيقة ، أى عدد $u \geq 1$ هو حد أعلى للفئة S_1 . وبالمثل الفئة $S_2 = \{x \in \boldsymbol{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ لها نفس الحد الأعلى مثل S_1 . لاحظ أن S_2 تحتوى الحد الأعلى الذى قيمته واحد صحيح بينما S_1 لا يحتوى أيا من حدوده العليا (لماذا لا يمكن لعدد مثل $c < 1$ أن يكون حداً أعلى للفئة S_1 ؟) .

ولتوضيح أن عددا $u \in \boldsymbol{R}$ لا يكون حداً أعلى للمقدار $S \subseteq \boldsymbol{R}$ يجب أن توجد عنصرا $s_0 \in S$ بحيث أن $u < s_0$. فإذا كانت $S = \emptyset$ أى الفئة الخالية فلا يمكن عمل هذا . وبناء عليه تكون الفئة الخالية لها خاصية غريبة وغير عادية وهى أن أى عدد حقيقى هو حد أعلى وأيضاً أى عدد حقيقى هو حد أدنى للفئة الخالية $\emptyset$. وهذا ربما يكون غير طبيعى ولكنه نتيجة منطقية لتعاريفنا ولذلك يجب أن نقبله .



(شكل ٦ – ١) الأعلى والأدنى

وكاصطلاح ، عندما يكون للفئة حد أعلى نقول إنها محدودة من أعلى وعندما يكون الفئة حد أدنى نقول إنها محدودة من أسفل . وإذا كانت الفئة لها كل من الحد الأعلى والحد الأدنى فنقول إنها محدودة . وإذا كانت الفئة ينقصها إما الحد الأعلى أو الحد الأدنى فنقول إنها غير محدودة . إذن S_1 ، S_2 السابقتان كليهما محدودتان . كيفما كان فإن الفئة الجزئية $P = \{x \in \boldsymbol{R} : x > 0\}$ للفئة $\boldsymbol{R}$ غير محدودة لأنها ليس لها حداً أعلى . وبالمثل الفئة $\boldsymbol{R}$ غير محدودة لأنه ليس لها إما حد أعلى أو حد أدنى .

٦ – ٢ تعريف . نفرض أن S هى فئة جزئية من $\boldsymbol{R}$.

(أ) إذا كانت S محدودة من أعلى فحينئذ يقال الحد الأعلى من S أنه الأعلى (أو أقل حد أعلى) من S إذا كان أقل من أى حد أعلى آخر من S .

(ب) إذا كانت S محدودة من أسفل فحينئذ يقال الحد الأدنى من S أنه الأدنى (أو أكبر حد أدنى) من S إذا كان أكبر من أى حد أدنى آخر من S .

(انظر الشكل ٦ – ١) .

وبتعبير مختلف ، عدد $u \in R$ هو الأعلى من الفئة الجزئية S للفئة R إذا حقق الشرطان الآتيان :

(i) $s \leq u$ لـكل $s \in S$

(ii) إذا كانت v أى عدد بحيث $s \leq v$ لـكل $s \in S$ فإن $u \leq v$. وفى الحقيقة الشرط (i) يجعل u حداً أعلى من S ، والشرط (ii) يوضح أن u أقل من أى حد أعلى آخر من S .

ومن الواضح أنه يوجد فقط أعلى وحيد للفئة الجزئية S من R لأنه إذا كانت u_1 ، u_2 هما أعليان للفئة الجزئية S فحينئذ يكونان معاً حدين علويين للفئة الجزئية S وبما أن u_1 هو أعلى الفئة الجزئية S ، u_2 هو الحد الأعلى للفئة الجزئية S فيجب أن يكون $u_1 \leq u_2$ وبطريقة مماثلة يمكن توضيح أن $u_2 \leq u_1$. ونتيجة لذلك يكون $u_1 = u_2$. وبنفس الطريقة يمكن أن نوضح أنه يوجد فقط أدنى وحيد للفئة الجزئية S من R . وسوف نرمز لها بالآتى :

أعلى S ، أدنى S .

ومن المناسب غالباً أن نعرف خاصية أخرى لأعلى الفئة الجزئية من R .

٦ – ٣ مفترض . العدد $u \in R$ هو الأعلى لفئة جزئية غير خالية $S \subseteq R$ إذا وإذا فقط له الخواص الآتية :

(i) لا يوجد عناصر $s \in S$ حيث $u < s$.

(ii) إذا كانت $v < u$ ، فحينئذ يوجد عنصر $s_0 \in S$ بحيث أن $v < s_0$.

البرهان . نفرض أن u تحقق (i) ، (ii) . الشرط (i) يدل على أن u حد أعلى للفئة S . إذا كانت v أى عدد حيث $v < u$ ، حينئذ خاصية (ii) توضح أن v لا يمكن أن تكون حداً أعلى للفئة S . إذن u هو أعلا للفئة S .

وبالعكس ، تفرض أن u هى حد أعلى للفئة S . وحيث إن u هى الحد الأعلى للفئة S فشرط (i) يتحقق . وإذا كانت $v < u$ فحينئذ v لا تكون حداً أعلى للفئة S . لذلك يوجد عنصر $s_0 \in S$ بحيث إن $v < s_v$.

وهو المطلوب إثباته .

ويجب أن يقنع القارىء نفسه بأن العدد 1 هو الأعلى لكلتا الفئتين S_1 ، S_2 المعرفتين بعد تعريف ٦ — ١ . نلاحظ أن S_2 تحتوى أعلاها ولكن S_1 لا تحتوى أعلاها . أى إنه عند قولنا أن فئة لها أعلى فليس هناك نص على كون الفئة تحتوى أعلاها كعنصر فيها أم لا .

الخاصية الأساسية والعميقة لنظام العدد الحقيقى هى : كل فئة جزئية غير خالية للفئة R ومحدودة من فوق يوجد لها أعلى . وسنستخدم استعمالا هاماً ومتكرراً لهذه الخاصية التى هى آخر فرض لنا عن R .

٦ — ٤ خاصية العلو . كل فئة أعداد حقيقية وغير خالية ومحدودة من فوق لها أعلى .

والخاصية المناظرة الأدنى يمكن تكوينها من خاصية العلو بسهولة .

٦ — ٥ خاصية الأدنى . كل فئة أعداد حقيقية وغير خالية ولها حد أسفل يكون لها أدنى .

البرهان . نفرض أن S محدودة من أسفل وبفرض $S_1 = \{-s : s \in S\}$ بحيث إن S_1 محدودة من أعلى . خاصية العلو تؤكد أن S_1 لها أعلى وليكن u ، وسنترك لها القارىء لتوضيح أن $-u$ هى الأدنى للفئة S .

وهو المطلوب إثباته

خاصية أرشميدس(*) :

نتيجة هامة من خاصية العلو هو أن الفئة الجزئية N للأعداد الطبيعية ليست محدودة من أعلى فى N . وبالتخصيص هنا يعنى أنه بتحديد أى عدد حقيقى x فإنه يوجد عدد طبيعى n_x بحيث يكون أكبر من x (وإلا كانت x حداً أعلى للمقدار R) . وسنبرهن هذا النص الآن :

٦ — ٦ خاصية أرشميدس . إذا كانت $x \in R$ فيوجد عدد طبيعى $n_x \in N$ بحيث أن $x < n_x$.

البرهان . إذا لم يكن الاستنتاج صحيحاً فإن x حد أعلى للمقدار N .

لذلك باستخدام خاصية العلو، نجد أن N لها أعلى مثل u . حيث x هى حد أعلى للفئة N ، فينتج أن $u \le x$. وبما أن $u - 1 < u$ فينتج من مفترض ٦ — ٣ (ii) أنه يوجد $n_1 \in N$ بحيث أن $u - 1 < n_1$. وإذن $u < n_1 + 1$ ولكن بما أن $n_1 + 1 \in N$ فهذا يخالف الفرض وهو أن u هى حداً أعلى للفئة N

(*) هذه الخاصية المقدار R تسمى باسم أرشميدس (٢٨٧–٢١٢) قبل الميلاد الذى كان يلقب بعقل العصور القديمة (خاصة الرومان واليونان) وكان واحداً من المؤسسين الطريقة العلمية .

٦ – ٧ نتيجة . إذا فرضنا أن y ، z عددان حقيقيان موجبان بالضبط فإن :

(أ) يوجد عدد طبيعى n بحيث إن $ny > z$.

(ب) يوجد عدد طبيعى n بحيث إن $0 < 1/n < z$.

(جـ) يوجد عدد طبيعى n بحيث إن $n - 1 \leq y < n$.

البرهان . (أ) بما أن y ، z موجبان بالضبط فإن $x = z/y$ هو أيضاً موجب بالضبط ، نفرض $n \in \mathbf{N}$ بحيث إن $z/y = x < n$. إذن $z < ny$ كالمطلوب .

(ب) نفرض أن $n \in \mathbf{N}$ بحيث $0 < 1/z < n$ حينئذ $0 < 1/n < z$.

(جـ) خاصية أرشميدس تؤكد وجود أعداد طبيعية m بحيث $y < m$ وإذا فرضنا أن m هى أقل عدد طبيعى كهذا (انظر باب ٣) فينتج $n - 1 \leq y < n$.

وهو المطلوب اثباته .

نلاحظ بعد نظرية ٥–٧ أنه لا يوجد أصغر عدد حقيقى موجب بالضبط . نتيجة ٦–٦(ب) توضح أنه لأى $z > 0$ يوجد عدد قياسى على الصورة $1/n$ حيث $0 < 1/n < z$. أحياناً نقول « يوجد أعداد قياسية صغيرة اختيارية على الصورة $1/n$ » .

وجود العدد $\sqrt{2}$:

صفة هامة لخاصية العلو هى أنها (كما قلنا سابقاً) تؤكد وجود أعداد حقيقية معينة . وسنستخدمها مرات عديدة بهذا المعنى . والآن سنوضح أنها تضمن وجود عدد حقيقى موجب x بحيث إن $x^2 = 2$ ، أى جذر تربيعى موجب للمقدار 2 . وهذه النتيجة تكمل نظرية ٤ – ٧ .

٦ – ٨ نظرية . يوجد عدد موجب $x \in \mathbf{R}$ بحيث إن $x^2 = 2$.

البرهان . نفرض $S = \{y \in \mathbf{R} : 0 \leq y, y^2 \leq 2\}$ ، الفئة S محدودة من أعلى بالعدد 2 لأنه إذا لم يكن كذلك فإنه يوجد عنصر $s \in S$ بحيث إن $s > 2$ ومن ذلك ينتج أن $2 \geq s^2 > 4$ أى تناقض للفرض ومن خاصية العلو يكون للفئة S أعلى وإذا فرضنا أن $x = \sup S$ فن الواضح أن $x > 0$.

وإذا زعمنا أن $x^2 = 2$ ، لأنه إذا لم يكن هذا صحيحاً فحينئذ إما $x^2 < 2$ أو $x^2 > 2$ فإذا كانت $x^2 < 2$ فنفرض أن $n \in \mathbf{N}$ قد اختيرت بحيث أن $1/n < (2 - x^2)/(2x + 1)$ وفى هذه الحالة يكون

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{2x+1}{n} < x^2 + (2 - x^2) = 2$$

وهذا معناه أن $x+1/n \in S$ أى تخالف لحقيقة أن x هى الحد الأعلى للفئة S .

إذا كانت $x^2 > 2$ ، فنختار $m \in N$ بحيث أن $1/m < (x^2 - 2)/2x$. وبما أن $x = \sup S$ يوجد $s_0 \in S$ حيث $x - 1/m < s_0$ ، لكن هذا يعنى أن

$$2 < x^2 - \frac{2x}{m} < x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2} = \left(x - \frac{1}{m}\right)^2 < s_0^2$$

إذن $s_0^2 > 2$ ، أى تخالف لحقيقة أن $s_0 \in S$.

وبما أننا قد استبعدنا إمكانية أن $x^2 < 2$ ، $x^2 > 2$ فيجب أن يكون $x^2 = 2$.
وهو المطلوب اثباته

بتعديل بسيط فى نظرية ٦ – ٨ ، يمكن للقارىء أن يوضح أنه إذا كانت $a \geq 0$ فحينئذ يوجد عدد وحيد $b \geq 0$ بحيث أن $b^2 = a$. نسمى b الجذر التربيعى الموجب للمقدار a ونرمز له بالرمز

$$b = a^{1/2} \quad \text{أو} \quad b = \sqrt{a} \; .$$

نعرف الآن أنه يوجد على الأقل عنصر واحد غير قياسى ، وهو $\sqrt{2}$ (الجذر التربيعى الموجب للمقدار 2) . وفى الحقيقة يوجد أكثر من أعداد غير قياسية عن الأعداد القياسية بمعنى (كما رأينا فى باب ٣) أن الفئة للأعداد القياسية عددية أو قابلة للعد بينما الفئة للأعداد غير القياسية غير عددية أو غير قابلة العد . وسنوضح الآن أنه يوجد أعداد غير قياسية صغيرة اختيارية وهذه النتيجة تتمم نتيجة ٦ – ٧ .

نتيجة ٦ – ٩ . بفرض $\xi > 0$ عدد غير قياسى ، وبفرض أن $z > 0$. فحينئذ يوجد عدد طبيعى m بحيث إن العدد غير القياسى ξ/m يحقق $0 < \xi/m < z$.

البرهان . بما أن $\xi > 0, z > 0$ ، فينتج من نظرية ٥ – ٦ (د) ، ٥ – ٦ (ح) أن $\xi/z > 0$. ومن خاصية أرشيدس يوجد عدد طبيعى m بحيث إن $0 < \xi/z < m$. وإذن $0 < \xi/m < z$ وتوضيح أن ξ/m غير قياسى يترك كتدريب .

وهو المطلوب إثباته

والآن سنوضح أنه بين أى عددين حقيقيين مميزين يوجد عدد قياسى وعدد غير قياسى (وفى الحقيقة يوجد عدد لا نهائى من كل نوع) .

٦ – ١٠ نظرية . بفرض x ، y عددين حقيقيين حيث $x < y$ فإن

(أ) يوجد حينئذ عدد قياسى r بحيث إن $x < r < y$.

(ب) إذا كانت $\xi > 0$ أى عدد غير قياسى فإنه يوجد عدد قياسى s بحيث إن العدد غير القياسى $s\xi$ يحقق $x < s\xi < y$.

البرهان : لا يوجد تغيير فى التعميم لفرض أن $0 < x$. (لماذا ؟)

(أ) بما أن $y - x > 0$ فينتج من نتيجة ٦ - ٧ (ب) أنه يوجد عدد طبيعى m بحيث إن $0 < 1/m < y - x$. ومن نتيجة ٦ - ٧ (أ) يوجد عدد طبيعى k بحيث إن

$$\frac{k}{m} = k\frac{1}{m} > x$$

وسنفرض أن n هو أقل عدد طبيعى كهذا فينتج أن

$$\frac{n-1}{m} \leq x < \frac{n}{m}$$

ويتضح لدينا أيضاً أن $n/m < y$ وإلا

$$\frac{n-1}{m} \leq x < y \leq \frac{n}{m}$$

والتى ينتج منها أن $y - x \leq 1/m$ ، أى تخالف لاختيار m وإذن $x < n/m < y$.

(ب) نفرض أن $0 < x < y$ ، $\xi > 0$ فيكون لدينا $x/\xi < y/\xi$. ومن جزء (أ) ، يوجد عدد قياسى s بحيث إن $x/\xi < s < y/\xi$. ولذلك $x < s\xi < y$ (وضح أن $s\xi$ غير قياسى) . وهو المطلوب إثباته

تمرينات :

٦ - (أ) أثبت أن فئة الأعداد الحقيقية غير الخالية والمحدودة لها أعلى وأدنى .

٦ - (ب) إذا كانت فئة جزئية S للفئة R لها حد علوى فحينئذ يكون هذا الحد العلوى أعلى للفئة الجزئيـة S .

٦ - (ج) اعط مثالا لفئة أعداد قياسية بحيث تكون محدودة ولكن ليس لها أعلى قياسى .

٦ - (د) اعط مثالا لفئة أعداد غير قياسية بحيث تكون لها أعلى قياسى .

٦ - (هـ) أثبت أن اتحاد فئتين محدودتين يكون محدوداً .

٦ - (و) اعط مثالا لمجموعة عددية لفئات محدودة والتى اتحادها يكون محدوداً ومثالا يكون فيه الاتحاد غير محدود .

٦ - (ز) إذا كانت S فئة محدودة فى R وإذا كانت S_0 فئة جزئية غير خالية للفئة S ، فاثبت أن

$$\inf S \leq \inf S_0 \leq \sup S_0 \leq \sup S$$

وأحياناً يكون من المناسب بدرجة كبيرة التعبير عن ذلك بطريقة أخرى .
نفرض أن $D \neq 0$ وبفرض أن $f: D \to R$ لها مدى محدود . فإذا كانت D_0 فئة جزئية غير خالية من D فإن .

$$\inf \{f(x) : x \in D\} \leq \inf \{f(x) : x \in D_0\} \leq \sup \{f(x) : x \in D_0\} \leq \sup \{f(x) : x \in D\}$$

٦ – (ح) بفرض X ، Y فئتين غير خاليتين وبفرض أن $f: X \times Y \to R$ لها مدى محدود فى R وبفرض

$$f_1(x) = \sup \{f(x, y) : y \in Y\}, \qquad f_2(y) = \sup \{f(x, y) : x \in X\}$$

كون أساس العلو المتكرر .

$$\sup \{f(x, y) : x \in X, y \in Y\} = \sup \{f_1(x) : x \in X\}$$
$$= \sup \{f_2(y) : y \in Y\}$$

أحياناً نعبر عن ذلك بالرموز كما يلى :

$$\sup_{x, y} f(x, y) = \sup_x \sup_y f(x, y) = \sup_y \sup_x f(x, y)$$

٦ – (ط) بفرض f ، f_1 كما فى التمرين السابق وبفرض

$$g_2(y) = \inf \{f(x, y) : x \in X\}$$

أثبت أن :

$$\sup \{g_2(y) : y \in Y\} \leq \inf \{f_1(x) : x \in X\}$$

وضح أن متباينة دقيقة يمكن أن تتحقق . وأحياناً نعبر عن هذه المتباينة كما يلى :

$$\sup_y \inf_x f(x, y) \leq \inf_x \sup_y f(x, y)$$

٦ – (ى) بفرض X فئة غير خالية وبفرض أن $f: X \to R$ لها مدى محدود فى R . فإذا كانت $a \in R$ وضح أن

$$\sup \{a + f(x) : x \in X\} = a + \sup \{f(x) : x \in X\},$$
$$\inf \{a + f(x) : x \in X\} = a + \inf \{f(x) : x \in X\}$$

٦ – (ك) بفرض X فئة غير خالية وبفرض أن f ، g معرفتان على X ومداهما محدود فى R أثبت أن .

$$\inf \{f(x) : x \in X\} + \inf \{g(x) : x \in X\} \leq \inf \{f(x) + g(x) : x \in X\}$$
$$\leq \inf \{f(x) : x \in X\} + \sup \{g(x) : x \in X\}$$
$$\leq \sup \{f(x) + g(x) : x \in X\}$$
$$\leq \sup \{f(x) : x \in X\} + \sup \{g(x) : x \in X\}$$

أعط أمثلة لتوضح أن كل متباينة يمكن أن تكون دقيقة .

٦ – (ل) إذا كانت $z > 0$ فوضح أنه يوجد $n \in \mathbf{N}$ بحيث إن $1/2^n < z$.

٦ – (م) عدل المعطيات المعطاة فى نظرية ٦ – ٨ لتوضح أنه إذا كانت $a > 0$ فحينئذ يوجد العدد

$$b = \sup\{y \in \boldsymbol{R} : 0 \le y, \quad y^2 \le a\}$$

وله خاصية أن $b^2 = a$. هذا العدد سيرمز له بالرمز $\sqrt{a}$ أو $a^{1/2}$ ويسمى الجذر التربيعى الموجب للمقدار a .

٦ – (ن) استخدم تمرين ٥ – ب لتوضيح أنه إذا كانت $0 < a < 1$ فحينئذ $0 < a < \sqrt{a} < 1$ بينما إذا كانت $1 < a$ فإن $1 < \sqrt{a} < a$

مشروعات(*) :

٦ – α إذا كانت a ، b عددين حقيقيين موجبين دقيقين وإذا كانت $n \in \mathbf{N}$ فقد عرفنا a^n ، b^n . فينتج بالاستنتاج الرياضى أنه إذا كانت $m, n \in \mathbf{N}$ فأن

(i) $a^m a^n = a^{m+n}$

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $(ab)^n = a^n b^n$

(iv) $a < b$ إذا وإذا فقط $a^n < b^n$.

سنختار العرف أن $a^0 = 1$ ، $a^{-n} = 1/a^n$ ، أى إننا قد عرفنا a^x للمقدار x فى $\mathbf{Z}$ وقد اختبرت حالا الخواص (iii) – (i) بأنها ما زالت قائمة .

نرغب فى تعريف a^x للأعداد القياسية x بحيث أن الخواص (iii) – (i) تتحقق . الخطوات القادمة يمكن استخدامها كوجز . وفى كل الأحوال سنفترض أن a ، b عددان حقيقيان كل منهما أكبر من الواحد الصحيح .

(*) مشروعات يقصد بها أن تكون أحياناً أكثر تحديات للقارىء ، ولكن باعتبار المشروعات تختلف فى الصعوبة . وقد وضعنا هذه (نوعا ما صعبة) الثلاث مشروعات هنا لأنها تنتمى هنا منطقياً . والقارىء فيما بعد سيرجع إليها بعد تجميع خبرة أكثر عن العلو أو الأعلى .

(أ) إذا كانت r عددا قياسياً معطى بالعلاقة $r = m/n$ حيث m ، n أعداد صحيحة ، $n > 0$. نعرف $S_r(a) = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x^n \leq a^m\}$. وضح أن $S_r(a)$ هى فئة جزئية غير خالية محدودة للفئة $\mathbf{R}$ وعرف $a^r = \sup S_r(a)$.

(ب) أثبت أن $z = a^r$ هو الجذر الموجب الوحيد للمعادلة $z^n = a^m$ إرشاد : يوجد مقدار ثابت K بحيث إنه إذا كانت $0 < \varepsilon < 1$ فإن $(1+\varepsilon)^n < 1 + K\varepsilon$. إذن إذا كانت $x^n < a^m < y^n$ فيوجد $\varepsilon > 0$ بحيث إن .

$$x^n(1+\varepsilon)^n < a^m < y^n/(1+\varepsilon)^n.)$$

(ج) أثبت أن قيمة المقدار a^r المعطى فى الجزء (أ) لا يعتمد على تمثيل r فى الصورة m/n . أيضاً وضح أنه إذا كانت r عدد صحيح موجب فإن التعريف الجديد للمقدار a^r يعطى نفس القيمة التى يعطيها التعريف القديم .

(د) وضح أنه إذا كانت $r, s \in \mathbf{Q}$ فإن $a^r a^s = a^{r+s}$ ، $(a^r)^s = a^{rs}$.

(ه) وضح أن $a^r b^r = (ab)^r$.

(و) إذا كانت $r \in \mathbf{Q}, r > 0$ فإن $a < b$ إذا وإذا فقط $a^r < b^r$.

(ز) إذا كانت $r, s \in \mathbf{Q}$ فإن $r < s$ إذا وإذا فقط $a^r < a^s$.

(ح) إذا كانت c عدد حقيقى يحقق $0 < c < 1$ ، نعرف $c^r = (1/c)^{-r}$. وضح أن الأجزاء (د) ، (ه) تظل كما هى وتظل أيضاً نتيجة مشابهة للجزء (ز) ولكن بعكس المتباينة .

٦ - β المقـدار a^x قد عرف لأعداد قياسية ونرغب فى تعريفه لمقـدار حقيقى x . ولعمل هذا نستعمل بحرية النتائج السابقة فى المشروعات . وكما سبق إذا فرضنا أن a ، b عددان حقيقيان كلا منهما أكبر من الواحد الصحيح . إذا كانت $u \in \mathbf{R}$ ، نفرض أن

$$T_u(a) = \{a^r : r \in \mathbf{Q},\ r \leq u\}$$

وضح أن $T_u(a)$ فئة جزئية غير خالية ومحدودة للفئة وعرف

$$a^u = \sup T_u(a)$$

أثبت أن هذا التعريف يعطى نفس النتيجة السابقة عندما تكون u قياسية . كون الخواص المناظرة للتقارير المعطاة فى الأجزاء (د) – (ز) للمشروع السابق . الدالة المهمة جدا التى عرفت على $\mathbf{R}$ فى هذا المشروع تسمى بالدالة الأسية (للأساس a) . بعض التعريفات المباشرة ستعطى فى الأبواب القادمة . من المناسب أحياناً أن نرمز لهذه الدالة بالرمز

$$\exp_a$$

ونرمز لقيمتها عند العـدد الحقيقى u بالرمز $\exp_a(u)$ بدلا من a^u .

٦ — ٧ باستخدام خواص الدالة الأسية التى أسست فى المشروع السابق . وضح أن $\exp_a$ دالة إدخالية نطاقها $\boldsymbol{R}$ ومداها $\{y \in \boldsymbol{R} : y > 0\}$. وتتيجة لفرضنا أن $a > 1$ فهذه الدالة الأسية تزايدية دقيقة بمعنى أن إذا كانت $x<u$ فإن $\exp_a(x) < \exp_a(u)$ ولذلك الدالة المكسية يكون لها وجود بنطاق $\{v \in \boldsymbol{R} : v > 0\}$ ، ومدى $\boldsymbol{R}$. تسمى الدالة العكسية باللوغاريتم (للأساس a) ويرمز له بالرمز

$$\log_a$$

وضح أن $\log_a$ دالة تزايدية دقيقة وأن

$\exp_a[\log_a(v)] = v$ عند $v > 0$ ، $\log_a[\exp_a(u)] = u$ عند $u \in \boldsymbol{R}$

أيضاً وضح أن $\log_a(1) = 0, \log(a)_a(a) = 1$ وأن

$\log_a(v) < 0$ عند $v < 1$ ، $\log_a(v) > 1$ عند $v > 1$.

أثبت أنه إذا كانت $v, w > 0$ فإن .

$$\log_a(vw) = \log_a(v) + \log_a(w)$$

وبالإضافة إلى ذلك إذا كانت $v > 0$ ، $x \in \boldsymbol{R}$ فإن

$$\log_a(v^x) = x \log_a(v)$$

الباب السابع — القواطع ، الفترات والفئة المائلة :

طريقة أخرى لإتمام الأعداد القياسية لحصول على $\boldsymbol{R}$ ابتكرها ديدى كيند(*) المؤسسة على فكرة « القاطع » .

٧ — ١ تعريف الزوج المرتب (A, B) لفئتين جزئيتين غير خاليتين للمقدار $\boldsymbol{R}$ يقال إنه يكون قاطعاً إذا كان $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \boldsymbol{R}$ ، $a < b$ لكل $a \in A$ ولكل $b \in B$.

وكمثال نموذجى لقاطع فى $\boldsymbol{R}$ يحصل عليه لعنصر ثابت $\xi \in \boldsymbol{R}$ بالتعريف

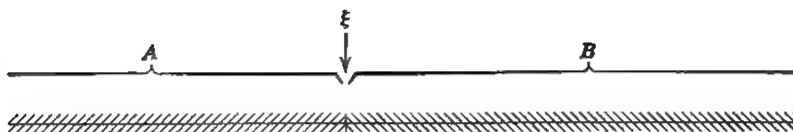
$$A = \{x \in \boldsymbol{R} : x \leq \xi\}, \qquad B = \{x \in \boldsymbol{R} : x > \xi\}$$

وبالتناوب يمكننا أخذ

$$A_1 = \{x \in \boldsymbol{R} : x < \xi\}, \qquad B_1 = \{x \in \boldsymbol{R} : x \geq \xi\}$$

(*) ريشارد ديدى كيند (١٨٣١ — ١٩١٦) كان تلميذا لجاوس . لقد أسهم فى نظرية العدد ولكن من أحسن أعماله هو تشييد نظام العدد الحقيقى .

خاصية هامة للمقدار R هى أن كل قاطع فى R يعين بعدد حقيق ما . وسنؤسس هذه الخاصيــة .



(شكل ٧ – ١) قاطع ديدى كيند

٧ – ٢ خاصية القطع (القص) . إذا كانت (A, B) قاطعاً فى R فإنه يوجد عدد وحيد $\xi \in R$ بحيث إن $a \leq \xi$ لكل $a \in A$ ، $\xi \leq b$ لكل $b \in B$.

البرهان . من الفرض تكون الفئتان A ، B غير خاليتين . أى عنصر من B هو حد أعلى للفئة A . فحينئذ A لها أعلى والذى سنرمز له بالرمز ξ . وحيث إن ξ هو حد أعلى للفئة A ، فيكون $\xi \geq a$ لكل $a \in A$.

إذا كانت $b \in B$ فمن تعريف القطع يكون $a \leq b$ لكل $a \in A$ فحينئذ b هى الحد الأعلى للفئة A وكذلك $\xi \leq b$. أى إنه أمكن إثبات وجود عدد له الخواص المعطاة فى الفرض .

لإثبات أن المقدار ξ وحيد، نفرض أن $\eta \in R$ حيث إن $a \leq \eta$ لكل $a \in A$ ، $\eta \leq b$ لكل $b \in B$. من ذلك ينتج أن η هى الحد الأعلى للمقدار A ، إذن $\xi \leq \eta$. وإذا كانت $\xi < \eta$ فحينئذ يوجد عدد $\zeta = (\xi + \eta)/2$ بحيث إن $\xi < \zeta < \eta$ الآن إما $\zeta \in A$ أو $\zeta \in B$ فإذا كانت $\zeta \in A$ فيكون لدينا تناقض الحقيقة التى تقول إن $a \leq \xi$ لكل $a \in A$ وإذا كانت $\zeta \in B$ فيكون لدينا تناقض الحقيقة التى تقول إن $\eta \leq b$ لكل $b \in B$ ولذلك يجب أن يكون $\xi = \eta$ وهو المطلوب إثباته

وبالضبط الذى عمله ديدى كيند فى الجوهر لتعريف العدد الحقيقى بأنه قاطع فى نظام العدد القياسى . وهذه العملية تمكن الفرد من تركيب مجموعة العدد الحقيقى R من الفئة Q للأعداد القياسية .

الخلايا والفترات :

إذا كانت $a \in R$ ، فإن الفئتين

$$\{x \in R : x < a\}, \qquad \{x \in R : x > a\}$$

تسمى شعاعان مفتوحان ومحددان بالمقــدار a . بالمثل الفئتان

$$\{x \in \boldsymbol{R} : x \leq a\}, \qquad \{x \in \boldsymbol{R} : x \geq a\}$$

تسمى شماعان مغلقان ومحددان بالمقدار a . النقطة a تسمى النقطة الأخيرة لهذه الأشعة . وغالبا يرمز لهذه الفئات بالرموز

$$(-\infty, a), \qquad (a, +\infty), \qquad (-\infty, a], \qquad [a, +\infty)$$

على الترتيب ، وهنا ∞ — ، ∞ + هى رموز فقط ولا يمكن اعتبارها عناصر فى $\boldsymbol{R}$.

إذا كانت $a, b \in \boldsymbol{R}$ و $a \leq b$ فحينئذ الفئة

$$\{x \in \boldsymbol{R} : a < x < b\}$$

تسمى الخلية المفتوحة المحددة بالمقدارين a ، b ويرمز لها غالباً بالرمز (a, b) . الفئة

$$\{x \in \boldsymbol{R} : a \leq x \leq b\}$$

تسمى الخلية المغلقة المحددة بالمقدارين a ، b ويرمز لها بالرمز $[a, b]$. الفئتان

$$\{x \in \boldsymbol{R} : a \leq x < b\}, \qquad \{x \in \boldsymbol{R} : a < x \leq b\}$$

تسميان بالخلايا نصف المفتوحة (أو نصف المغلقة) المحددة بالمقدارين a ، b ويرمز لهما بالرمز

$$[a, b), \qquad (a, b],$$

على الترتيب . النقطتان a ، b تسميان النقطتان النهائيتان لهذه الخلايا .

الفترة فى $\boldsymbol{R}$ يقصد بها إما شماع أو خلية أو كل $\boldsymbol{R}$. ولذلك يوجد عشرة أنواع مختلفة من الفترات فى $\boldsymbol{R}$ هى

$$\emptyset, \quad (-\infty, a), \quad (-\infty, a], \quad [a, b], \quad [a, b)$$
$$(a, b], \quad (a, b), \quad [b, +\infty), \quad (b, +\infty), \quad \boldsymbol{R}$$

حيث $a, b \in \boldsymbol{R}$ ، $a < b$. وخمس من هذه الفترات محدودة واثنين محدودة من أعلى وليست من أسفل واثنين محدودة من أسفل وليست من أعلى .

وحدة الخلية (أو وحـــدة الفترة) هى الفئة $[0, 1] = \{x \in \boldsymbol{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ ويرمز لها بالرمز القياسى $\boldsymbol{I}$.

سنقول إن المتتابعة للفترات $I_n, n \in \boldsymbol{N}$ متداخلة فى حالة تحقق سلسلة الاشتمالات الآتية .

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$$

ومن المهم أن نلاحظ أن المتتابعة المتداخلة من الفترات لا تحتاج إلى وجود نقطة مشتركة . وفى الحقيقة يكون كتدريب لتوضيح أنه إذا كانت $I_n = (n, +\infty), n \in \boldsymbol{N}$ فحينئذ

المتتابعة للفترات التى حصل عليها تكون متداخلة وليس لهـا نقطة مشتركة بالمثل إذا كانت $J_n = (0, 1/n), n \in \mathbf{N}$ فإن المتتابعة متداخلة وليس لها نقطة مشتركة .

كيفما كان فإن الخاصية الهامة للمقدار $\mathbf{R}$ هى أنه متتابعة متداخلة لخلايا مغلقة نقطة مشتركة . والآن سنبرهن هذه الحقيقة .

٧ – ٣ خاصية الخلايا المتداخلة . إذا كانت $n \in \mathbf{N}$ وبفرض أن I_n خلية مغلقة غير خالية فى $\mathbf{R}$ ونفرض أن هذه المتتابعة متداخلة بهذا التفسير

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$$

فحينئذ يوجد عنصر ينتمى إلى كل هذه الخلايا .

البرهان . نفرض أن $I_n = [a_n, b_n]$ حيث $a_n \le b_n$ لكل $n \in \mathbf{N}$ فنلاحظ أن $I_n \subseteq I_1$ لكل n وحينئذ $a_n \le b_1$ لكل n . إذن الفئة $\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ محدودة من أعلى . سنفرض أن ξ هى أعلى للفئة حينئذ $a_n \le \xi$ لكل n .

سنزعم أن $\xi \le b_n$ لكل $n \in \mathbf{N}$ فإن لم يكن فيوجد مقدار ما $m \in \mathbf{N}$ بحيث إن $b_m < \xi$ بما أن ξ هى أعلى الفئة $\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ فيجب وجود a_p بحيث إن $b_m < a_p$ الآن نفرض أن q هى أكبر العددين الطبيعيين m ، p . بما أن $a_1 \le a_2 \le .. \le a_n \le ..$ ، $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n \ge \ldots$ فإننا نستنتج أن $b_q \le b_m < a_p \le a_q$. لكن هذا يعنى أن $\xi \le b_n$ تناقص الفرض $I_q = [a_q, b_q]$ خلية مغلقة غير خالية . لذلك $\xi \le b_n$ لكل $n \in \mathbf{N}$ وحيث إن $a_n \le \xi \le b_n$، فنستنتج أن $\xi \in I_n = [a_n, b_n]$ لكل $n \in \mathbf{N}$.

وهو المطلوب إثباته

ونلاحظ أن تحت فرض ٧ – ٣ فربما يوجد أكثر من عنصر واحد مشترك . وفى الحقيقة إذا فرضنا $\eta = \inf\{b_n : n \in \mathbf{N}\}$ فيمكن – كتمرين – توضيح أن .

$$[\xi, \eta] = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} I_n$$

فئة كانتور(*) :

سنقدم الآن فئة جزئية من وحدة الخلية I وهى تعتبر شيقة وفى معظم الأحيان مفيدة فى تركيب أمثلة وأمثلة مضادة . وسنرمز لهذه الفئة بالرمز F وسنشير إليها بفئة كانتور (مع إنها أحيانا تسمى فئة كانتور الثلاثية أو عدم الاتصال لكانتور بمعنى فئة كانتور غير المستمرة) .

وأحد الطرق لوصف F هو كفئة لأعداد حقيقية فى I التى لها مفكوك ثلاثى (= الأساس 3) باستخدام الرقين 2 و 0 فقط . كيفما كان سنختار تعريفها بحدود مختلفة . والمعنى

الذى يجعلها أكثر دقة هى كون F تتكون من هذه النقط فى I التى تتبقى بعد إزالة الفترات التى تكون « الثلث الأوسط » على التعاقب .

وأكثر صراحة نجد أنه إذا أزلنا الثلث الأوسط المفتوح من I فإننا نحصل على الفئة

$$F_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1]$$

وإذا أزلنا الثلث الأوسط المفتوح لكل من الفترتين المغلقتين فى F_1 نحصل على الفئة

$$F_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1]$$

إذن F_2 هى اتحاد $(2^2 =) \ 4$ فترات مغلقة كل منها فى الصورة $[k/3^2, (k+1)/3^2]$.
ونحصل الآن على الفئة F_3 بحذف الثلث الأوسط المفتوح لكل من هذه الفئات وفى الحالة العامة نجد أنه إذا تركبت F_n بحيث تتكون من اتحاد 2^n فترات فى الصورة $[k/3^n, (k+1)/3^n]$ فحينئذ نحصل على F_{n+1} بحذف الثلث الأوسط المفتوح لكل من هذه الفترات . فئة كانتور هى التى تبقى بعد إجراء هذه العملية لكل n فى N .

٧ — ٤ تعريف . فئة كانتور F هى تقاطع الفئات F_n ، $n \in N$ الناتجة من إزالة أثلاث وسطى مفتوحة على التعاقب .

ومن لمحة أولى ربما يظهر أن كل نقطة تزال نهائياً بهذه العملية . ولكن واضح أن هذه الحالة ليست صحيحة لأن النقط $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ تنتمى إلى كل الفئات $F_n, n \in N$ ومن ثم تنتمى إلى فئة كانتور F . وفى الحقيقة يكون من السهل ملاحظة أن هناك عددا لا نهائياً من النقط فى F حتى إذا كانت F رفيعة نسبياً فى هذا الصدد . وفى الواقع ليس من الصعب أن نوضح أنه وجد عدد غير تنازلى لعناصر F وأن نقط F يمكن وضعها كتناظر أحادى مع نقط I .
أى إن الفئة F تحتوى على عدد كبير من العناصر .



(شكل ٧ — ٢) فئة كانتور

الآن سنعطى معنيين اللذين تكون فيهما F رفيعة . أولا نلاحظ أن F لا تحتوى أى فترة خالية لأنه إذا كانت x تنتمى إلى F ، (a, b) فترة مفتوحة محتوية x فإن (a, b) تحتوى بعض الأثلاث الوسطى التى أزيلت لنحصل على F (لماذا ؟) إذن (a, b) ليست فئة جزئية من فئة كانتور لكن تحتوى نقطاً كثيرة لا نهائية فى متممّها $\mathscr{C}(F)$.

المعنى الثانى الذى فيه تكون F رفيعة يرجع أو يشير للطول بينما يكون من غير الممكن تعريف الطول لفئة جزئية اختيارية للفئة R . نجد من السهل إقناع الفرد بأن F لا يمكن أن يكون لها طول موجب لأن طول F_1 هو $\frac{2}{3}$ ، وطول F_2 هو $\frac{4}{9}$. وعلى العموم طول F_n هو $(\frac{2}{3})^n$. حيث إن F هى فئة جزئية من F_n ، فلا يمكن أن يكون طولها يزيد عن F_n . حيث إن هذا يجب أن يكون صحيحاً لكل n فى N فنستنتج أن F — مع إنها غير قابلة للعد — لا يمكن أن يكون لها طول موجب .

ومن الغريب كما تبدو فئة كانتور ، نجد أن لها سلوكا منتظماً نسبياً فى أحوال كثيرة . فهى تمدنا بجزء من الفراسة إلى كيفية تكوين فئات جزئية معقدة من R . ومقدار القليل الذى تقودنا إليه بدهياً وهى أيضاً تفيد كاختبار للتصورات التى سنقدمها فى الأبواب التالية والتى دلالتها لم تدرك كلية بدلالة الفترات وفئات جزئية أولية جدا .

نماذج من R :

فى الأبواب ٤ – ٦ قدمنا R بدهياً بمعنى أننا دونا قائمة لبعض الخواص التى افترضنا وجودها . وهذا يقربنا للسؤال عما إذا كانت مثل هذه الفئة موجودة بالفعل وإلى أى درجة تكون محددة وحيدة . وبينما سوف لا نقرر هذه الأسئلة فإنه من المناسب بالتأكيد ذكر الملاحظات الآتية عليها .

وجود الفئة التى هى حقل مرتب كامل يمكن توضيحها بتركيب فعلى فإذا كان شخص له دراية كافية بالحقل القياسى Q فإنه يمكنه تعريف الأعداد الحقيقية كفئات جزئية خاصة للفئة Q ويعرف الجمع والضرب والعلاقات المرتبة بين هذه الفئات الجزئية بطريقة تمكن من الحصول على حقل مرتب كامل . ويوجد عمليتان قياسيتان لإجراء هذا إحداهما طريقة ديد كيند « للقواطع والتى تناقش فى كتاب رودن المدون فى المراجع . الطريقة الثانية هى طريقة كانتور « لمتتابعات كوشى » والتى تناقش فى كتاب هاملتون ولاندن .

وفى البند السابق أكدنا أنه من الممكن تركيب نموذج للمقدار R من Q (فى – على الأقل – طريقتين مختلفتين) . ومن الممكن أيضاً تركيب نموذج للمقدار R من الفئة N للأعداد الطبيعية

وهذا غالباً أخذ كنقطة البداية بواسطة هؤلاء مثل رونكر(*) الذين يعتبرون الأعداد الطبيعية وكأنها معطاة من الله ومهما كان ، حيث إن فئة الأعداد الطبيعية لها حذقها ودهاؤها (مثل خاصية الترتيب الأفضل) فنشعر بأن العملية الأكثر إقناعا هي أولا عملية تركيب الفئة N من تصورات مبدئية لنظرية الفئة وبعد ذلك ننشىء الفئة Z للأعداد ثم بعد ذلك نكون الحقل Q للأعداد القياسية وأخيرا الفئة R وهذه العملية ليست على الأخص صعبة فى اتباعها ويمكن استخدامها ولكنها طويلة نوعا ما . وحيث إنها مذكورة بالتفصيل فى كتاب هاملتون ولاندن فسوف لا نتعرض لها هنا .

ومن الملاحظات السابقة يكون من الواضح أن الحقول المرتبة الكاملة يمكن تكوينها بطرق مختلفة . أى إن لا يمكن أن نقول أن هناك حقلا مرتباً كاملا وحيدا . بمعنى أن جميع الطرق للتركيب السابق اقتراحها تؤدى إلى حقول مرتبة كاملة وهى حقول « متشاكلة » (هذا معناه أنه إذا كانت R_1 ، R_2 حقلين مرتبين كاملين ، حصلنا عليهما بهذه التركيبات فحينئذ يوجد راسم أحادى φ للحقل R_1 فوق R_2 بحيث إن φ (i) يرسل عنصرا قياسيا فى الحقل R_1 إلى العنصر القياسى المناظر فى الحقل R_2 ، φ (ii) ترسل $a+b$ إلى $\varphi(a)+\varphi(b)$, φ (iii) ترسل ab إلى $\varphi(a)\varphi(b)$ ، φ (iv) ترسل عنصرا موجباً فى الحقل R_1 إلى عنصر موجب فى الحقل R_2) . وفى داخل نظرية الفئات الأصلية يمكننا تقديم تدليل أو برهانا موضحين أنه أى حقلين مرتبين كاملين يكونان متشاكلين بالمعنى الذى سبق وصفه . وكون هذا التدليل يمكن صياغته فى نظام معطى للمنطق الرياضى يعتمد على قواعد الاستنتاج المستعملة فى النظام . وهكذا يكون السؤال عن الحد الذى يمكن اعتباره لنظام العدد من حيث كونه محدودا وحيدا هو نتيجة منطقية دقيقة . وكيفما كان فإن كون الحل وحيداً (أو الحاجة إليه) ليس هاماً لأغراضنا لأننا يمكننا اختيار أى حقل خاص مرتب كامل كنموذج لنا لنظام العدد الحقيقى .

تمرينات :

٧ – (أ) إذا كانت (A, B) قاطعاً فى R فوضح أن $\sup A = \inf B$.

٧ – (ب) إذا كان القاطعان (A, B) ، (A', B') يعينان العددين الحقيقيين ξ ، ξ' على الترتيب ، فوضح أن $\xi < \xi'$ تعنى أن $A \subseteq A', A \neq A'$

٧ – (ج) هل عكس التمرين السابق يكون صحيحاً ؟ .

٧ – (د) بفرض $A=\{x \in R : x \le 0$ أو $x^2 \le 2\}$ ، $B=\{x \in R : x > 0$ ، $x^2 > 2\}$ فوضح أن (A و B) قاطع فى R .

(*) ليوبولد رونكر (١٨٢٣ – ١٨٩١) درس مع ديريشلت فى برلين وكيومر فى مدينة بون وبعد تكوينه ثروة قبل أن يصل للثلاثين رجع للرياضيات . وهو معروف بعمله فى الجبر ونظرية العدد ومعارضته الشخصية لأفكار كانتور على نظرية الفئة .

٧ – (هـ) بفرض $I_n = (n, +\infty)$ عند $n \in N$ أثبت أن متتابعة الفترات متداخلة لكن لا توجد نقطة مشتركة.

٧ – (و) بفرض $J_n = (0, 1/n)$ عند $n \in N$. وضح أن هذه المتتابعة للفترات متداخلة لكن لا توجد نقطة مشتركة.

٧ – (ز) إذا كان $I_n = [a_n, b_n], n \in N,$ متتابعة متداخلة الخلايا مغلقة أثبت أن .

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_m \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

وإذا وضعنا $\xi = \sup\{a_n : n \in N\}$ ، $\eta = \inf\{b_m : m \in N\}$ فاثبت أن $[\xi, \eta] = \bigcap_{n \in N} I_n$

٧ – (ح) وضح أن كل عدد من فئة كانتور له مفكوك ثلاثي (= قاعدة 3) مستخدما فقط الرقمين 0, 2 ..

٧ – (ط) وضح أن المجموعة لنقط النهاية اليمنى فى F هى عددية تنازلية . وضح أنه إذا حذفت جميع هذه النقط النهاية اليمنى من F فإن ما يتبقى يمكن وضعه فى تناظر أحادى مع جميع عناصر الفئة $[0, 1]$. ثم استنتج أن F غير قابلة للعد .

٧ – (ى) كل فترة مفتوحة (a, b) التى تحتوى نقطة من F تحتوى أيضاً فئة (ثلث أوسط) بأكمله والتى تنتمى إلى $\mathscr{C}(F)$. إذن F لا تحتوى أى فترة مفتوحة خالية .

٧ – (ك) بازالة الفئات المتناقصة الطول دائماً يثبت أننا تمكننا من تكوين فئة « كانتور المشابهة » بحيث يكون طولها موجبا . ما هو أكبر طول لهذه الفئة يمكننا الحصول عليه ؟

٧ – (ل) وضح أن F ليست اتحاد مجموعة قابلة للعد لفترات مغلقة

توبولوجيا الفراغات الكارتيزية

خصصت أبواب الفصل الأول لتطوير الخواص الجبرية وخواص الترتيب وخاصية الإتمام لنظام الأعداد الحقيقية . واستعمال كبير لهذه الخواص سيستخدم فى هذا الفصل والفصول القادمة .

ومع إنه من الممكن حالا مناقشة المتتابعات للأعداد الحقيقية والدوال الحقيقية المستمرة فإننا نفضل تأجيل دراسة هذه الموضوعات لفترة قصيرة . وفى الحقيقة سندخل هنا تعاريف لفراغ المتجه ، فراغ العمودى وفراغ حاصل الضرب العددى . ونفعل ذلك لأنه من السهل فهم هذه المدلولات ولأن مثل هذه الفراغات تظهر خلال كل التحليل (بدون ذكر شىء عن استعمالاتها فى علم الهندسة (الجيومترية والفيزياء والهندسة والاقتصاديات الخ) والفراغات الكارتيزية $\boldsymbol{R}^p$ ستكون من الطبيعى مشوقة لنا بوجه خاص . ولحسن الحظ نجد أن بصيرتنا للفراغين $\boldsymbol{R}^2$ ، $\boldsymbol{R}^3$ تحملنا عادة بدون تغيير كبير للفراغ $\boldsymbol{R}^p$ وتساعد المعلومات عن هذه الفراغات فى تحليل فراغات أكثر عموماً .

البــاب الثامن ــ متجه وفراغات كارتيزية :

« فراغ المتجه » هو الفئة التى فيها يمكن جمع عنصرين ويمكن ضرب عنصر فى عدد حقيقى بطريقة تحقق خواص معينة معروفة وسوف تكون أكثر تدقيقاً .

٨ ــ ١ تعريف . فراغ المتجه هو الفئة V (التى عناصرها تسمى متجهات) المجهزة بعمليتين ثنائيتين تسميان جمع متجه وضرب عددى .

إذا كانت $x, y \in V$ فيوجد عنصر $x+y$ فى V يســمى جمع متجه المقدارين x ، y . وهذه عملية جمع المتجه تحقق الخواص التالية :

(A1) $x+y=y+x$ لكل y و x فى V .

(A2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ لكل z و y و x فى V .

(A$_3$) يوجد عنصر 0 فى V بحيث إن $0+x=x$ ، $x+0=x$ لكل x فى V .

(A$_4$) بفرض x فى V فيوجد عنصر $-x$ فى V بحيث إن $x+(-x)=0$
$(-x)+x=0$

إذا كانت $x \in V$ ، $a \in \boldsymbol{R}$ فيوجد عنصر $a\,x$ فى V تسمى مضاعف a ، x .
وهـذه عملية الضرب العـددى تحقق الخواص الآتية :

(M1) $1x=x$ لكل $x \in V$

(M2) $a(bx)=(ab)x$ لكل $a, b \in \boldsymbol{R}$ ، $x \in V$

(D) $a(x+y)=ax+ay$ ، $(a+b)x=ax+by$ لكل $a, b \in \boldsymbol{R}$ الحقيقيتين ، $x, y \in V$.

الآن سنعطى بعض أمثلة أولية ولـكنها هامة للفراغات المتجهة .

٨ — ٢ أمثلة . (أ) نظام الأعداد الحقيقية هو فراغ متجه حيث عملية الجمع وعملية الضرب العددى هما عمليتا الجمع والضرب العادى للأعداد الحقيقية .

(ب) بفرض أن $\boldsymbol{R}^2$ تدل على حاصل الضرب الكارتيزى $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ فحينئذ $\boldsymbol{R}^2$ تحتوى كل الأزواج المرتبة (x_1, x_2) للأعداد الحقيقية . وإذا عرفنا جمـع المتجه والضرب العـددى بالآتى :

$$(x_1, x_2)+(y_1, y_2)=(x_1+y_1, x_2+y_2)$$
$$a(x_1, x_2)=(ax_1, ax_2)$$

فحينئذ يمـكن أن نتأكد أن الخواص المذكورة فى تعريف ٨ — ١ تـكون قد تحققت .

هنا $0=(0, 0)$ ، $-(x_1, x_2)=(-x_1, -x_2)$.] . حينئذ $\boldsymbol{R}^2$ هو فراغ متجه تحت هذه العمليات .

(ج) بفرض $p \in \boldsymbol{N}$ وبفرض أن $\boldsymbol{R}^p$ تدل على المجموعة لكل الترتيبات من الطيات »

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

حيث $x_i \in \boldsymbol{R}$ عند $i=1, \ldots, p$. وإذا عرفنا جمع المتجه والضرب العددى بالآتى :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p)+(y_1, y_2, \ldots, y_p)=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_p+y_p)$$
$$a(x_1, x_2, \ldots, x_p)=(ax_1, ax_2, \ldots, ax_p)$$

فحينئذ يمكن أن نتأكد أن R^p هو فراغ متجه تحت هذه العمليات هنا نرى أن :

$0=(0,0,\ldots,0)$ ، $-(x_1, x_2, \ldots, x_p)=(-x_1, -x_2, \ldots, -x_p).$

(د) بفرض S أى فئة وبفرض R^S تدل على المجموعة لكل الدوال u التى نطاقها S ومداها فى R . (حينئذ R^S هو مجموع كل الدوال حقيقية القيمة المعرفة فى S) وإذا عرفنا $u+v$ ، au بالتالى :

$$(u+v)(s)=u(s)+u(s)$$
$$(au)(s)=au(s)$$

لكل $s \in S$ حينئذ يمكن أن نتأكد أن R^S هو فراغ متجه تحت هذه العمليات .

[هنا 0 هو دالة تطابقيا مساوية للصفر ، $-u$ دالة قيمتها عند $s \in S$ هى $-u(s)$]

وفى الأبواب القادمة سنقابل فراغات متجهة كثيرة أخرى .

وعموما سنكتب $x-y$ بدلا من $x+(-y)$.

حواصل الضرب العددى والأعمدة العددية :

سيلاحظ القارىء أن الضرب العددى فى فراغ متجه V R هو دالة نطاقها $R \times V$ ومداها V . وفراغات متجهة كثيرة مجهزة أيضاً بدالة نطاقها $V \times V$ ومدى R والتى لها أهمية .

٨ – ٣ تعريف . إذا كانت V فراغ متجه فحينئذ الضرب العددى (أو ضرب نقطة) هو دالة على $V \times V$ إلى R ويرمز لها بالرمز $(x, y) \mapsto x \cdot y$ وتحقق الخواص .

(i) $x \cdot x \geq 0$ لكل $x \in V$.

(ii) $x \cdot x = 0$ إذا وإذا فقط $x=0$.

(iii) $x \cdot y = y \cdot x$ لكل $x, y \in V$.

(iv) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ ، $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
لكل $x, y\ z \in V$

(v) $(ax) \cdot y = a(x \cdot y) = x\ \cdot (ay)$ لكل $a \in R$ ، $x, y \in V$.

يسمى فراغ المتجه الذى قد عرف فيه الضرب العددى بفراغ الضرب العددى .

ومن الممكن تعريف حواصل ضرب عددية مختلفة فى فراغ نفس المتجه (تمرين ٨ – د) .

٨ — ٤ أمثلة . (أ) الضرب العادى فى R يحقق الخواص السـابقة وإذن هى فراغ ضرب عددى .

(ب) فى R^2 ، نعرف .

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

ومن السهل أن نتأكد أن هذا يعرف ضربا عدديا على R^2 .

(ج) فى R^p ، نعرف .

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_p) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_p y_p$$

ومن السهل أن نتأكد أن هذا يعرف ضربا عددياً على R^p .

٨ — ٥ تعريف . إذا كانت V هى فراغ متجه حينئذ العمود على V هو دالة على V إلى R يرمز لها بالرمز $x \mapsto \|x\|$ وتحقق الخواص .

(i) $\|x\| \geq 0$ لكل $x \in V$.

(ii) $\|x\| = 0$ إذا وإذا فقط $x = 0$

(iii) $\|ax\| = |a| \, \|x\|$ لكل $a \in R,\ x \in V$

(vi) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ لكل $x, y \in V$

يسمى فراغ متجه الذى عرف فيه العمود بفراغ عمود .

كما سنرى فى التمرينات ، يمكن أن يكون لنفس فراغ المتجه أعمدة متقاطعة متعددة .

٨ — ٦ أمثلة . (أ) الدالة مطلقة القيمة على R تحقق الخواص فى ٨ — ٥ .

(ب) فى R^2 ، نعرف

$$\|(x_1, x_2)\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}.$$

حيث الخواص (i) ، (ii) ، (iii) تتأكد بسهولة جدا وخاصية (iv) تكون معقدة أكثر .

(ج) فى R^p نعرف

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_p)\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2)^{1/2}.$$

حيث الخواص (i) ، (ii) ، (iii) تكون سهلة الإثبات مرة ثانيـة .

الآن سنعطى نظرية تؤكد أن حاصل الضرب العددى يمكن دائماً استعماله لتعريف عمود بطريقة طبيعية جدا .

٨ – ٧ نظرية . بفرض V هو حاصل الضرب العددى وبفرض تعريف $\|x\|$ بالتالى

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} \quad \text{حيث} \quad x \in V$$

فإن $x \mapsto \|x\|$ هو عمود على V ويحقق الخاصية التالية

$$x \cdot y \leq \|x\| \, \|y\| \qquad (*)$$

وبالإضافة إلى ذلك إذا كانت x ، y ليس صفر فيكون التساوى فى (*) إذا وإذا فقط كان يوجد عدد ما حقيقى موجب مضبوط c بحيث إن $x = cy$

البرهان . بما أن $x \cdot x \geq 0$ لكل $x \in V$ فحينئذ الجذر التربيعى للمقدار $x \cdot x$ موجود لذلك تكون $\|x\|$ قد عرفت جيداً . الخواص الثلاث الأولى للعمود نتائج مباشرة من ٨ – ٣ (i) ، (ii) و (v) . لبرهنة (*) ، نفرض $a, b \in \boldsymbol{R}, x, y \in V$ ونفرض $z = ax - by$. فإذا استخدمنا خواص ٨ – ٣ (i) ، (iii) ، (iv) ، (v) نحصل على

$$0 \leq z \cdot z = a^2 \, x \cdot x - 2ab \, x \cdot y + b^2 \, y \cdot y$$

الآن نأخذ $a = \|y\|$ ، $b = \|x\|$ فإننا نحصل على .

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|y\|^2 \, \|x\|^2 - 2 \, \|y\| \, \|x\| \, x \cdot y + \|x\|^2 \, \|y\|^2 \\ &= 2 \, \|x\| \, \|y\| \, (\|x\| \, \|y\| - x \cdot y) \end{aligned}$$

إذن المتباينة (*) تظل قائمة .

وإذا كانت $x = cy$ مع $c > 0$ فإن $\|x\| = c \, \|y\|$ وكذلك

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (cy) \cdot y = c(y \cdot y) = c \, \|y\|^2 \\ &= \|x\| \, \|y\| \end{aligned}$$

إذن التساوى فى (*) موجود وبالعكس إذا كانت $x \cdot y = \|x\| \, \|y\|$ فإن الحساب فى البند السابق يوضح أن $z = \|y\| \, x - \|x\| \, y$ لها الخاصية التى تقول إن $z \cdot z = 0$. لذلك $z = 0$ وبما أن x ، y متجهان غير صفريين فيمكننا أخذ $c = \|x\| / \|y\|$ ولإثبات ٨ – ٥ (iv) نستعمل (*) لنوضح أن

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) \\ &= x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y \\ &= \|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \, \|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

ومن ذلك ينتج أن $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ لكل $x, y \in V$ وهو المطلوب إثباته

سنترك برهان النتيجة الآتية كتمرين .

٨ — ٨ نتيجة . إذا كانت x, y عنصرين من V ، فإن

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\| \qquad (**)$$

وبالإضافة إلى ذلك إذا كانت $y \neq 0$ فإن التساوى يمكن أن يكون موجبا فى (* *) إذا وإذا فقط كان يوجد عدد حقيق c بحيث إن $x = cy$.

كل من المتباينة (*) والمتباينة (* *) تسمى متباينة (شفارتز) أو متباينة (كوشى — بينيا كوفسكى — شفارتز) (*) وهى كثيرة الاستعمال والمتباينة ٨—٥ (iv) تسمى متباينة المثلث وسنترك للقارئ إثبات أن

$$|\,\|x\|-\|y\|\,| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\|+\|y\|$$

لأى x, y فى فراغ عود .

الفراغ الكارتيزى R^p :

نقصد بالفراغ الكارتيزى الحقيق فى p من الأبعاد الفئة R^p المجهزة بجمع المتجه وبضرب عددى المعرفين فى مثال ٨ — ٢ (ج) وبحاصل الضرب العددى المعرف فى مثال ٨ — ٤ (ج) . وكما رأينا هذا الضرب العددى ينتج العمود

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_p)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2}$$

(*) أوجستن — لويس كوشى (١٧٨٩ — ١٨٥٧) هو منشىء التحليل الحديث ولكنه قدم أيضاً تطويراً عيقاً فى قطاعات الرياضيات المختلفة وعمل كمهندس عند نابليون ولحق بشارلس العاشر فى منفاه الجبرى واستبعد من وظيفته فى كلية فرنسا خلال سنى الحكم الملكى لأنه لم يؤد قسم ولاء الحاكم . وبالرغم من نشاطه الدينى والسياسى فقد وجد وقتا لكتابة ٧٨٩ بحثا فى الرياضيات .

فكتور بينياكوفسكى (١٨٠٤ — ١٨٨٩) كان أستاذا فى (بيترزبورج) أعطى تعميما لمتباينة كوشى للتكاملات فى عام ١٨٥٩ . ولم يهتم كتاب الغرب لمساهماته فى الرياضيات . وقد اكتشفها شفارتز مستقلة فيما بعد .

هيرمان أماندوس شفارتز (١٨٤٣ — ١٩٢١) كان طالبا وخلفا لفيرشتراس فى برلين وله إسهامات كثيرة وخاصة فى تحليل العدد المركب .

الأعداد الحقيقية $x_1, x_2, \ldots, x_p$ تسمى بالأحداثيات الأول ، والثانى ، ... ، الأحداثى الذى ترتيبه P (أو المركبات) للمتجه $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$

وفى R^p ، العدد الحقيقى $\|x\|$ يمكن أن تعتبر إما طولا للمقدار x أو المسافة من x إلى الصفر . وأكثر عموماً نعتبر $\|x-y\|$ كسافة من x إلى y . وبهذا التفسير تؤكد خاصية ٨-٥ (ii) أن المسافة من x إلى y هى صفر إذا وإذا فقط $x=y$ وتؤكد خاصية ٨ - ٥ (iii) حيث $a = -1$ أن $\|x-y\|=\|y-x\|$ والتى تعنى أن المسافة من x إلى y تساوى المسافة من y إلى x . ومتباينة المثلث تعنى أن

$$\|x-y\| \leq \|x-z\|+\|z-y\|$$

التى معناها أن المسافة من x إلى y ليست أكبر من مجموع المسافة من x إلى z والمسافة من z إلى y .

٨ - ٩ تعريف . بفرض $x \in R^p$ وبفرض $r>0$ فان الفئة $\{y \in R^p : \|x-y\| < r\}$ تسمى الكرة المفتوحة التى مركزها x ونصف قطرها r . الفئة $\{y \in R^p : \|x-y\| \leq r\}$ تسمى الكرة المغلقة التى مركزها x ونصف قطرها r . الفئة $\{y \in R^p : \|x-y\| = r\}$ تسمى الكرة التى مركزها x ونصف قطرها r .

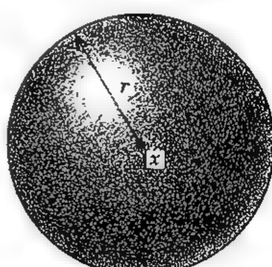
مفهوم الكرة أو تصورها يعتمد على العمود . وسيرى فى التمرينات أن بعض الكور ليست مستديرة بالكامل .

ومن المناسب غالباً أن تكون لدينا علاقات بين العمود للمتجه فى R^p ومقدار مركباته .

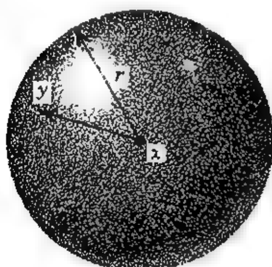
٨ - ١٠ نظرية . إذا كانت $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ أى عنصر من R^p فان

$$|x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{p}\, \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_p|\}$$

البرهان . بما أن $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2$ فمن الواضح أن $|x_i| \leq \|x\|$



كرة مفتوحة مركزها x



كرة مغلقة مركزها x

(شكل ٨ - ١)

لكل i ، وبالمثل إذا كانت $M = \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_p|\}$ فان $\|x\|^2 \le pM^2$
وإذن $\|x\| \le \sqrt{p}\, M$. وهو المطلوب إثباته .

المتباينة السابقة تؤكد فى صورة كية أنه إذا كان المعود المقدار x صغيرا فإن أطوال مركباته تكون صغيرة وبالعكس .

تمرينات :

٨ – (أ) إذا كانت V هو فراغ متجه وإذا كانت $x + z = x$ لبعض x، z فى V ، فبين أن $z = 0$. حينئذ يكون عنصر الصفر فى V يكون وحيداً .

٨ – (ب) إذا كانت $x + y = 0$ لبعض x, y فى V فبين أن $y = -x$.

٨ – (ج) بفرض $S = \{1, 2, \ldots, p\}$ لبعض $p \in N$ فوضح أن فراغ المتجه R^S يكون ضرورياً مثل فراغ R^p .

٨ – (د) إذا كانت w_1 ، w_2 موجبين مضبوطين . فاثبت أن التعريف يؤدى إلى حاصل

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 w_1 + x_2 y_2 w_2$$

الضرب العددى على R^2 . اذكر الحالة العامة على R^p .

٨ – (هـ) التعريف .

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1$$

ليس حاصل ضرب عددى على R^2 . لماذا ؟

٨ – (و) إذا كانت $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in R^p$ تعرف $\|x\|_1$ بالمقدار

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_p|$$

أثبت أن $x \mapsto \|x\|_1$ عمود على R^p .

٨ – (ز) إذا كانت $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in R^p$ تعرف $\|x\|_\infty$ بالمقدار

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_p|\}$$

أثبت أن $x \mapsto \|x\|_\infty$ عمودى على R^p .

٨ – (ح) فى الفئة R^2 ، صف الفئات .

$$S_1 = \{x \in R^2 : \|x\|_1 < 1\}, \qquad S_\infty = \{x \in R^2 : \|x\|_\infty < 1\}$$

٨ –(ط) إذا كانت $x, y \in R^p$ المعود المعرف فى ٨ – ٤ (ج) تحقق خاصية متوازى الأضلاع

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

فاثبت هذا ووضح انه يمكن تفسيرها بقولنا أن مجموع مربعات الأطوال الأربعة لأضلاع متوازى الأضلاع تساوى مجموع مربعى القطرين .

٨ – (ى) أثبت أن العمود المعرف فى تمرينى ٨ – ف ، والعمود المعرف ٨ – ز لا يحققان خاصية متوازى الأضلاع .

٨ – (ك) وضح أنه يوجد ثابتان موجبان a, b بحيث أن

$$a\,\|x\|_1 \leq \|x\| \leq b\,\|x\|_1 \quad \text{لكل} \quad x \in \boldsymbol{R}^p$$

أوجد أكبر ثابت a وأصغر ثابت b فى هذه الخاصية

٨ – (ل) وضح أنه يوجد ثابتان موجبان a, b بحيث إن

$$a\,\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq b\,\|x\|_1 \quad \text{لكل} \quad x \in \boldsymbol{R}^p$$

أوجد أكبر ثابت a وأصغر ثابت b يحققان هذه الخاصية

٨ – (م) إذا كانت x, y تنتمى إلى $\boldsymbol{R}^p$ ، هل صحيح أن

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_1\,\|y\|_1 \qquad |x \cdot y| \leq \|x\|_\infty\,\|y\|_\infty \quad ؟$$

٨ – (ن) إذا كانت x, y تنتمى إلى $\boldsymbol{R}^p$ ، حينئذ هل صحيح أن العلاقة

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$$

تكون صحيحة إذا وإذا فقط كان $x = cy$ أو $y = cx$ حيث $c \geq 0$ ؟

٨ – (س) بفرض x, y تنتمى إلى $\boldsymbol{R}^p$ ، حينئذ هل صحيح أن العلاقة

$$\|x+y\|_\infty = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

تظل قائمة إذا وإذا فقط كانت $x = cy$ أو $y = cx$ حيث $c \geq 0$ ؟

٨ –(ع) إذا كانت x, y تنتمى إلى $\boldsymbol{R}^p$ ، حينئذ

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

تكون صحيحة إذا وإذا فقط كانت $x \cdot y = 0$ وفى هذه الحالة يقال إن x ، y عموديان أو متعامدان .

٨ – (ف) فئة جزئية K من $\boldsymbol{R}^p$ يقال إنها محدبة إذا كانت لكل x, y تنتمى إلى K فإنه يوجد عدد حقيق t بحيث إن $0 \leq t \leq 1$ فإن النقطة

$$(1-t)x + ty = x + t(y-x)$$

تنتمى أيضاً إلى K . فسر هذا الشرط هندسيا ووضح أن الفئات الجزئية

$$K_1 = \{x \in \boldsymbol{R}^2 : \|x\| \leq 1\},$$
$$K_2 = \{(\xi, \eta) \in \boldsymbol{R}^2 : 0 < \xi < \eta\},$$
$$K_3 = \{(\xi, \eta) \in \boldsymbol{R}^2 : 0 \leq \eta \leq \xi \leq 1\}$$

تكون محدبة لكن الفئة الجزئية

$$K_4 = \{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\| = 1\}$$

ليست محدبة .

٨ –(ص) تقاطع أى مجموعة لفئات جزئية محدبة الفراغ R^p تكون محدبة . واتحاد فئتين جزئيتين محدبتين للمقدار R^p ربما لا تكون محدبة .

٨ – (ق) إذا كانت M أى فئة فحينئذ الدالة $d : M \times M \to \mathbf{R}$ تسمى مترية على M إذا كانت تحقق

(i) $d(x, y) \geq 0$ لكل y و x فى M

(ii) $d(x, y) = 0$ إذا وإذا فقط $x = y$

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ لكل y و x فى M

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ لكل z و y و x فى M .

وضح أنه إذا كانت $x \mapsto \|x\|$ أى عمود على فراغ المتجه V وإذا عرفنا d بأنه

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \text{حيث} \quad x, y \in V$$

فإن d تكون مترية على V .

٨ –(ر) بفرض أن d مترية على الفئة M فباستخدام تعريف ٩ – ٨ كنموذج ، عرف الكرة المفتوحة التى مركزها $x \in M$ ونصف قطرها r . فسر الفئتين S_1 ، S_∞ فى تمرين (٨ –ح) ككرتين مفتوحتين فى R^2 بالنسبة إلى مترين مختلفين. فسر (تمرين ٨ – ك) كقولنا إن الكرة التى مركزها 0 بالنسبة إلى مترى d_2 (مستنتج من العمود فى ٨–٦(ب) يحتوى ومحتوى فى كور مركزها 0 بالنسبة إلى المترى d_1 المستنتج من $\| \quad \|_1$ ، اعمل نفس التفسير على تمرين (٨–ل) . ونظرية ٨ – ١٠ .

٨ – (ش) بفرض M أى فئة ونفرض أن d معرفة على $M \times M$ بمتطلبات أن

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{إذا} \quad x = y, \\ 1 & \text{إذا} \quad x \neq y. \end{cases}$$

وضح أن d مترية على M بالمعنى المعروف فى (تمرين ٨ – ق) . إذا كانت x أى نقطة فى M فحينئذ تكون الكرة المفتوحة بمركز x ونصف قطر واحد (بالنسبة إلى المترية d) محتوية بالضبط على نقطة واحدة . كيفما تكون الكرة المفتوحة التى مركزها x ونصف قطرها 2 (بالنسبة إلى d) محتوية على كل M . هذه المترية d أحياناً تسمى المترية المنفصلة على الفئة M .

مشروعات :

٨ — α فى هذه الخطة سنظهر متباينات هامة .

(أ) بفرض أن a ، b عددان حقيقيان موجبان . أثبت أن

$$ab \leq (a^2+b^2)/2$$

وأن التساوى يكون إذا وإذا فقط كان $a = b$. [إرشاد : اعتبر $(a-b)^2$]

(ب) بفرض a_1 ، a_2 عددان حقيقيان موجبان . أثبت أن

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq (a_1+a_2)/2$$

وأن التساوى يتحقق إذا وإذا فقط كان $a_1 = a_2$.

(ج) بفرض $a_1, a_2, \ldots, a_m$ حيث $m = 2^n$ أعداداً حقيقية موجبة . فبين أن

$$(a_1 a_2 \cdots a_m)^{1/m} \leq (a_1+a_2+\cdots+a_m)/m \qquad (*)$$

وأن التساوى يتحقق إذا وإذا فقط كان $a_1 = \cdots = a_m$

(د) وضح أن المتباينة (*) بين المتوسط الهندسى والمتوسط الحسابى تكون صحيحة حتى عندما m لاتساوى قوة للمقدار 2 (إرشاد : إذا كانت $2^{n-1} < m < 2^n$ نفرض $b_j = a_j$ حيث $j = 1, \ldots, m$ ونفرض

$$b_j = (a_1+a_2+\cdots+a_m)/m$$

حيث $j = m+1, \ldots, 2^n$. الآن استخدام جزء (ج) للأعداد $b_1, b_2, \ldots, b_{2^n}$.)

(هـ) بفرض $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ، $b_1, b_2, \ldots, b_n$ فئتين لأعداد حقيقية . أثبت متطابقة لاجرانج (*)

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right\}^2 = \left\{\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right\}\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right\} - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} (a_j b_k - a_k b_j)^2$$

(إرشاد : ابدأ بتجربة الحالتين $n = 2$ ، $n = 3$) .

(و) استخدم جزء (هـ) لتركيب متباينة كوشى

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right\}^2 \leq \left\{\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right\}\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right\}$$

(*) جوزيف — لويس لاجرانج (١٧٣٦ — ١٨١٣) ولد فى (تورين) حيث أصبح أستاذاً وعمره تسع عشرة سنة وذهب بعد ذلك إلى برلين لمدة عشرين عاماً كخلف لأيلر وبعد ذلك إلى باريس ، وهو معروف بعمله فى تفاضل وتكامل المتغيرات وأيضاً الميكانيكا التحليلية .

وضح أن التساوى يكون صحيحاً إذا وإذا فقط كانت الفئتان المرتبتان $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ، $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ متناسبتين .

(ز) استخدم جزء (ف) لتركيب متباينة المثلث

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2\right\}^{1/2} \leq \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right\}^{1/2} + \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right\}^{1/2}$$

٨ . β هذا المشروع أفرض أن $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ وما إلى آخره فئات أعداد حقيقية موجبة عددها n .

(أ) من الممكن البرهنة (مثـــال ذلك باستخدام نظرية القيمة المتوسطة) على أنه إذا كانت a ، b موجبين وأيضاً $0 < \alpha < 1$ فإن

$$a^{\alpha} b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha) b$$

وأن التساوى يكون صحيحاً إذا وإذا فقط كان $a = b$. بفرض هذا ، وبفرض $r > 1$ وأن s تحقق

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$$

(أى إن $s > 1$ ، $r + s = rs$) أثبت أنه إذا كانت B و A موجبين فإن

$$AB \leq \frac{A^r}{r} + \frac{B^s}{s}$$

وأثبت أيضاً أن المتطابقة تكون صحيحة إذا وإذا فقط كان $A^r = B^s$

(ب) بفرض $\{a_1, \ldots, a_n\}$ ، $\{b_1, \ldots, b_n\}$ أعداداً حقيقية موجبة وبفرض $r, s > 1$ ، $(1/r) + (1/s) = 1$ أثبت متباينة هولدر (*)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right\}^{1/r} \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^s\right\}^{1/s}$$

(ارشاد : إفرض أن $A = \{\sum a_i^r\}^{1/r}$ ، $B = \{\sum b_i^s\}^{1/s}$ واستخدم جزء (أ) على a_i/A ، b_i/B .)

(ج) باستخدام متباينة هولدر كون متباينة مينكوسكى (**)

(*) أتوهولدر (١٨٥٩ – ١٩٣٧) درس فى جيتنجن وتعلم فى ليبزج وعمل بكلا الجبر والتحليل .

(**) هيرمان مينوسكى (١٨٦٤ – ١٩٠٩) كان أستاذاً فى كنجزبرج و جيتنجن ومن أحسن أعماله الفئات المحدبة وهندسة الأعداد .

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^r\right\}^{1/r} \le \left\{\sum_{j=1}^{n} a_j^r\right\}^{1/r} + \left\{\sum_{j=1}^{n} b_j^r\right\}^{1/r}$$

إرشاد : $(a+b)^r = (a+b)(a+b)^{r/s} = a(a+b)^{r/s} + b(a+b)^{r/s}$

(د) باستخدام متباينة هولدر ، أثبت ان

$$(1/n)\sum_{j=1}^{n} a_j \le \left\{(1/n)\sum_{j=1}^{n} a_j^r\right\}^{1/r}$$

(هـ) إذا كانت $a_1 \le a_2$ ، $b_1 \le b_2$ فإن $(a_1-a_2)(b_1-b_2) \ge 0$ ومن ثم

$$a_1b_1 + a_2b_2 \ge a_1b_2 + a_2b_1$$

أثبت أنه إذا كانت $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ ، $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$ فإن

$$n\sum_{j=1}^{n} a_jb_j \ge \left\{\sum_{j=1}^{n} a_j\right\}\left\{\sum_{j=1}^{n} b_j\right\}$$

(و) بفرض أن

$0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ ، $r \ge 1$ ، $0 \le b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$

$r \ge 1$ كون متباينة شيبيشيف (*)

$$\left\{(1/n)\sum_{j=1}^{n} a_j^r\right\}^{1/r}\left\{(1/n)\sum_{j=1}^{n} b_j^r\right\}^{1/r} \le \left\{(1/n)\sum_{j=1}^{n}(a_jb_j)^r\right\}^{1/r}$$

أثبت أن هذه المتباينة تعكس إذا كانت $\{a_j\}$ متزايدة ، $\{b_j\}$ متناقصة .

البـــاب التاسع ــ الفئات المغلقة والمفتوحة :

كثير من الخواص العميقة للتحليل الحقيقي تعتمد على مدلولات توبولوجية معينة . وفى الأبواب القليلة القادمة سنقدم التصورات الأساسية ونستنتج منها بعضاً من أهم الخواص التوبولوجية الحاسمة للفراغ R^p . وهذه النتائج ستستعمل بكثرة فى الفصول القادمة .

٩ – ١ تعريف . الفئة G فى R^p يقال إنها مفتوحة فى R^p (أو مجرد مفتوحة) إذا كان ، لكل نقطة x فى G يوجد عدد حقيقى $r > 0$ بحيث إن كل نقطة y فى R^p وتحقق $\|x-y\| < r$ تنتمى أيضاً إلى الفئة G (انظر شكل ٩ – ١) .

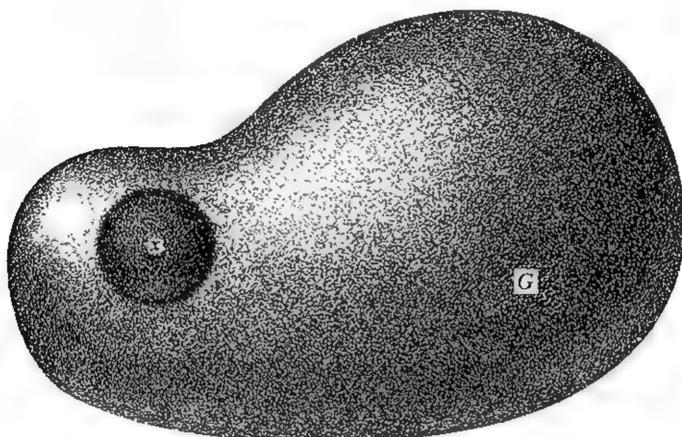
باستخدام تعريف ٨ – ٩ يمكننا إعادة صياغة هذا التعريف بقولنـــا إن الفئة G

(*) بافنوتى شيبيشيف (١٨٢١ – ١٨٩٤) كان أستاذاً فى بيتر برج وساهم كثيراً فى الرياضيات ولكن أهم عمل له كان فى نظرية العدد ، الاحتمالات ونظرية التقريب .

تكون مفتوحة إذا كانت كل نقطة فى G هى مركز لكرة ما مفتوحة تكون بأكلها محتوية فى G .

٩ – ٢ أمثلة . (أ) الفئة الشاملة R^p تكون مفتوحة لأنه يمكننا أخذ $r = 1$ لأى x.

(ب) الفئة $G = \{x \in R : 0 < x < 1\}$ تكون مفتوحة فى $R = R^1$. الفئة $F = \{x \in R : 0 \le x \le 1\}$ ليست مفتوحة فى R . (لماذا ؟)



(شكل ٩ – ١) فئة مفتوحة

(ج) الفئات: $G = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ ، $H = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ مفتوحة لكن الفئة $F = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ ليست مفتوحة فى R^2 (لماذا ؟) .

(د) الفئة $G = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < 1,\ y = 0\}$ ليست مفتوحة فى R^2 (قارن هذا مع (ب)) . الفئة $H = \{(x, y) \in R^2 : 0 < y < 1\}$ مفتوحة لكن الفئة $K = \{(x, y) \in R^2 : 0 \le y < 1\}$ ليست مفتوحة فى R^2 .

(هـ) الفئة $G = \{(x, y, z) \in R^3 : z > 0\}$ مفتوحة فى R^3 مثل الفئة $H = \{(x, y, z) \in R^3 : x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$ ومن ناحية أخرى الفئة $F = \{(x, y, z) \in R^3 : x = y = z\}$ ليست مفتوحة .

(و) الفئة الخالية $\emptyset$ مفتوحة فى R^p لأنها لاتحتوى نقطا بالمرة ولذلك تتحقق المتطلبات فى تعريف ٩ – ١ ببساطة .

(ز) إذا كانت B كرة مفتوحة مركزها z ونصف قطرها $a > 0$ وإذا كانت $x \in B$ حينئذ الكرة التى مركزها x ونصف قطرها $a - \|z - x\|$ تكون محتوية فى B . أى أن B تكون مفتوحة فى R^p .

الآن سنقرر الخواص الأساسية للفئات المفتوحة فى R^p ، وفى مناهج التوبولوجى تتلخص هذه النتيجة القادمة بقولنا أن الفئات المفتوحة كما عرفت فى تعريف ٩ – ١ تكون توبولوجيا لأجل R^p .

٩ – ٣ خواص الفئة المفتوحة . (أ) كل من الفئة الخالية $\emptyset$ والفراغ الشامل R^p تكون مفتوحة فى R^p .

(ب) تقاطع أى فئتين مفتوحتين هو فئة مفتوحة فى R^p .

(ج) اتحاد أى مجموعة من الفئات المفتوحة هو فئة مفتوحة فى R^p .

البرهان . قد علقنا من قبل على الصفة المفتوحة للفئات $\emptyset$ ، R^p لإثبات (ب) نفرض أن G_2 و G_1 مفتوحتان ونفرض أن $G_3 = G_1 \cap G_2$ ولنوضح أن G_3 مفتوحة نفرض أن $x \in G_3$. بما أن x تنتمى إلى الفئة المفتوحة G_1 فيوجد $r_1 > 0$ بحيث إنه إذا كانت $\|x - z\| < r_1$ فإن $z \in G_1$ بالمثل يوجد $r_2 < 0$ بحيث إنه إذا كانت $\|x - w\| < r_2$ فإن $w \in G_2$. باختيار r_3 بحيث تكون أقل من r_2 ، r_1 . نستنتج أنه اذا كان $y \in R^p$ بحيث إن $\|x - y\| < r_3$ حينئذ تنتمى y الى كلا من G_1 ، G_2 إذن هذه العناصر مثل y تنتمى إلى $G_3 = G_1 \cap G_2$ مما يثبت أن G_3 مفتوحة فى R^p .

لبرهنة (ج) نفرض أن $\{G_\alpha, G_\beta, \ldots\}$ هى مجموعة من فئات مفتوحة ونفرض أن G هو اتحادها . ولتوضيح أن G مفتوحة نفرض $x \in G$. ومن تعريف الاتحاد يترتب على ذلك أنه لفئة ما ولتكن G_λ مثلا يوجد لدينا $x \in G_\lambda$. وحيث أن G_λ مفتوحة فيوجد كرة مركزها x وتقع بأكملها فى G . وبما أن $G_\lambda \subseteq G$ تكون هذه الكرة محتوية بأكملها فى G مما يثبت أن G مفتوحة فى R^p . وهو المطلوب إثبـــاته

بالاستنتاج ينتج من خاصية (ب) المذكورة فى أعلى أن تقاطع أى مجموعة محدودة من الفئات المفتوحة هى أيضاً فئة مفتوحة فى R^p . ويمكن ملاحظة أن هذا التقاطع لمجموعة غير محددة لفئات مفتوحة ربما لا تكون فئة مفتوحة .

من المثال :

$$G_n = \left\{x \in R : -\frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n}\right\}, \qquad n \in N \tag{9.1}$$

نجد أن تقاطع الفئات G_n هو الفئة $F = \{x \in R : 0 \le x \le 1\}$ وهى ليست مفتوحة .

الفئـــات المغلقة :

الآن سنقدم تصوراً هاماً للفئة المغلقة فى R^p .

٩ – ٤ تعريف . الفئة F فى $\boldsymbol{R}^p$ يقال إنها مغلقة فى $\boldsymbol{R}^p$ (أو مجرد مغلقة) فى حالة كون قيمتها $\mathscr{C}(F) = \boldsymbol{R}^p \setminus F$ مفتوحة فى $\boldsymbol{R}^p$.

٩ – ٥ أمثلة . (أ) الفئة الشاملة $\boldsymbol{R}^p$ مغلقة فى $\boldsymbol{R}^p$ حيث متممتها هى الفئة الخالية وهى فئة مفتوحة فى $\boldsymbol{R}^p$ كما رأيناها فى ٩ – ٢ (و) .

(ب) الفئة الخالية $\emptyset$ مغلقة فى $\boldsymbol{R}^p$ حيث قيمتها فى $\boldsymbol{R}^p$ هو كل $\boldsymbol{R}^p$ وهى فئة مفتوحة فى $\boldsymbol{R}^p$ كما بينا فى ٩ – ٢ (أ) .

(ج) الفئة $F = \{x \in \boldsymbol{R} : 0 \le x \le 1\}$ مغلقة فى $\boldsymbol{R}$. وإحدى الطرق لرؤية ذلك هو أن متممة F فى $\boldsymbol{R}$ هو اتحاد الفئتين $\{x \in \boldsymbol{R} : x > 1\}$, $\{x \in \boldsymbol{R} : x < 0\}$ والتى كل منهما مفتوحة . بالمثل الفئة $\{x \in \boldsymbol{R} : 0 \le x\}$ مغلقة .

(د) الفئة $F = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$ مغلقة لأن متممتها فى $\boldsymbol{R}^2$ هى الفئة

$$\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$$

وهى فئة مفتوحة .

(هـ) الفئة $H = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 : x \ge 0\}$ مغلقة فى $\boldsymbol{R}^3$ ، وأيضاً الفئة $F = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 : x = y = z\}$.

(و) الكرة المغلقة B التى مركزها x فى $\boldsymbol{R}^p$ ونصف قطرها $r > 0$ فئة مغلقة للفراغ $\boldsymbol{R}^p$. لأنه إذا كانت $z \notin B$ فإن الكرة المفتوحة التى مركزها z و نصف قطرها $\|z - x\| - r$ تكون محتوية فى $\mathscr{C}(B)$ ولذلك تكون $\mathscr{C}(B)$ مفتوحة ، B مغلقة فى $\boldsymbol{R}^p$.

وبالحديث العادى عند الاستعمال على الأبواب والنوافذ والعقول فالكلمات مفتوح ومغلق يكون معناها عكس ماسبق . كيفما كان فعند استعمالها للفئات الجزئية من $\boldsymbol{R}^p$ فمعنى هذه الكلمة ليس العكس . فمثلا لاحظنا أعلاه أن الفئتين $\boldsymbol{R}^p$ و $\emptyset$ مفتوحتان أو مغلقتان فى $\boldsymbol{R}^p$ (من المحتمل أن يشعر القارىء بالراحة ليعرف أنه لا يوجد فئات جزئية أخرى للمقدار $\boldsymbol{R}^p$ التى لها كلا الخاصيتين السابقتين) . وبالإضافة إلى ذلك فإنه يوجد فئات جزئية كثيرة للمقدار $\boldsymbol{R}^p$ والتى ليست مفتوحة وليست مغلقة . وفى الحقيقة معظم الفئات الجزئية للفراغ $\boldsymbol{R}^p$ لها صفة التعادل . وكمثال بسيط سنقتبس الفئة

$$A = \{x \in \boldsymbol{R} : 0 \le x < 1\} \tag{9.2}$$

هذه الفئة A تفشل فى أن تكون مفتوحة فى $\boldsymbol{R}$ حيث إنها تحتوى على النقطة 0 وبالمثل تفشل فى أن تكون مغلقة فى $\boldsymbol{R}$ لأن متممتها فى $\boldsymbol{R}$ هى الفئة $\{x \in \boldsymbol{R} : x < 0 \text{ or } x \ge 1\}$ والتى ليست مفتوحة لأنها تحتوى النقطة ١ . والقارىء يجب أن يركب أمثلة أخرى من الفئات بحيث تكون ليست مفتوحة وليست مغلقة فى $\boldsymbol{R}^p$.

الآن سنقرر الخواص الأساسية للفئات المغلقة وبرهان هذه النتيجة تنتج مباشرة من نظرية ٩ – ٣ باستخدام قوانين دى‌مرجان (نظرية ١ – ٨ وتمرين ١ – ك) .

٩ – ٦ خواص الفئات المغلقة . (أ) كل من الفئة الخالية $\emptyset$ والفراغ الشامل $\boldsymbol{R}^p$ مغلقة فى $\boldsymbol{R}^p$.

(ب) اتحاد أى فئتين مغلقتين فئة مغلقة فى $\boldsymbol{R}^p$.

(ج) تقاطع أى مجموعة من فئات مغلقة هو فئة مغلقة فى $\boldsymbol{R}^p$.

متاخمات (الجيرة أو الجوار) :

سنقدم الآن بعضاً من المدلولات التبولوجية الإضافية والتى ستكون مفيدة وتسمح لنا بوصف الفئات المفتوحة والفئات المغلقة بواسطة مدلولات أخرى .

٩ – ٧ تعريف . (أ) إذا كانت $x \in \boldsymbol{R}^p$ فإن أى فئة تحتوى على فئة مفتوحة تحوى x تسمى متاخمة أو جوار للعنصر .

(ب) نقطة $x \in \boldsymbol{R}^p$ تسمى نقطة داخلية لفئة $A \subseteq \boldsymbol{R}^p$ فى حالة وجود جوار للعنصر x والتى تكون محتوية كلية فى A .

(ج) نقطة $x \in \boldsymbol{R}^p$ تسمى نقطة حدودية لفئة $A \subseteq \boldsymbol{R}^p$ فى حالة كون كل جوار أو جيرة للعنصر x تحتوى نقطة فى A ونقطة فى $\mathscr{C}(A)$.

(د) نقطة $x \in \boldsymbol{R}^p$ تسمى بنقطة خارجية لفئة $A \subseteq \boldsymbol{R}^p$ فى حالة وجود جوار للمقدار x الذى يكون بأكمله محتوياً فى $\mathscr{C}(A)$.

ومن الملاحظ أنه إذا كان $x \in \boldsymbol{R}^p$ ، $A \subseteq \boldsymbol{R}^p$ فإنه يوجد ثلاث إمكانيات منفردة متبادلة (i) x نقطة داخلة للفئة A، (ii) x نقطة حدودية للفئة A ، أو (iii) x نقطة خارجة للفئة A .

٩ – ٨ أمثلة . (أ) فئة U تكون جيرة لنقطة x إذا وإذا فقط كان يوجد كرة مركزها x محتوية بأكملها فى U .

(ب) نقطة x تكون نقطة داخلة للفئة A إذا وإذا فقط كان يوجد كرة مركزها x محتوية بأكملها فى A .

(ج) نقطة x تكون نقطة حدودية للفئة A إذا وإذا فقط كان يوجد لكل عدد طبيعى n نقط $a_n \in A$ ، $b_n \in \mathscr{C}(A)$ بحيث إن :

$$\|x-b_n\|<1/n \qquad \|x-a_n\|<1/n$$

(د) كل نقطة فى الفترة $(0, 1) \subseteq \boldsymbol{R}$ هى نقطة داخلة ، النقطتان 1 ، 0 هما نقطتان حدوديتان للفترة (0،1) .

(هـ) بفرض $A - [0, 1] \subseteq \boldsymbol{R}$ حينئذ النقط الداخلة للفئة A هى النقط فى الفترة المفتوحة (0،1) ، النقطتان 0, 1 هما النقطتان الحدوديتان للفئة A .

(و) النقط الحدودية للكور المفتوحة والمغلقة التى مركزها $x \in \boldsymbol{R}^p$ ونصف قطرها $r > 0$ هى النقط فى الكورة التى مركزها x ونصف قطرها r . (انظر تعريف ٨ – ٩)

الآن سنميز الفئات المفتوحة بدلالة متاخمات ونقط داخلة .

٩ – ٩ نظرية . إذا كانت $B \subseteq \boldsymbol{R}^p$ فإن النصوص الآتية تكون متكافئة :

(أ) B تكون مفتوحة .

(ب) كل نقطة من B تكون نقطة داخلة من B .

(ج) B تكون جيرة لكل من نقطها .

البرهان . إذا كانت (أ) صحيحة وكانت $x \in B$ ، فحينئذ تكون الفئة المفتوحة B جيرة للمنصر x ولذلك تكون x نقطة داخلة للمقدار B .

من السهل إثبات أن (ب) تعنى (ج)

إذا كانت (ج) صحيحة فإنه لكل $x \in B$ يوجد فئة مفتوحة $G_x \subseteq B$ حيث $x \in G_x$ إذن $B = \bigcup \{G_x : x \in B\}$ وينتج من نظرية ٩ – ٣ (ج) أن B تكون مفتوحة فى $\boldsymbol{R}^p$.

وينتج مما أوضحنا أن الفئة المفتوحة لاتحتوى على أى نقطة من نقطها الحدودية حيث الفئات المغلقة تكون الطرف الآخر فى هذا الصدد .

٩ – ١٠ نظرية . فئة $F \subseteq \boldsymbol{R}^p$ تكون مغلقة إذا وإذا فقط كانت تحتوى جميع نقطها الحدودية .

البرهان . نفرض أن F مغلقة وأن x هى نقطة حدودية للفئة F . إذا كانت $x \notin F$ ، فإن الفئة المفتوحة $\mathscr{C}(F)$ تحتوى x ولا تحتوى أى نقطة من F بخلاف الفرض الذى يقول أن x هى نقطة حدودية للمقدار F إذن يجب أن يكون $x \in F$.

وبالعكس ، نفرض أن F تحتوى جميع نقطها الحدودية . إذا كانت $y \notin F$ فحينئذ y ليست نقطة من F وليست نقطة حدودية من F . إذن فهى نقطة خارجة . ومن ثم توجد جيرة M للمقدار y محتوية بأكلها فى $\mathscr{C}(F)$. بما أن هذا صحيح لكل $y \notin F$ فنستدل أن $\mathscr{C}(F)$ مفتوحة حيث F مغلقة فى R^p .

فئات مفتوحة فى R :

سنختم هذا الباب بتمييز الصورة لفئة جزئية مفتوحة اختيارية للفراغ R .

٩ – ١١ نظرية . فئة جزئية للفراغ R تكون مفتوحة إذا وإذاً فقط كانت اتحاد مجموعة عددية لفترات مفتوحة .

البرهان . بما أن الفترة المفتوحة هى مفتوحة (لماذا ؟) فينتج من ٩ – ٣ (ج) أن الاتحاد لأى اتحاد معدود لفترات مفتوحة يكون مفتوحاً .

وبالعكس إذا فرضنا $G \neq \emptyset$ فئة مفتوحة فى R ونفرض $\{r_n : n \in N\}$ هى تعداد لكل النقط القياسية فى G . لكل $n \in N$ نفرض m_n هو أقل عدد طبيعى بحيث إن الفترة $J_n = (r_n - 1/m_n, r_n + 1/m_n)$ تكون محتوية كلية فى G . ومن ذلك ينتج أن :

$$\bigcup_{n \in N} J_n \subseteq G$$

والآن نفرض أن x نقطة اختيارية فى G ونفرض $m \in N$ حيث أن :

$$(x - 2/m, x + 2/m) \subseteq G$$

ومن ذلك ينتج من نظرية ٦ – ١٠ أنه يوجد عدد قياسى y فى $(x - 1/m, x + 1/m)$ وحيث $y \in G$ وكذلك $y = r_n$ لعدد ما طبيعى n . وإذا كانت x لا تنتمى إلى

$$J_n = (r_n - 1/m_n,\ r_n + 1/m_n)$$

فحينئذ يجب أن يكون $1/m_n < 1/m$ ولكن بما أنه قد تبين حالا أن

$$\left(r_n - \frac{1}{m}, r_n + \frac{1}{m}\right) \subseteq \left(x - \frac{2}{m}, x + \frac{2}{m}\right) \subseteq G$$

فهذا يخالف الاختيار المقدار m_n لذلك عندنا $x \in J_n$ لهذه القيمة إلى n . وحيث $x \in G$ اختيارية فنستدل على أن

$$G \subseteq \bigcup_{n \in N} J_n$$

لذلك تكون G مساوية لهذا الاتحاد .

ومن ذلك لا ينتج من النظرية ٩–١١ أن فئة جزئية للفراغ R مغلقة إذا وإذا فقط كان القاطع مجموعة معدودة لفترات مغلقة (لماذا ؟) . ومن ذلك لاينتج أن الاتحاد المحسوب لفترات مغلقة يجب أن يكون مغلقاً . وكل فئة مغلقة ليست لها هذه الخاصية .

تعميم لهذه النتيجة سيعطى فى تمرين (٩ – ز) .

تمرينـــات :

٩ – (أ) برر الإثبات الذى قدم عن الفئتين F و G فى مثال ٩ – ٢ (ب) .

٩ – (ب) برر الإثبات الذى قدم فى مثال ٩ – ٢ (ج) .

٩ – (ج) أثبت أن تقاطع أى مجموعة محدودةلفئات مفتوحة تكون مفتوحة فىR^p(إرشاد : استخدم ٩ – ٣ (ب) والاستنتاج) .

٩ – (د) ما هى النقط الداخلة والحدودية والخارجة فى R للفئة (١ ، ٥) ثم استنتج أنها ليست مفتوحة ولا مغلقة .

٩ - (هـ) اعط مثالا فى R^2 بحيث يكون ليس مفتوحاً ولامغلقاً . ثم أثبت صحة هذا المثال.

٩ - (و) اكتب بالتفصيل برهان نظرية ٩ – ٦ .

٩ - (ز) وضح أن فئة جزئية للمقدار R^p تكون مفتوحة إذا وإذا فقط كان الاتحاد لمجموعة محسوبة لكرات مفتوحة (إرشاد : فئة كل النقط فى R^p والتى كل إحداثياتها أعداد قياسية هى معدودة) .

٩ - (ح) كل فئة جزئية مفتوحة من R^p هى اتحاد لمجموعة محسوبة لفئات مغلقة .

٩ - (ط) كل فئة جزئية مغلقة من R^p هى التقاطع لمجموعة معدودة لفئات مفتوحة .

- (ى) إذا كانت A أى فئة جزئية من R^p وبفرض A^0 ترمز إلى الاتحاد لكل الفئات المفتوحة المحتوية فى A فإن الفئة A^0 تسمى داخل الفئة الجزئية A . لاحظ أن A^0 هى فئة مفتوحة . وضح أنها أكبر فئة مفتوحة محتوية فى A . أثبت أن -

$$A^0 \subseteq A, \qquad (A^0)^0 = A^0$$

$$(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0, \qquad (R^p)^0 = R^p$$

اعط مثالا لتوضيح أن $(A \cup B)^0 = A^0 \cup B^0$ ربما لا تكون صحيحة .

٩ - (ك) أثبت أن نقطة تنتمى إلى A^0 إذا وإذا فقط إذا كانت نقطة داخلة للفئة A .

٩ - (ل) إذا كانت A أى فئة جزئية من R^p وبفرض أن A' تشير إلى تقاطع كل الفئات المغلقة التى تحتوى على A ، الفئة A^- تسمى الأقفال للفئة الجزئية A . ونلاحظ أن A^- فئة مغلقة . أثبت أنها أصغر فئة مغلقة تحتوى على A .

أثبت أن :

$$A \subseteq A^- , \qquad (A^-)^- = A^-$$
$$(A \cup B)^- = A^- \cup B^- , \qquad \emptyset^- = \emptyset$$

اعط مثالا لتوضح أن $(A \cap B)^- = A^- \cap B^-$ ربما لا تكون صحيحة .

٩ - (م) أثبت أن نقطة تنتمى إلى A^- إذا وإذا فقط كانت إما نقطة داخلة أو نقطة حدودية للمقدار A .

٩ - (ن) اعط مثالا لفئة A فى R^p بحيث أن $A^\circ = \emptyset$ ، $A^- = R^p$ هل يمكن لهذه الفئة مثل A أن تكون عددية .

٩ - (س) بفرض A ، B فئتين جزئيتين للمقدار R فان حاصل الضرب الكارتيزى $A \times B$ يكون مفتوحاً فى R^2 إذا وإذا فقط كانت A ، B مفتوحتين فى R .

٩ - (ع) بفرض A ، B فئتين جزئيتين للمقدار R . حاصل الضرب الكارتيزى $A \times B$ يكون مغلقا فى R^2 إذا وإذا فقط كانت A ، B مغلقتين فى R .

٩ - (ف) فسر الفكرة المقدمة فى هذا الباب عن دالة كانتور F للتعريف ٧ - ٤ . وخاصة :

(أ) وضح أن F مغلقة فى R .

(ب) لا توجد نقط داخلة فى F .

(ج) لا يوجد فئات مفتوحة غير خالية محتوية فى F .

(د) كل نقطة من F هى نقطة حدودية .

(هـ) الفئة F لا يمكن التعبير عنها كاتحاد لمجموعة محسوبة لفترات مغلقة .

(و) متمم الفئة F لا يمكن التعبير عنها كاتحاد مجموعة محسوبة لفترات مفتوحة .

الباب العاشر — نظريات الخلايا المتشابكة (الوكرية) وبولزانو ڤيرشتراس :

فى هذا الباب سنقدم نتيجتين هامتين جدا والتى سوف تستعمل غالباً فى الأبواب القادمة بمعنى أنه يمكن اعتبارها كخاصية متممة للمقدار R^p حيث $p > 1$.

سنستعيد من باب سبعة أنه إذا كانت $a \leq b$ فإن الخلية المفتوحة فى R والتى يرمز إليها بالرمز (a, b) هى الفئة المعرفة بالمقدار .

$$(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$$

وقد لوحظ حالا أن مثل هذه الفئة تكون مفتوحة فى R . بالمثل الخلية المغلقة $[a, b]$ فى R هى الفئة

$$[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$$

والتى هى فئة مغلقة فى R . حاصل الضرب الكارتيزى لفترتين يسمى عادة مستطيلا وحاصل الضرب الكارتيزى لثلاث فترات يسمى غالباً متوازى السطوح . وللتبسيط سنستعمل العبارة « خلية » بغض النظر عن بعد الفراغ .

١٠ — ١ تعريف . خلية مفتوحة J فى R^p هى حاصل الضرب الكارتيزى لخلايا مفتوحة عددها p لأعداد حقيقية . وحينئذ J تأخذ الصورة

$$J = \{x = (x_1, \ldots, x_p) \in R^p : a_i < x_i < b_i \quad \text{عند} \quad i = 1, 2, \ldots, p\}$$

بالمثل الخلية المغلقة I فى R^p هى حاصل الضرب الكارتيزى لخلايا مغلقة عددها p لأعداد حقيقية . وحينئذ I تأخذ الصورة

$$I = \{x = (x_1, \ldots, x_p) \in R^p : a_i \leq x_i \leq b_i \quad \text{عند} \quad i = 1, 2, \ldots, p\}$$

تكون الفئة الجزئية من R^p تكون محدودة إذا كانت محتوية فى خلية ما .

وكتمرين بين أن خلية مفتوحة فى R^p تكون فئة مفتوحة وأن خلية مغلقة هى فئة مغلقة . وأيضاً الفئة الجزئية من R^p محدودة إذا وإذا فقط كانت هذه الفئة الجزئية محتوية فى كرة ما . ويلاحظ أن هذا المصطلح الفنى للفئات المحدودة متفق مع المقدمة فى باب ٦ فى حالة $p = 1$.

وسيتذكر القارىء من باب ٧ أن خاصية العلو لنظام العدد الحقيقى تدل على أن كل متتابعة متداخلة لخلايا مغلقة غير خالية فى R لها نقطة مشتركة .

والآن سنبرهن أن هذه الخاصية تتحقق فى حالة الفراغ R^p .

١٠ — ٢ **نظرية الخلايا المتداخلة** . بفرض (I_k) متتابعة لخلايا مغلقة غير خالية فى R^p ومتداخلة بمعنى أن $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_k \supseteq \cdots$. فحينئذ توجد نقطة فى R^p بحيث تنتمى لجميع الخلايا .

البرهان . نفرض أن I_k هى الخلية .

$$I_k = \{(x_1, \ldots, x_p) : a_{k1} \leq x_1 \leq b_{k1}, \ldots, a_{kp} \leq x_p \leq b_{kp}\}$$

من السهل أن نرى أن الخلايا $[a_{k1}, b_{k1}], k \in N$ تكون متتابعة متداخلة لخلايا مغلقة غير خالية لأعداد حقيقية فإذن يوجد بواسطة إتمام مجموعة العدد الحقيقى R عدد حقيقى y_1 ينتمى إلى جميع هذه الخلايا . وباستخدام هذه النتيجة لكل إحداثى صادى فإننا نحصل على النقطة

$y=(y_1,\ldots,y_p)$ للفراغ R^p بحيث إنه إذا كانت j تحقق $j=1,2,\ldots,p,$ فإن y تنتمى لكل الخلايا $\{[a_{kj},b_{kj}]: k\in N\}$ وإذن النقطة y تنتمى إلى جميع الخلايا (I_k) . وهو المطلوب إثباته

نقطة العنقود او السباطة ونظرية بولزانو ــ ڤيرشتراس :

١٠ – ٣ . تكون نقطة $x\in R^p$ تكون نقطة سباطة (أو نقطة تجمع كمنقود) لفئة جزئية $A\subseteq R^p$ فى حالة كون كل متاخمة للمقدار x تحتوى على الأقل نقطة واحدة للفئة A خلاف x .

سوف نعتبر بعض أمثلة .

١٠ – ٤ أمثلة . (أ) نقطة $x\in R^p$ تكون نقطة تجميع للفئة A إذا وإذا فقط كان يوجد لكل عدد طبيعى n عنصر $a_n\in A$ بحيث إن $0<\|x-a_n\|<1/n$.

(ب) إذا كانت نقطة حدودية لفئة لا تنتمى إلى الفئة فإنها تكون نقطة تجميع للفئة .

(ج) كل نقطة لوحدة الفترات I فى R تكون نقطة تجميع للفترة I .

(د) بفرض $A=(0,1)$ فإن كل نقطة فى الفترة A هى نقطة داخلة ونقطة تجمع للفترة A . النقطتان 0، 1 نقطتا تجميع (لكن ليست نقطتين داخليتين) للفترة A .

(هـ) بفرض $B=I\cap Q$ هى فئة جميع الأعداد القياسية فى وحدة الفترات فإن كل نقطة فى I هى نقطة تجميع للفترة B فى R ولكن لا توجد نقط داخلة للفترة B .

(و) فئة جزئية محدودة للفراغ R^p ليس لها نقط تجميع (لماذا ؟) .

(ز) الفئة اللانهائية لأعداد صحيحة $Z\subseteq R$ ليس لها نقط تجميع (لماذا ؟) .

١٠ – ٥ نظرية . فئة $F\subseteq R^p$ تكون مغلقة إذا وإذا فقط كانت تحتوى على كل نقطها التجميعية .

البرهان . نفرض أن F مغلقة ، x نقطة تجميع للفئة F . إذا كانت $x\notin F$ فإن الفئة المفتوحة $\mathscr{C}(F)$ تكون جوارا للمقدار x ويجب أن تحتوى على الأقل نقطة واحدة للفئة F . لكن هذا مستحيل ولذلك نستنتج أن $x\in F$.

وبالعكس إذا كانت F تحتوى جميع نقطها التجميعية فسنوضح أن $\mathscr{C}(F)$ مفتوحة . لأنه إذا كانت $y\in\mathscr{C}(F)$ فإن y ليست نقطة تجميع للفئة F . ولذلك يوجد جوار V_y للمقدار y بحيث إن $F\cap V_y=\emptyset$. وإذن $V_y\subseteq\mathscr{C}(F)$. وبما أن هذا صحيح لكل $y\in\mathscr{C}(F)$ فنستنتج أن $\mathscr{C}(F)$ تكون مفتوحة فى R^p . وهو المطلوب إثباته

النتيجة الآتية من أهم النتائج ذات الأهمية فى هذا الكتاب وأهميتها أساسية وسوف تستخدم كثيرا . ويجب ملاحظة أن الاستنتاج ربما يفشل إذا لم يتحقق أى من الفروض . [انظر مثالى ١٠ - ٤ (و ، ز)] .

١٠ - ٦ نظرية بولزانو - فيرشتراس*. كل فئة جزئية لا نهائية محدودة الفراغ R^p لها نقطة تجميع .

البرهان . إذا كانت B فئة محدودة لها عدد لا نهائى من العناصر ونفرض أن I_1 خلية مغلقة تحتوى B . نقسم I_1 إلى 2^p خلايا مغلقة بتنصيف كلا من جانبيها . وبما أن I_1 تحتوى على نقط كثيرة لانهائية من B . فجزء واحد على الأقل من هذا التقسيم الفرعي سيحتوى أيضاً على نقط كثيرة لا نهائية من الفئة B . (لأنه إذا كان كل من الـ 2^p جزء يحتوى فقط عددا محددا من نقط للفئة B ، فحينئذ يجب أن تكون B فئة محدودة بعكس الفرض) . نفرض أن I واحد من هذه الأجزاء للتقسيم الفرعي للفئة I_1 والذى يحتوى عناصر كثيرة للفئة B عددها لانهائى . الآن نقسم I_2 إلى 2^p من الخلايا المغلقة بتنصيف ضلعيها الجانبيين . مرة أخرى يجب أن تحتوى إحدى هذه الخلايا الجزئية على عدد لا نهائى من نقط الفئة B وإلا أمكن للخلية الجزئية I_2 أن تحتوى فقط على عدد محدود مما يخالف تركيبها . فإذا فرضنا أن I_3 هى خلية جزئية من I_2 التى تحتوى نقطا كثيرة عددها لانهائى من B فإنه باستمرار هذه العملية فإننا نحصل على متتابعة متداخلة (I_k) لخلايا مغلقة غير خالية من R^p وحسب نظرية الخلايا المتداخلة فانه توجد نقطة y تنتمى لجميع الخلايا $I_k, k = 1, 2, \ldots$. والآن سنوضح أن y هى نقطة تجميع من B وهذا سيدخل برهان الفرض .

أولا : نلاحظ أنه إذا كانت $I_1 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ حيث $a_k < b_k$ وإذا كانت $l(I_1) = \sup\{b_1 - a_1, \ldots, b_p - a_p\}$ فإن $l(I_1) > 0$ هو طول أطول أضلاع I_1. وطبقا للتركيب أعلاه للمتابعة (I_k) يكون لدينا

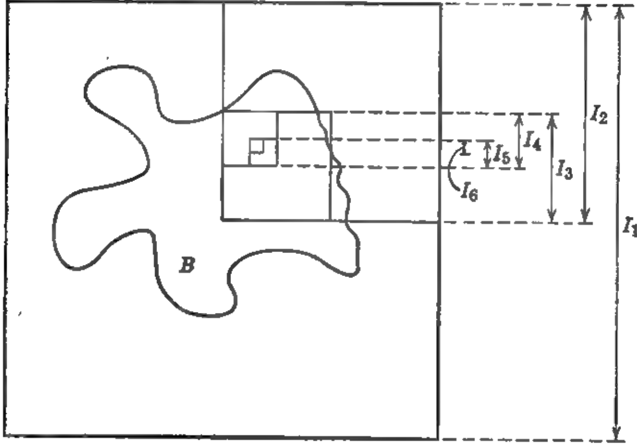
(*) برنارد بولنزانو (١٧٨١ - ١٨٤٨) كان أستاذا لفلسفة الدين فى براغ ولكن كان له أفكار عميقة عن الرياضيات . وكان مثل كوشى - رائدا فى إدخال مستوى عال من الصرامة فى التحليل الرياضى . وظهر مؤلفه عن التناقضات الظاهرية التى قد تكمن فيها الحقيقة عن اللانهاية بعد وفاته .

كارل فيرشتراس (١٨١٥ - ١٨٩٧) كان أستاذا فى برلين لعدة سنوات وله تأثير عميق فى تطوير التحليل الرياضى . وكان يصر دائما على البرهان الصحيح القوى . وتوصل إلى مقدمة فى نظام العدد الحقيقى ولكنه لم ينشرها . وله إسهامات هامة على نظام العدد الحقيقى وله فى التحليل الحقيقى والتحليل المركب والمعادلات التفاضلية والتفاضل والتكامل للمتغيرات .

$$0 < l(I_k) = \frac{1}{2^{k-1}} l(I_1)$$

حيث $k \in \mathbf{N}$. نفرض أن V هى أى جوار للنقطة المشتركة y ونفرض أن كل النقط z فى $\mathbf{R}^p$ حيث $\|y-z\| < r$ تنتمى إلى V الآن نختار k كبيرة جدا بحيث إن $I_k \subseteq V$ ومثل هذا الاختيار ممكن لأنه إذا كانت w أى نقطة أخرى من I_k فحينئذ ينتج من نظرية ٨ ـ ١٠ أن

$$\|y-w\| \leq \sqrt{p}\, l(I_k) = \frac{\sqrt{p}}{2^{k-1}} l(I_1).$$



(شكل ١٠ ـ ١)

وحسب تمرين ٦ ـ ٧ ، ينتج أنه إذا كانت k كبيرة كبرا كافيا فإن

$$\frac{\sqrt{p}}{2^{k-1}} l(I_1) < r.$$

ولمثل هذه القيمة للمقدار k يكون $I_k \subseteq V$. حيث إن I_k تحتوى عناصر كثيرة عددها لا نهائى من B فينتج أن V تحتوى على الأقل عنصرا واحدا من B يختلف عن y . إذن y نقطة تجميع للمقدار B . وهو المطلوب إثباته

تمرينــــات :

١٠ ـ (أ) بفرض $I_n \subseteq \mathbf{R}^p$ (خلايا مفتوحة معطاة من العلاقة $I_n = (0, 1/n) \times \cdots \times (0, 1/n)$ وضح أن هذه الخلايا متداخلة ولكنها لا تحتوى على أى نقطة مشتركة .

١٠ – (ب) بفرض أن $J_n \subset R^p$ فترات مغلقة معطاة من العلاقة $J_n \quad [n, +\infty) \times \cdots \times [n, +\infty)$ أثبت أن هذه الفترات تكون متداخلة ولكنها لا تحتوى على أى نقطة مشتركة .

١٠ – (ج) نقطة x هى نقطة تجميع لفئة $A \subseteq R^p$ إذا وإذا فقط كان كل جوار للنقطة x يحتوى نقطا كثيرة للفئة A عددها لا نهائى .

١٠ – (د) بفرض $A = \{1/n : n \in N\}$. وضح أن كل نقطة للفئة A هى نقطة حدودية فى R ولكن 0 هى نقطة التجميع الوحيدة للفئة A فى R .

١٠ – (هـ) بفرض B و A فئتين جزئيتين من R^p وبفرض x هى نقطة تجميع للفئة $A \cap B$ فى R^p . أثبت أن x هى نقطة تجميع لكل من A ، B .

١٠ – (و) بفرض B و A فئتين جزئيتين للفئة R^p ونفرض أن x نقطة تجميع للفئة $A \cup B$ فى R^p . أثبت أن x إما نقطة تجميع للفئة A أو للفئة B .

١٠ - (ز) أثبت أن كل نقطة فى فئة كانتور F هى نقطة تجميع لكل من $\mathscr{C}(F)$ ، F .

١٠ - (ح) إذا كانت A أى فئة جزئية للفئة R^p ، فإنه يوجد فئة جزئية محسوبة C للفئة A بحيث انه إذا كانت $x \in A$ ، $\varepsilon > 0$ فيوجد عنصر $z \in C$ بحيث ان $\|x - z\| < \varepsilon$ ومن ثم يكون كل عنصر من A إما فى C أو نقطة تجميع للفئة C .

مشروعات :

١٠ - α نفرض M فئة ، متريا أو قياسيا على M ومعرفا فى (تمرين ٨ - ق). اختبر ثانيا التعريفات والنظريات فى البابين ٩ ، ١٠ لكى تحدد أيها ينطبق على الفئات التى لها مترى . فمثلا سيتضح أن فكرة الفئة المفتوحة والمغلقة والمحدودة تنطبق عليها ولا تنطبق نظرية بولتزانو وفيرشتراس عند قيمة مناسبة للمقدارين M و d . كلما كان ممكنا إما أن توضح أن النظرية تمتد أو تعطى مثالا عكسيا لتوضيح فشلهما .

١٠ - β بفرض $\mathscr{T}$ عائلة لفئات جزئية لفئة X التى (i) تحتوى $\emptyset$ ، X ، (ii) تحتوى التقاطع لأى عائلة محدودة من الفئات فى $\mathscr{T}$ ، (iii) تحتوى الاتحاد لأى عائلة من الفئات فى $\mathscr{T}$ فإننا نسمى $\mathscr{T}$ توبولوجى للفئة X ونشير إلى الفئات فى $\mathscr{T}$ كفئات مفتوحة . افحص ثانيا التعريفات والنظريات فى بابى ٩ ، ١٠ محاولا أن تحدد أيها ينطبق على الفئات X التى لها توبولوجى $\mathscr{T}$.

الباب الحادى عشر – نظرية هاين – بوريل :

نظرية الخلايات المتداخلة ١٠ - ٢ ونظرية بولتزانو فيرشتراس ١٠ - ٦ ترتبطان ارتباطا خاصا بالتعريف الهام جدا للاندماج والتى سنناقشها فى هذا الباب وبالرغم من أنه من الممكن

الحصول على معظم النتائج فى الأبواب الأخيرة بدون معرفة نظرية هاين بوريل فلا يمكننا التعمق فى التحليل بدون الاحتياج لهذه النظرية ولذلك يكون منع عرض هذه النتيجة العميقة اقتصادا مزيفاً .

١١ — ١ تعريف . فئة K يقال أنها محكة أو مدمجة طالما تكون الفئة محتوية فى الاتحاد لمجموعة $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ لفئات مفتوحة فإنها أيضاً تكون محتوية فى الاتحاد لعدد ما محدود من الفئات فى $\mathcal{G}$.

مجموعة $\mathcal{G}$ لفئات مفتوحة اتحادها يحتوى K غالبا تسمى غطاء الفئة K . أى المتطلبات لكون الفئة K محكة هى أن كل غطاء $\mathcal{G}$ للفئة K يمكن استبداله بغطاء محدود للفئة K باستخدام فئات فى $\mathcal{G}$ فقط نلاحظ أنه لكى نستخدم هذا التعريف للبرهنة على أن فئة K مدمجة سنحتاج لفحص أو اختبار مجموعة اختيارية لفئات مفتوحة اتحادها يحتوى K ونوضح أن K تكون محتوية فى الاتحاد لمجموعة جزئية محدودة من كل مجموعة كهذه . ومن ناحية أخرى لنوضح أن فئة H ليست مدمجة فإنه يكون كافيا عرض غطاء واحد فقط بحيث لا يمكن إبداله بمجموعة جزئية محدودة والتى تظل تغطى H .

١١ — ٢ أمثلة . (أ) بفرض $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ فئة جزئية محدودة للفئة $\boldsymbol{R}^p$ ، فمن الواضح أنه إذا كانت $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ مجموعة لفئات مفتوحة فى $\boldsymbol{R}^p$ وإذا كانت أى نقطة من الفئة K تنتمى إلى فئة جزئية ما من $\mathcal{G}$ فإن فئات جزئية مختارة بعناية عددها m على الأكثر من $\mathcal{G}$ سيكون لها أيضاً الخاصية التى تقول ان اتحادهم يحتوى K . حينئذ تكون K فئة جزئية مدمجة للفئة $\boldsymbol{R}^p$.

(ب) فى $\boldsymbol{R}$ سنعتبر الفئة الجزئية $H = \{x \in \boldsymbol{R} : x \geq 0\}$ ونفرض أن $n \in \boldsymbol{N}$ $G_n = (-1, n)$ بحيث أن $\mathcal{G} = \{G_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ مجموعة لفئات جزئية مفتوحة للفئة $\boldsymbol{R}$ والتى اتحادها يحتوى H . إذا كانت $\{G_{n_1}, G_{n_2}, \ldots, G_{n_k}\}$ هى مجموعة جزئية محدودة من $\mathcal{G}$ فنفرض أن $M = \sup\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ بحيث $G_{n_j} \subseteq G_M$ عند $j = 1, 2, \ldots, k$. ومن ذلك ينتج أن G_M هو اتحاد $\{G_{n_1}, G_{n_2}, \ldots, G_{n_k}\}$ مهما يكن فإن العدد الحقيقى M لا ينتمى إلى G_M ولذلك لا ينتمى إلى

$$\bigcup_{j=1}^{k} G_{n_j}$$

وإذن لا يوجد اتحاد محدود للفئات $\mathcal{G}$ يمكن أن يحتوى H ، H لا تكون مدمجة .

(ج) نفرض $H = (0, 1)$ فى $\boldsymbol{R}$. إذا كانت $G_n = (1/n, 1-1/n)$ عند $n > 2$ فحينئذ المجموعة $\mathcal{G} = \{G_n : n > 2\}$ لفئات مفتوحة تكون غطاء H . إذا كانت $\{G_{n_1}, \ldots, G_{n_k}\}$ مجموعة جزئية محدودة من $\mathcal{G}$ وبفرض $M = \sup\{n_1, \ldots, n_k\}$ بحيث

أن $G_{n_j} \subseteq G_M$ عنـــد $j = 1, 2, \ldots, k$. فينتج أن G_M هى الاتحاد الفئـــات $\{G_{n_1}, \ldots, G_{n_k}\}$ لكن العدد الحقيقى $1/M$ ينتمى إلى H ولا ينتمى إلى G_M لذلك لايوجد مجموعة جزئية محدودة من $\mathscr{G}$ يمكن أن تكون غطاء H وإذن H ليست مدمجة .

(د) اعتبر الفئة $I = [0, 1]$ وسنوضح أن I تكون مدمجة لذلك تفرض $\mathscr{G} = \{G_\alpha\}$ هى مجموعة لفئات جزئية مفتوحة للفئة R والتى اتحادها يحتوى I . العدد الحقيقى $x = 0$ ينتمى إلى فئة مفتوحة ماقى المجموعة $\mathscr{G}$ وأيضاً تنتمى إليها الأعداد x التى تحقق $0 \leq x < \varepsilon$ لأى $0 < \varepsilon$. نفرض x^* هى أعلى النقط x فى I بحيث أن الخلية $[0, x]$ تكون محتوية فى الاتحاد لعدد محدود من الفئات فى $\mathscr{G}$. بما أن x^* تنتمى إلى I ، فينتج أن x^* يكون عنصر الفئة مفتوحة ما فى $\mathscr{G}$. ومن ثم عند قيمة ما $\varepsilon > 0$ تكون الخلية $[x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$ محتوية فى فئة G_0 فى المجموعة . لكن (من تعريف x^*) تكون الخلية $[0, x^* - \varepsilon]$ محتوية فى الاتحاد لعدد محدود من الفئات فى $\mathscr{G}$. وإذن بإضافة الفئة المفردة G_0 إلى العدد المحدود السابق الذى نحتاج إليه لأن نعطى $[0, x^* - \varepsilon]$ ، نستنتج أن الفئة $[0, x^* + \varepsilon]$ تكون محتوية فى الاتحاد لعدد محدود من الفئات فى $\mathscr{G}$. وإذن $x^* = 1$ مدمجة .

وعادة ليس أمراً سهلا برهان أن فئة تكون مدمجة باستخدام التعريف فقط . والآن سنقدم نظرية هامة وشهيرة التى تميز تماماً الفئات الجزئية المدمجة للفئة R^p . وفى الحقيقة جزء من أهمية نظرية هاين بوريل * يرجع إلى بساطة الشروط لأجل الإدماج فى R^p .

١١ – ٣ نظرية هاين بوريل . فئة جزئية للفئة R^p تكون مدمجة إذا وإذا فقط كانت مغلقة ومحدودة .

البرهان . أولا سنوضح أنه إذا كانت الفئة K مدمجة فى R^p فحينئذ تكون مغلقة . نفرض أن x تنتمى إلى $\mathscr{C}(K)$ ونفرض أن G_M هى الفئة المعرفة لكل عدد طبيعى m بواسطة

$$G_m = \{y \in R^p : \|y - x\| > 1/m\}$$

وقد تبين تواً أن كل فئة $G_m, m \in N$ تكون مفتوحة فى R^p . أيضاً ، يتكون الاتحاد

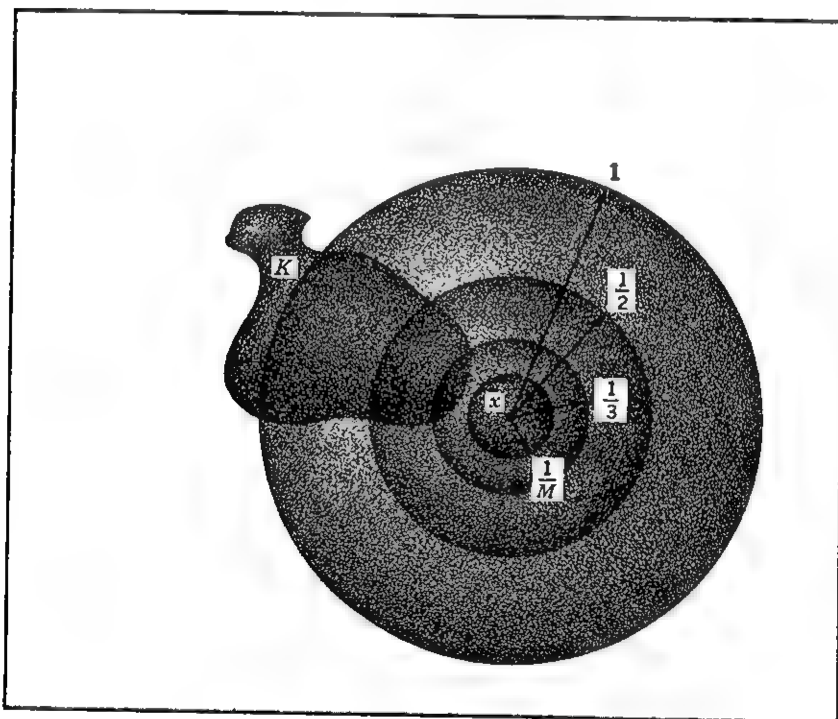
* إدوارد هاين (١٨٢١ – ١٨٨١) درس فى برلين من ڤيرشتراس وبعد ذلك تعلم فى بون وهاليه . وفى سنة ١٨٧٢ برهن أن الدالة المتصلة فى فترة مغلقة تكون متصلة بانتظام .
(ف . أ . ج) إميل بوريل (١٨٧١ – ١٩٥٦) كان تلميذاً لهرميت ثم كان أستاذاً فى باريس وكان من أبرز الرياضيين فى عصره . وقد أسهم بعمق وبغزارة فى التحليل والاحتمالات . وفى سنة ١٨٩٥ برهن على أنه إذا كانت مجموعة محسوبة لفترات مفتوحة تغطى فترة مغلقة فحينئذ يكون لها غطاء جزئى محدود .

لجميع الفئات $G_m, m \in N$ من كل نقط R^p ماعدا x . بما أن $x \notin K$ ، فإن كل نقطة من الفئة K تنتمى إلى فئة ما G_m . وبسبب الإدماج للفئة K ينتج أنه يوجد عدد طبيعى M بحيث أن K تكون محتوية فى اتحاد الفئات

$$G_1, G_2, \ldots, G_M$$

بما أن الفئات G_m تزداد مع m ، فينتج أن K محتوية فى G_M . ومن ثم لايقطع الجوار $\{z \in R^p : \|z - x\| < 1/M\}$ الفئة K مما يثبت أن $\mathscr{C}(K)$ مفتوحة . وإذن تكون K مقفلة فى R^p (انظر شكل ١١ – ١) حيث صورت الكرات المغلقة المتممة للفئات G_m) .

بعد ذلك سنوضح أنه إذا كانت الفئة K مدمجة فى R^p فإن K تكون محدودة (أى أن K تكون محتوية فى فئة ما $\{x \in R^p : \|x\| < r\}$ عندما تكون a كبيرة كبراً



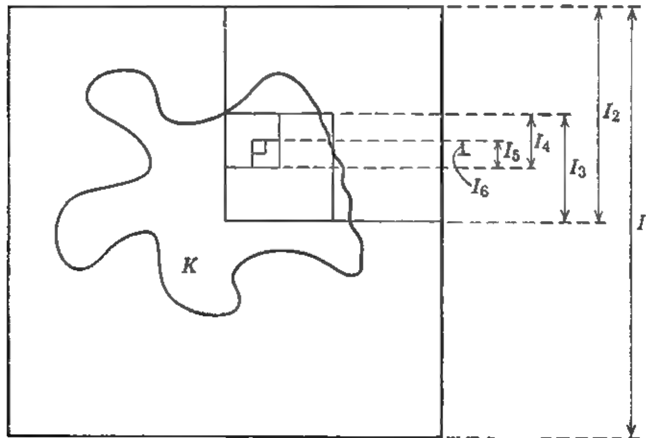
(شكل ١١ – ١) فئة مدمجة تكون مغلقة

كافياً . وفى الحقيقة لكل عدد طبيعى m ، نفرض H_m هى الفئة المفتوحة المعرفة بالتالى :

$$H_m = \{x \in R^p : \|x\| < m\}$$

الفراغ الشامل R^p ، ومن ثم K تكون محتوية فى الاتحاد للفئات المتزايدة $H_m, m \in N$ بما أن K مدمجة فإنه يوجد عدد طبيعى M بحيث أن $K \subseteq H_M$. وهذا يثبت أن K محدودة .

ولإكمال البرهان لهذه النظرية نحتاج لتوضيح أنه إذا كانت K فئة مغلقة ومحدودة ومحتوية فى الاتحاد لمجموعة $\mathcal{G}=\{G_\alpha\}$ لفئات مفتوحة فى R^p ، فإنها تكون محتوية فى الاتحاد لعدد محدود ما من الفئات فى $\mathcal{G}$. وبما أن الفئة K محدودة فيمكن حصرها فى خلية مغلقة I فى R^p . مثال ذلك ، يمكننا أخذ $I_1 = \{(x_1, \ldots, x_p) : |x_k| \le r,\ k = 1, \ldots, p\}$ حيث $r > 0$ وكبيرة بدرجة قياسية . ولغرض الحصول على تناقض سنفترض أن الفئة K ليست محتواة فى اتحاد لأى عدد محدود من الفئات فى $\mathcal{G}$. ولذلك تحتوى على الأقل إحدى الخلايا المغلقة التى عددها 2^p والتى يمكن الحصول عليها بتنصيف أضلاع I_1 نقطا للفئة K وبحيث أن جزء الفئة K فيها لايكون محتوياً فى اتحاد أى عدد محدود من الفئات فى $\mathcal{G}$. (لأنه إذا كان كل من 2^p جزءاً للفئة K محتوياً فى اتحاد عدد محدود للفئات فى $\mathcal{G}$ فإن K ستكون محتوية فى اتحاد عدد محدود من الفئات فى $\mathcal{G}$. بخلاف الفرض) نفرض أن I_2 أى إحدى الخلايا الجزئية فى هذا التقسيم الجزئى لخلية I_1 والتى تكون بحيث لاتكون الفئة غير الخالية $K \cap I_2$ محتواة فى اتحاد أى عدد محدود من الفئات فى $\mathcal{G}$. نستمر فى هذه العملية بتنصيف أضلاع I_2 لنحصل على 2^p خلايا جزئية مغلقة من الخلية الجزئية I_2 . ونفرض أن I_3 هى إحدى هذه الخلايا الجزئية بحيث لاتكون الفئة غير الخالية $K \cap I_3$ محتواة فى اتحاد عدد محدود من الفئات فى $\mathcal{G}$ وهكذا .



(شكل ١١ – ٢)

بهذه الطريقة يمكننا الحصول على متتابعة متداخلة (I_n) لخلايا غير خالية (انظر شكل ٢ – ١١) وطبقاً لنظرية الخلايا المتداخلة توجد نقطة y مشتركة لخلية I_n لأن كل I_n تحتوى نقطاً فى K ، والعنصر المشترك y هو نقطة تجميع للفئة K وبما أن K مغلقة فحينئذ تنتمى y إلى K وتكون محتوية فى فئة مفتوحة ما G فى $\mathscr{G}$ لذلك يوجد عدد $\varepsilon > 0$ بحيث تنتمى جميع النقط w حيث $\|y-w\|<\varepsilon$ إلى G_λ . وبمعنى آخر يحصل على الخلايا $I_k, k \geq 2$ بتنصيف متتال لأضلاع الخلية $I_1 = \{(x_1, \ldots, x_p) : |x_i| \leq r\}$ وإذن يكون طول الضلع للتقسيم الجزئى I_k هو $r/2^{k-2}$. ومن ذلك ينتج من نظرية ٨–١٠ أنه إذا كانت $w \in I_k$ فإن $\|y-w\| \leq r\sqrt{p}/2^{k-3}$. ومن ثم ، إذا كانت اختيرت k كبيرة جداً لدرجة أن $r\sqrt{p}/2^{k-3} < \varepsilon$ فإن جميع النقط فى I_k تكون محتواة فى الفئة الفردية G_λ . لكن هذا يخالف تركيب I_k كفئة بحيث لاتكون $K \cap I_k$ محتواة فى الاتحاد لعدد محدود من الفئات فى $\mathscr{G}$. وهذا التناقض يوضح أن فرض كون الفئة المحدودة المغلقة K تتطلب عدداً لانهائياً من الفئات فى $\mathscr{G}$ لاحتوائها لايمكن تأييده .

وهو المطلوب إثباته

بعض التطبيقات :

كنتيجة لنظرية هاين بوريل فإننا نحصل على النتيجة التالية والتى أوجدها كانتور . هى تقوية لنظرية الخلايا المتداخلة حيث تعتبر هنا الفئات المغلقة فى الحالة العامة وليست بالضبط خلايا مغلقة .

١١ – ٤ نظرية تقاطع كانتور . نفرض أن F_1 فئة جزئية محدودة مغلقة وغير خالية ونفرض أن

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$$

هى متتابعة لفئات مغلقة وغير خالية . حينئذ يوجد نقطة تنتمى إلى جميع الفئات $\{F_k : k \in N\}$.

البرهان . بما أن F_1 مغلقة ومحدودة ، فينتج من نظرية هاين بوريل أن F_1 مدمجة . لكل $k \in N$ نفرض أن G_k هى متممة F_k فى R^p . وبما أننا فرضنا أن F_k مغلقة فإن G_k مفتوحة فى R^p . وإذا – تتناقض النظرية – لم يوجد نقطة تنتمى لكل الفئات $F_k, k \in N$ ، حينئذ يحتوى اتحاد الفئات $G_k, k \in N$ الفئة المدمجة F_1 ، وإذن تكون الفئة F_1 محتواة فى اتحاد عدد محدود للفئات G_k ، مثلا ، فى $G_1, G_2, \ldots, G_K$ وبما أن G_k تزداد فيكون لدينا $G_1 \cup \cdots \cup G_K = G_K$. وبما أن $F_1 \subseteq G_K$ فينتج أن $F_1 \cap F_K = \emptyset$ ومن الفرض $F_1 \supseteq F_K$ ينتج $F_1 \cap F_K = F_K$. وفرضنا يقودنا إلى استنتاج أن $F_K = \emptyset$ الذى يناقض الفرض . وهذا الاستنتاج يثبت النظرية .

وهو المطلوب إثباته

١١ – ٥ نظرية غطاء لبسيج . نفرض أن $\mathcal{G}=\{G_\alpha\}$ غطاء الفئة الجزئية المدمجة K من R^p . يوجد على سبيل الحصر عدد موجب λ بحيث انه إذا كانت x, y تنتمى إلى K ، $\|x-y\|<\lambda$ حينئذ توجد فئة فى $\mathcal{G}$ تحتوى كل من x ، y .

البرهان . لكل نقطة u فى K ، توجد فئة مفتوحة $G_{\alpha(u)}$ فى $\mathcal{G}$ تحتوى u . نفرض $\delta(u)>0$ بحيث انه إذا كانت $\|v-u\|<2\delta(u)$ فإن v تنتمى إلى $G_{\alpha(u)}$ اعتبر الفئة المفتوحة $S(u)=\{v\in R^p:\|v-u\|<\delta(u)\}$ والمجموعة $\mathcal{S}=\{S(u):u\in K\}$ لفئات مفتوحة . بما أن $\mathcal{S}$ غطاء للفئة المدمجة فإذن تكون K محتواة فى اتحاد عدد محدود من الفئات فى $\mathcal{S}$ مثلا فى $S(u_1),\dots,S(u_n)$. الآن سنعرف λ بأنها العدد الحقيق الموجب المضبوط .

$$\lambda=\inf\{\delta(u_1),\dots,\delta(u_n)\}$$

إذا كانت x, y تنتمى إلى K و $\|x-y\|<\lambda$ فإن x تنتمى إلى $S(u_j)$ لبعض j حيث $1\le j\le n$ اى أن $\|x-u_j\|<\delta(u_j)$. بما أن $\|x-y\|<\lambda$ فنحصل على $\|y-u_j\|\le\|y-x\|+\|x-u_j\|<2\delta(u_j)$. وطبقاً لتعريف $\delta(u_j)$ نستنتج أن كلا من x ، y تنتمى إلى الفئة $G_{\alpha(u_j)}$.

نشير إلى أن عدداً موجباً λ له الخاصية المبنية فى النظرية أحياناً يسمى عدد لبسيج * للغطاء .

مع اننا سوف نستخدم المناقشة المبينة على الإدماج فى الأبواب التالية يظهر من المستحسن أن ندون هنا نتيجتين تبدوان واضحتين بداهة ولكن البرهان يتطلب استخدام نوع ما من مناقشة الإدماج .

١١ – ٦ نظرية أقرب نقطة . نفرض أن F فئة جزئية غير خالية مغلقة من R^p ونفرض أن x هى نقطة خارج F . حينئذ يوجد على الأقل نقطة واحدة y تنتمى إلى F بحيث ان $\|z-x\|\ge\|y-x\|$ لكل $z\in F$.

البرهان . بما أن F مغلقة ، $x\notin F$ ، حينئذ (تمرين ١١ – ح) المسافة من x إلى F ، التى تعرف بأن تكون $d=\inf\{\|x-z\|:z\in F\}$ تحقق $d>0$. فنفرض أن $F_k=\{z\in F:\|x-z\|\le d+1/k\}$ حيث $k\in N$. وطبقاً لمثال تكون (٩ – ٥ و) هذه الفئات مغلقة فى R^p ومن الواضح أن F_1 محدودة وأن $F_1\supseteq F_2\supseteq\cdots\supseteq F_k\supseteq\cdots$.

---

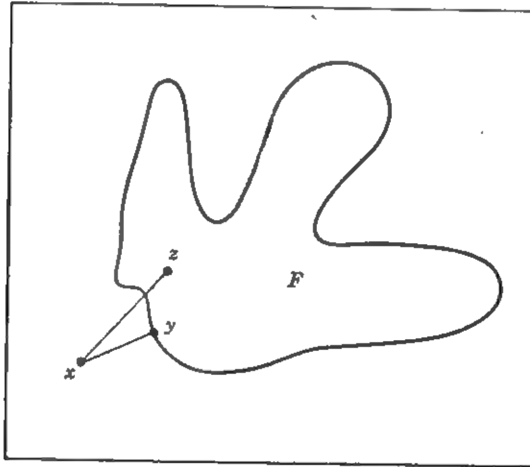
* هنرى لبسيج (١٨٧٥ – ١٩٤١) معروف بأحسن عمله الرائد فى النظرية الحديثة للتكامل الذى أخذ اسمه والذى هو أساس للتحليل الحاضر .

وبالإضافة إلى ذلك نجد من تعريف d ، F_k أن F_k غير خالية وينتج من نظرية تقاطع كانتور ١١ – ٤ أنه توجد نقطة y تنتمى لجميع $F_k, k \in N$ وقد وضحنا تواً أن $\|x - y\| = d$ أى ان y تحقق الاستنتاج (انظر شكل ١١ – ٣) .

وهو المطلوب إثباته

ونظرية مختلفة عن النظرية الآتية لها أهمية اعتبارية فى نظرية الدوال التحليلية. وسنقرر النتيجة فقط عند $p = 2$ وسنستخدم أفكاراً بدهية لمعرفة معنى كون فئة محاطة بمنحنى مغلق (أى منحنى ليس له نهايتان) .

١١ – ٧ نظرية الكونتور المحيط . بفرض أن F فئة محدودة ومغلقة فى R^2 وبفرض أن G فئة مفتوحة تحتوى على F ، حينئذ يوجد منحنى مغلق C يقع بأكمله فى G ويتركب من أقواس لعدد محدود من الدوائر بحيث ان F تكون محاطة بالمنحنى المغلق C .

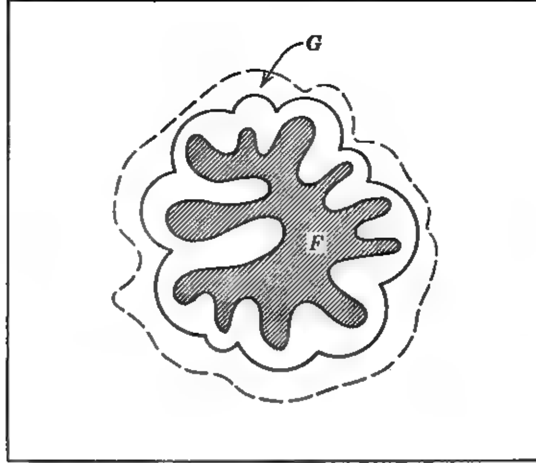


(شكل ١١ – ٣)

برهان جزئى . إذا كانت x تنتمى إلى $F \subseteq G$ فإنه يوجد عدد $\delta(x) > 0$ بحيث انه إذا كانت $\|y - x\| < \delta(x)$ فإن y تنتمى أيضاً إلى G . الآن نفرض

$$G(x) = \{y \in R^2 : \|y - x\| < \tfrac{1}{2}\delta(x)\}$$

لكل x فى F . بما أن المجموعة $\mathscr{G} = \{G(x) : x \in F\}$ تكون غطاء للفئة المدمجة F فينتج أن الاتحاد لعدد محدود . من الفئات فى $\mathscr{G}$ ، مثلا $G(x_1), \ldots, G(x_k)$ يحتوى الفئة



(شكل ١١ – ٤)

المدمجة F . باستخدام أقواس من الدوائر مراكزها x_j وأنصاف أقطارها $\frac{1}{2}\delta(x_j)$ نحصل على المنحنى المطلوب (انظر شكل ١١ – ٤) التركيب التفصيلى للمنحنى سوف لايعطى هنا .

تمرينـات :

١١ – (أ) وضح مباشرة من التعريف (أى بدون استخدام نظرية هاين – بوريل) أن الكرة المفتوحة المعطاة بواسطة $\{(x, y): x^2+y^2<1\}$ ليست مدمجة فى R^2 .

١١ – (ب) أثبت مباشرة أن الفراغ الكلى R^2 غير مدمج .

١١ – (ج) أثبت مباشرة أنه إذا كانت K مدمجة فى R^p ، $F \subseteq K$ فئة مغلقة فإن F تكون مدمجة فى R^p .

١١ – (د) أثبت أنه إذا كانت K فئة جزئية مدمجة من R^2 فحينئذ تكون مدمجة عند اعتبارها فئة جزئية من R .

١١ – (ﻫ) بتعديل المناقشة فى مثال ١١ – ٢ (د) أثبت أن الفترة $J=\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ مدمجة فى R^2 .

١١ – (و) حدد مواقع الأماكن فى برهان نظرية هاين بوريل التى استخدمت فيها الفروض بأن K محدودة ومغلقة .

١١ – (ز) أثبت نظرية تقاطع كانتور باختيار نقطة x_n من F_n ثم بتطبيق نظرية بولزانو – ڤيرشتراس ١٠ – ٦ على الفئة $\{x_n : n \in N\}$.

١١ – (ح) إذا كانت F مغلقة فى R^p وإذا كانت $F \neq \emptyset$

$$d(x, F) = \inf\{\|x - z\| : z \in F\} = 0$$

حينئذ تنتمى x إلى F .

١١ – (ط) هل نظرية أقرب نقطة فى R تدل على أنه يوجد عدد حقيقى موجب على سبيل الحصر أقرب ما يمكن من الصفر ؟

١١ – (ى) إذا كانت F فئة مغلقة غير خالية فى R^p وإذا كانت $x \notin F$ هل توجد نقطة وحيدة من F بحيث تكون أقرب ما يمكن من x ؟

١١ – (ك) إذا كانت K فئة جزئية مدمجة من R^p ، x نقطة من R^p ، فحينئذ تكون الفئة $K_x = \{x + y : y \in K\}$ مدمجة أيضاً (هذه الفئة K_x أحياناً تسمى إزاحة الفئة K بالنقطة x) .

١١ – (ل) تكون تقاطع فئتين مفتوحتين مدمجة إذا وإذاً فقط كانت خالية . هل يمكن أن يكون التقاطع لمجموعة لانهائية لفئات مفتوحة فئة مدمجة غير خالية ؟

١١ – (م) إذا كانت F فئة جزئية مدمجة من R^2 ، G فئة مفتوحة تحتوى على F ، حينئذ يوجد منحنى C مغلق كثير الأضلاع يقع بأكمله فى G بحيث يحوط F .

١١ – (ن) بفرض $\{H_n : n \in N\}$ هى فئات جزئية مغلقة من R^p بخاصية أن فئة مثل H_n لاتحتوى على فئة مفتوحة غير خالية (مثال ذلك ، H_n هى نقطة أو خط فى R^2 وبفرض $G \neq \emptyset$ هى فئة مفتوحة وضح :

(أ) إذا كانت $x_1 \in G \setminus H_1$ فوضح أنه يوجد كرة مغلقة B_1 مركزها x ، بحيث ان $B_1 \subseteq G$ و $H_1 \cap B_1 = \emptyset$.

(ب) إذا كانت $x_2 \notin H_2$ تنتمى إلى داخل B_1 ، فوضح أنه يوجد كرة مغلقة B_2 مركزها x_2 وبحيث ان B_2 تكون محتواة فى داخل B_1 وأن $H_2 \cap B_2 = \emptyset$.

(ج) استمر فى هذه العملية لتحصل على عائلة متداخلة لكرات مغلقة بحيث ان $H_n \cap B_n = \emptyset$. بنظرية تقاطع كانتور ١١ – ٤ توجد نقطة x_0 مشتركة لجميع الكور المغلقة B_n . استنتج أن $x_0 \in G \setminus \bigcap H_n$ بحيث ان G لايمكن تكون محتواة فى $\bigcup H_n$ هذه النتيجة على صورة تسمى غالباً بنظرية طبقة بير * .

١١ – (س) خط فى R^2 هو فئة من نقط (x, y) التى تحقق معادلة على الصورة

---

* رنيه لويس بير (١٨٧٤ – ١٩٣٢) كان أستاذاً فى ديجون وقد بحث فى نظرية الفئة والتحليل الحقيقى .

$ax+by+c=0$ حيث $(a,b)\neq(0,0)$ استخدم التمرين السابق لتوضيح أنه ليس اتحاد مجموعة عددية من الخطوط .

١١ – (ع) الفئة $\mathscr{C}(\boldsymbol{Q})$ لأعداد غير قياسية فى $\boldsymbol{R}$ ليست اتحاداً لعائلة عددية لفئات مغلقة، لايوجد أحد منها بحيث يحتوى على فئة مفتوحة غير خالية .

١١ – (ف) الفئة $\boldsymbol{Q}$ لأعداد قياسية ليست التقاطع لمجموعة عددية لفئات مفتوحه فى $\boldsymbol{R}$.

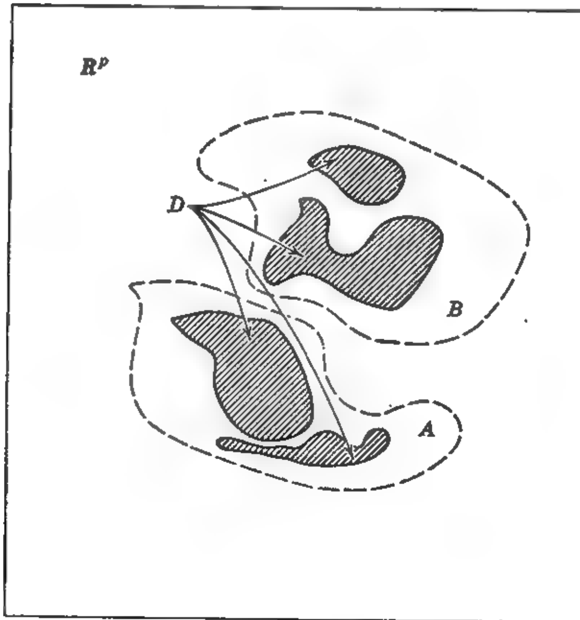
الباب الثانى عشر ــ الفئات المتصلة :

سنقدم الآن مفهوم الفئة المتصلة التى ستستخدم من وقت لآخر فيما يلى :

١٢ – ١ تعريف . يقال لفئة جزئية $D\subseteq \boldsymbol{R}^p$ أنها غير متصلة إذا كان يوجد اثنتان مفتوحتان B ، A بحيث ان $A\cap D$ و $B\cap D$ منفصلتان وغير خاليتين ولهما اتحاد D. فى هذه الحالة يقال للزوج A و B بأنه يكون عدم اتصال أو قطع للاتحاد D يقال للفئة الجزئية التى لا تكون غير متصلة أنها متصلة (أنظر شكل ١٢ – ١) .

١٢ – ٢ أمثلة (أ) الفئة $\boldsymbol{N}\subseteq \boldsymbol{R}$ غير متصلة حيث يمكننا أخذ

$A=\{x\in \boldsymbol{R}:x<3/2\}$ و $B=\{x\in \boldsymbol{R}:x>3/2\}$



(شكل ١٢ – ١١) فئة غير متصلة

(ب) الفئة $H = \{1/n : n \in N\}$ غير متصلة .

(ج) الفئة S المتكونة من جميع أعداد قياسية موجبة غير متصلة فى R حيث يمكننا أخذ $A = \{x \in R : x < \sqrt{2}\}$ و $B = \{x \in R : x > \sqrt{2}\}$

(د) إذا كانت $0 < c < 1$ حينئذ الفئات $A = \{x \in R, x \leq c\}, B = \{x \in R : x > c\}$ تشق فترة الوحدة $I = \{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$ إلى فئات غير خالية غير متصلة باتحاد I لكن بما أن A ليست مفتوحة فإن هذا مثال لا يوضح أن I غير متصلة وفى الحقيقة سنوضح فيما يلى أن الفئة I متصلة .

١٢ – ٣ نظرية . فترة الوحدة المغلقة $I = [0, 1]$ فترة جزئية متصلة من R .

البرهان . سنبدأ بالتناقض ونفرض أن B ، A فئتان مفتوحتان يكونان عدم اتصال لفترة الوحدة I . أى ان $B \cap I$ ، $A \cap I$ فئتان محدودتان غير خاليتين وغير متصلتين واتحادهما هو I . بما أن كلا من A ، B مفتوحة فلا يمكن أن تتكون الفئات $A \cap I$ ، $B \cap I$ من نقطة واحدة فقط (لماذا ؟) . لأجل التحديد نفرض أنه يوجد نقط $a \in A$ ، $b \in B$ بحيث ان $0 < a < b < 1$. باستخدام خاصية العلو ٦ – ٤ نأخذ $c = \sup\{x \in A : x < b\}$ بحيث أن $0 < c < 1$. ومن ثم $c \in A \cup B$ إذا كانت $c \in A$ ، حينئذ $c \neq b$ وبما أن A مفتوحة فيوجد نقطة $a_1 \in A, c < a_1$ بحيث ان الفترة $[c, a_1]$ تكون محتواة فى $\{x \in A : x < b\}$ يتناقض لتعريف c . بالمثل إذا كانت $c \in B$ حينئذ بما أن B مفتوحة فتوجد نقطة $b_1 \in B, b_1 < c$ بحيث ان الفترة $[b_1, c]$ تكون محتواة فى $B \cap I$ يتناقض تعريف c . ومن ثم الفرض بأن I غير متصلة يقودنا إلى تناقض ،وهو المطلوب إثباته .

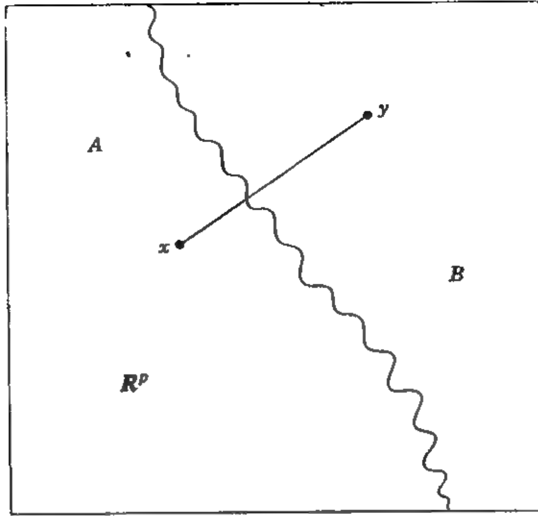
القارىء سيلاحظ أن نفس البرهان يمكن استخدامه لتوضيح أن الفترة المفتوحة $(0,1)$ تكون متصلة فى R .

١٢ – ٤ نظرية . الفراغ الشامل R^p يكون متصلا .

البرهان . إذا لم يكن الفراغ متصلا ، فحينئذ توجد فئتان A, B مفتوحتان غير خاليتين وغير متصلتين واتحادهما هو R^p : (أنظر شكل ١٢ و ٢) . نفرض أن $x \in A$ ، $y \in B$ واعتبر S هى قطعة من خط يصل x و y ، أى

$$S = \{x + t(y - x) : t \in I\}$$

نفرض $A_1 = \{t \in R : x + t(y - x) \in A\}$ ونفرض $B_1 = \{t \in R : x + t(y - x) \in B\}$ من السهل ملاحظه أن A_1 و B_1 فئتان جزئيتان غير خاليتين وغير متصلتين من R وهذا يعطى عدم اتصال لفترة الوحدة I مما يخالف نظرية ١٢ – ٣ . وهو المطلوب إثباته



(شكل ١٢ – ٢)

١٢ – ٥ نتيجة . الفئتان الجزئيتان الوحيدتان من R^p والتي كلاهما مفتوحة ومغلقة هما $\emptyset$ ، R^p .

البرهان . لأنه إذا كانت A مفتوحة ومغلقة في وقت واحد في R^p فحينئذ $B = R^p \setminus A$ تكون أيضاً مفتوحة ومغلقة . وإذا كانت A غير خاليه وليست كل R^p فحينئذ يكون الزوج A, B ، عدم اتصال من R^p وهذا يخالف النظرية . وهو المطلوب إثباته

الفئات المفتوحة المتصلة :

تلعب الفئات المتصلة دوراً هاماً وخاصاً في قطاعات معينة من التحليل . وباستخدام التعريف يكون من السهل تقرير النتيجة الآتية :

١٢ – ٦ مفترض . فئة جزئية مفتوحة من R^p تكون متصلة إذا وإذا فقط كانت بحيث لايمكن التعبير عنها كاتحاد لفئتين مفتوحتين غير خاليتين وغير متصلتين .

يكون من المفيد أحياناً أن يكون لدينا تمييز آخر للفئات المتصلة المفتوحة . ولأجل إعطاء مثل هذا التمييز سندخل بعض مصطلحات . إذا كانت x و y نقطتين في R^p فحينئذ يكون منحنى مضلع يصل x ، y هو فئه P التي تحصل عليها كاتحاد لعدد محدود لقطع خطة مرتبة $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ في R^p بحيث ان القطعة الخطية L_1 يكون طرفاها

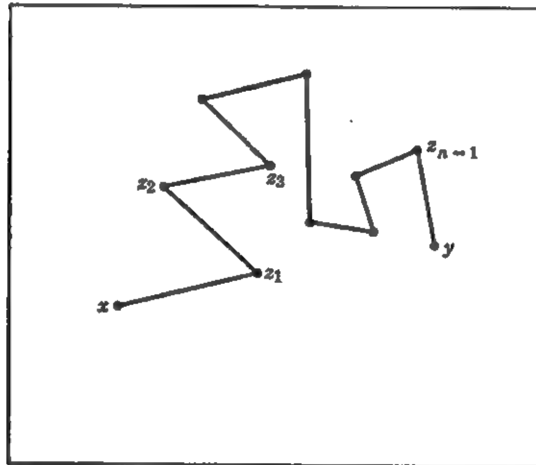
هما z_1 و x ، ونهايتا القطعة الخطية L_2 هما $z_1, z_2; \ldots$ والقطعة الخطية L_n يكون لها الطرفان z_{n-1}, y (انظر شكل ١٢ – ٣)

١٢ – ٧ نظرية . بفرض G فئة مفتوحة فى R^p فإن G تكون متصلة إذا وإذا فقط كان أى زوج من النقطتين y و x فى G بحيث يمكن اتصالها بمنحنى مضلع يقع بأكله فى G .

البرهان . نفرض أن G ليست متصلة وأن B و A قطع أو عدم اتصال فى G . فإذا فرضنا أن $x \in A \cap G$ ، $y \in B \cap G$ ونفرض أن $P = (L_1, L_2, \ldots, L_n)$ هى منحنى مضلع يقع بأكله فى G ويصل x ، y . نفرض أن k هى أصغر عدد طبيعى بحيث ان الطرف z_{k-1} للقطعة الخطية L_k ينتمى إلى $A \cap G$ والطرف z_k ينتمى إلى $B \cap G$ (انظر شكل ١٢ – ٤) . إذا عرفنا A_1 ، B_1 بالتالى

$$A_1 = \{t \in \boldsymbol{R} : z_{k-1} + t(z_k - z_{k-1}) \in A \cap G\},$$
$$B_1 = \{t \in \boldsymbol{R} : z_{k-1} + t(z_k - z_{k-1}) \in B \cap G\}$$

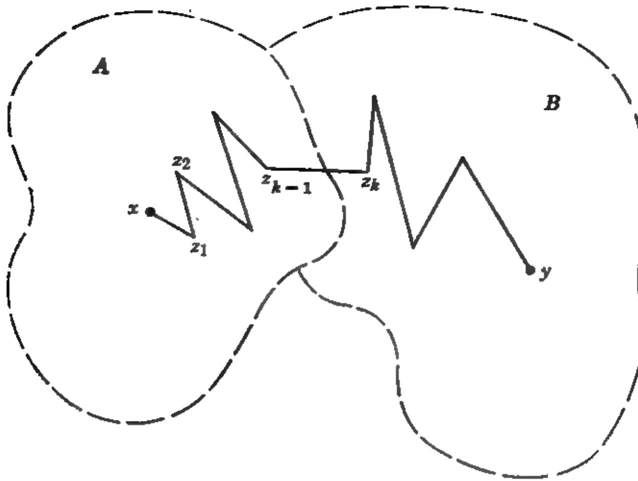
حينئذ يكون من السهل ملاحظة أن A_1 و B_1 تكونان فئتين جزئيتين مفتوحتين غير خاليتين وغير



(شكل ١٢ – ٣) منحنى مضلع

متصلتين من $\boldsymbol{R}$. ومن ثم يكون الزوج B_1 و A_1 قطعا لفترة الوحدة مما يخالف نظرية ١٢ – ٣ . لذلك إذا كانت G غير متصلة فيوجد نقطتان فى G بحيث لا يمكن إيصالها بمنحنى مضلع فى G .

بعد ذلك نفرض أن G فئة متصلة مفتوحة فى R^p وأن x تنتمى إلى G . ونفرض أن G_1 هى الفئة الجزئية من G والتى تتكون من كل النقط فى G التى يمكن وصلها بالنقطة x بمنحنى



(شكل ١٢ – ٤)

مضلع يقع بأكله فى G ، نفرض أن G_2 تتكون من كل النقط فى G والتى لايمكن وصلها إلى x بواسطة منحنى مضلع واقع فى G . من الواضح أن $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. الفئة G_1 ليست خالية حيث انها تحتوى النقطة x . والآن سنوضح أن G_1 مفتوحة فى R^p . إذا كانت y تنتمى إلى G_1 فينتج من حقيقة كون G مفتوحة أنه لعدد حقيقى ما $r > 0$ ، تدل $\|w - y\| < r$ إذن على أن $w \in G$. ومن تعريف G_1 نجد أن النقطة y يمكن اتصالها بالنقطة x بواسطة منحنى مضلع وبإضافة قطعة خطية من y إلى w ، نستنتج أن w تنتمى إلى G_1 . ومن ثم تكون G_1 فئة جزئية مفتوحة فى R^p . بالمثل الفئة الجزئية G_2 تكون مفتوحة فى R^p . إذا كانت G_2 ليست خالية حينئذ الفئتان G_2 و G_1 يكونان قطعاً أو عدم اتصال فى G مما يخالف الفرض بأن G متصلة . وإذن $G_2 = \emptyset$ وكل نقطة من G يمكن وصلها إلى x بمنحنى مضلع واقع بأكله فى G . وهو المطلوب إثباته

فئات متصلة فى R :

ننهى هذا الباب بتوضيح أن الفئات الجزئية المتصلة فى R تكون بالضبط الفترات (انظر باب ٧) .

١٢ – ٨ نظرية . فئة جزئية R تكون متصلة إذا وإذاً فقط كانت فترة .

برهان جزئى . البرهان المعطى فى نظرية ١٢ – ٣ يمكن تعديله بسهوله لتوطيد الاتصال لفترة اختيارية غير خالية . سنترك التفصيلات للقارىء .

وبالعكس ، نفرض أن $C \subseteq \mathbf{R}$ متصلة ونفرض أن $C \neq \emptyset$. نلاحظ أن C لها الخاصية التى تقول أنه إذا كانت $b \in C$ و a و $a < b$ ، فإن أى عدد c محقق $a < c < b$ يجب أن ينتمى أيضاً إلى G ، لأنه إذا كانت $c \notin C$ فإن الفئتين

$$A = \{x \in \mathbf{R} : x < c\} \quad \text{و} \quad B = \{x \in \mathbf{R} : x > c\}$$

يكونان قطعاً أو عدم اتصال فى C .

(i) الآن نفرض أن C محدودة من أعلى ومحدودة من أسفل ونفرض $a = \inf C$ ، $b = \sup C$ سنوضح أن C يجب أن تأخذ إحدى الصور الأربع التالية:

$$[a, b], \quad [a, b), \quad (a, b], \quad (a, b)$$

وفى الحقيقة ، إذا كانت $a \in C$ ، $b \in C$ فقد رأينا حينئذ فى البند السابق أن $[a, b] \subseteq C$ والحقيقة بأن $C \subseteq [a, b]$ تنتج من حقيقة كون b ، a هما الحد الأسفل والحد الأعلى على الترتيب للمقدار C .

إذا كانت $a \in C$ لكن $b \notin C$ نفرض أن b' أى عدد حيث $a \leq b' < b$. بما أن $b = \sup C$ فإنه يجب وجود عنصر $b'' \in C$ بحيث ان $a \leq b' < b''$. لذلك يجب أن ينتمى العنصر b' إلى C وبما أن b' أى عدد يحقق $a \leq b' < b$ فنستنتج أن $C = (a, b)$.

بالمثل إذا كان $a \notin C$ لكن $b \in C$ فنستنتج أن $C = (a, b]$ بينما إذا كانت $a \notin C$ فإذن نستنتج أن $C = (a, b)$.

(ii) الآن نفرض أن C محدودة من أسفل وليست محدودة من أعلى ونفرض أن $a = \inf C$ بحيث ان $C \subseteq [a, +\infty)$. إذا كانت $a \in C$ وكانت x أى عدد حقيقى حيث $a \leq x$ حينئذ – بما أن C ليست محدودة من أعلى – فيوجد $c \in C$ بحيث ان $x \leq c$ ومن ثم ينتج من الخاصية السابقة أن $x \in C$. بما أن x أى عدد اختيارى يحقق $a \leq x$ فنستنتج أن $C = [a, +\infty)$.

بالمثل إذا كانت $a \notin C$ فنستنتج أن $C = (a, +\infty)$.

(iii) إذا كانت C ليست محدودة من أسفل لكن محدودة من أعلى وإذا كانت $b = \sup C$ حينئذ يوجد حالتان $C = (-\infty, b)$ أو $C = (-\infty, b]$ على حسب كون $b \in C$ أو $b \notin C$.

(iv) أخيراً ، إذا كانت C ليست محدودة من أسفل وليست محدودة من أعلى حينئذ يكون لدينا الحالة $C = (-\infty, +\infty)$. وهو المطلوب إثباته

تمرينـــات :

١٢ – (أ) إذا كانت A ، B فئتين جزئيتين متصلتين من R^p ، اعط أمثلة لتوضيح أن $A \cup B$ ، $A \cap B, A \setminus B$ يمكن أن تكون إما متصلة أو غير متصلة .

١٢ – (ب) إذا كانت $C \subseteq R^p$ متصلة ، x نقطة تجميع من C فإن $C \cup \{x\}$ تكون متصلة .

١٢ –(ج) إذا كانت $C \subseteq R^p$ متصلة ، وضح أن أقفالها C^- (انظر تمرين ٩ – ل) متصل أيضاً .

١٢ – (د) فئة $D \subseteq R^p$ تكون غير متصلة إذا وإذا فقط كانت $D = E \cup F$ حيث E, F فئتان غير خاليتين وحيث $E \cap F^- = \emptyset, E^- \cap F = \emptyset$

١٢ – (ﻫ) إذا كانت $K \subseteq R^p$ محدبة (انظر تمرين – ٨ ف) فإن K متصلة .

١٢ – (و) الفئة F لكانتور غير متصلة باتساع . وضح أنه إذا كانت $x, y \in F, x \neq y$ حينئذ يوجد عدم اتصال للفئة A و B بحيث إن F $x \in A, y \in B$.

١٢ – (ز) إذا كانت C_1، C_2 فئتين جزئيتين متصلتين من R فحينئذ يكون حاصل الضرب $C_1 \times C_2$ فئة جزئية متصلة من R^2 .

١٢ –(ح) أثبت أن الفئة

$$A = \{(x, y) \in R^2 : 0 < y \leq x^2, x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$$

تكون متصلة فى R^2 . لكن لا يوجد منحنى مضلع يقع بأكله فى A بحيث يصل النقطة (0,0) إلى النقط الأخرى فى الفئة

١٢ – (ط) أثبت أن

$$S = \left\{(x, y) \in R^2 : y = \sin\frac{1}{x}, x \neq 0\right\} \cup \left\{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\right\}$$

متصلة فى R^2 . لكن ليس ممكناً دائماً اتصال نقطتين فى S بمنحنى مضلع (أو أى منحنى مستمر) واقع بأكله فى S .

الباب الثالث عشر ـــ نظام الاعداد المركبة :

نظام العدد الحقيقى الموجود قبل ذلك يجعل الأمر سهلا لأن نتذكر نظام العدد المركب وسنشير فى هذا الباب إلى كيفية تركيب الحقل المركب(*) .

(*) هذا الباب يمكن حذفه عند أول قراءة .

كما رأينا سابقاً نظام العدد الحقيقى هو حقل الذى يحقق خواص إضافية معينة . فى باب ٨ كونا الفراغ الكارتيزى R^p وأدخلنا بعض العمليات الجبرية $p-$ طية لحاصل الضرب الكارتيزى للفراغ R . لكن لم نشكل R^p إلى حقل . وسيظهر مما يثير الدهشة أنه ليس ممكناً أن نعرف حاصل ضرب الذى يجعل R^p ، $p \geq 3$ حقلا . وبالرغم من ذلك نجد من الممكن أن نعرف عملية حاصل ضرب فى $R \times R$ التى تشكل هذه الفئة إلى حقل . والآن سنورد العمليات المطلوبة .

١٣ - ١ تعريف . نظام العدد المركب C يتكون من أزواج مرتبة (x, y) لأعداد حقيقية بعملية الجمع المعرفة بما يلى

$$(x, y)+(x', y')=(x+x', y+y')$$

وعملية حاصل الضرب المعرفة بما يلى

$$(x, y)\cdot(x', y')=(xx'-yy', xy'+x'y)$$

أى إن نظام العدد المركب C له نفس العناصر مثل فراغ البعدين R^2 . وله نفس عملية الجمع ولكنه يملك حاصل ضرب بينما R^2 ليس له حاصل ضرب . وإذن - باعتبارهما فئات فقط - نجد أن C و R^2 متساويان حيث لهما نفس العناصر ولكن هما من وجهة نظر الجبر ليسا نفس الشئ لأنهما يقتنيان عمليات مختلفة .

عنصر من C يسمى عدد مركب وغالباً يرمز له بحرف مفرد مثل z . وإذا كانت $z=(x, y)$ حينئذ نشير إلى العدد الحقيقى x بالجزء الحقيقى من z وإلى y بالجزء التخيلى من z وبالرموز

$$x=\operatorname{Re} z, \qquad y=\operatorname{Im} z$$

العدد المركب $\bar{z}=(x, -y)$ يسمى المرافق للعدد $z=(x, y)$.

حقيقة هامة هى أن تعريف حاصل الجمع وحاصل الضرب المعطى سابقاً لعناصر تشكلها إلى « حقل » بمعنى الجبر المجرد . أى إنها تحقق الخواص الجبرية المسجلة فى ٤ - ١ بشرط إبدال العدد 0 فى (A_3) بالزوج $(0, 0)$ ، العنصر المناظر إلى $-a$ فى (A_4) هو الزوج $(-x, -y)$ وإبدال العدد 1 فى (M_3) بالزوج $(1, 0)$ والعدد المناظر إلى $1/a$ هو الزوج

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

حيث $(x, y) \neq (0, 0)$.

نجد أحياناً من المناسب أن نصطلح على الرموز فى باب ٨ ونكتب

$$az = a(x, y) = (ax, ay)$$

حيث a هو العدد الحقيقى ، $z = (x, y)$ يكون فى C . يتضح من هذا الرمز أن كل عنصر فى C له تمثيل وحيد فى صورة جمع لحاصل ضرب عدد حقيقى $(1, 0)$ وحاصل ضرب عدد حقيقى $(0, 1)$. أى إنه يمكننا أن نكتب

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

بما أن العنصر $(1, 0)$ هو العنصر المحايد فى C فمن الطبيعى أن نرمز له بالرمز 1 (أو لا نكتبها مطلقاً إذا كانت معامل) . ولأجل الاختصار نجد من المناسب أن ندخل رمزاً يدل على $(0, 1)$ ، i هو الاختيار المناسب .

وبهذا الرمز ، نكتب

$$z = (x, y) = x + iy$$

بالإضافة إلى ذلك يكون عندنا $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$

و

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

بتعريف ١٣ - ١ يكون عندنا $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$ التى يمكن كتابتها مثل $i^2 = -1$. أى إنه فى C تكون معادلة الدرجة الثانية

$$z^2 + 1 = 0$$

لها حل . السبب التاريخى لتطوير نظام العدد المركب كان محصولا على نظام للأعداد التى فيه يكون لكل معادلة الدرجة الثانية حل . وقد تحقق أن ليس لكل معادلة بمعاملات حقيقية حل حقيقى ولذلك ابتكرت الأعداد المركبة لعلاج هذا النقص . وهناك حقيقة معروفة وهى أن ليس فقط أن الأعداد المركبة تكفى لإنتاج حلول لكل معادلة الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية ولكن أيضاً تكفى الأعداد المركبة لضمان الحلول لأى معادلة كثيرة الحدود بدرجة اختيارية ومعاملات يمكن أن تكون أعداد مركبة . هذه النتيجة تسمى بالنظرية الأساسية فى الجبر وقد برهنت لأول مرة بواسطة جاوس العظيم(*) فى عام ١٧٩٩ .

(*) كارل فريدرش جاوس (١٧٧٧ — ١٨٥٥) وكان الابن العظيم لعامل يومى ، وكان واحدا من أعظم الرياضيين ولكن أيضا يذكر بعمله فى الفلك والطبيعة والمساحة التطبيقية . وقد أصبح أستاذا ومديرا للمرصد فى جيتنجن بالمانيا الغربية .

مع أن C لا يمكن أن تعطى الخواص المرتبة التي بحثت في الباب الخامس ، فمن السهل أن يهبها بالقياس وبالتركيب التوبولوجى في الباب الثامن والباب التاسع لأنه إذا كانت $z = (x, y)$ تنتمى إلى C فنعرف القيمة المطلقة للمقدار z بأنه

$$|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

ويرى بسهولة أن القيمة المطلقة المعرفة حالياً لها الخواص الآتية

(i) $|z| \geq 0$

(ii) $|z| = 0$ إذا وإذا فقط $z = 0$

(iii) $|wz| = |w|\,|z|$

(iv) $||w| - |z|| \leq |w \pm z| \leq |w| + |z|$

ويلاحظ أن القيمة المطلقة للعدد المركب $z = (x, y)$ هى بالضبط نفس العمود للعنصر (x, y) فى R^2 . لذلك تكون جميع الخواص التوبولوجية للفراغات الكارتيزية التى قدمت ودرست فى أبواب ٩ إلى ١٢ هى ذات المعنى وصحيحة لنظام العدد المركب C . وبوجه خاص ، مدلولات الفئات المفتوحة والمتعلقة فى C هى تماماً اللازمة للفراغ الكارتيزى R^2 .

وبالإضافة إلى ذلك تطبق نظرية بولزانو – فيرشتراس ١٠ – ٦ ونظرية هاين – بوريل ١١ – ٣ ونتائجها أيضاً فى C وأيضاً تطبق نظرية ١٢ – ٧ .

القارئ يجب أن يحفظ هذه الملاحظات الذاكرة أثناء دراسته الجزء الباقى من هذا الكتاب . وسيلاحظ أن كل المادة التالية التى تستخدم للفراغات الكارتيزية ببعد أكثر من واحد تستعمل على حد سواء لنظام العدد المركب . أى إن معظم النتائج التى سيحصل عليها والمتعلقة بالمتتابعات والدوال المستمرة والمشتقات والتكاملات والمتسلسلات اللانهائية تكون أيضاً صحيحة لنظام العدد المركب C بدون تغيير إما فى النص أو فى البرهان . والاستثناءات الوحيدة فى هذا التقرير هى تلك الخواص التى أسست على الخواص المرتبة للفراغ R .

وبهذا المعنى يكون التحليل المركب حالة خاصة للتحليل الحقيقى ، لكى يوجد عدد من الملامح الحديثة الهامة والعميقة لدراسة الدوال الهولومورفية التى ليس لها جزء مقابل فى مملكة التحليل الحقيقى . وإذن سنجمع جزئياً المظاهر السطحية للتحليل المركب فى الجزء الذى سنقدمه .

تمرينـــات :

١٣ – (أ) وضح أن العدد المركب iz يحصل عليه من z بدوران $\pi/2$ زاوية نصف قطرية فى عكس اتجاه عقارب الساعة ($= 90^\circ$) حول نقطة الأصل .

١٤ – (ب) إذا كانت $c = (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ فحينئذ العدد cz يمكن الحصول عليه من z بدوران θ زاوية نصف قطرية ضد عقارب الساعة حول نقطة الأصل .

١٣ – (ج) صف العلاقة الهندسية بين الأعداد المركبة z ، $az + b$ حيث $a \neq 0$ ووضح أن الراسم المعرف للعدد المركب $z \in C$ بواسطة $f(z) = az + b$ ينقل دوائر إلى دوائر وخطوط إلى خطوط .

١٣ – (د) صف العلاقات الهندسية بين الأعداد المركبة z, $\bar{z}$ و $1/z$ حيث $z \neq 0$. ووضح أن الرواسم المعرفة بواسطة $g(z) = \bar{z}$ تنقل دوائر إلى دوائر وخطوط إلى خطوط . أي دوائر وخطوط تترك ثابتة كما هي بالراسم g ؟

١٣ – (هـ) وضح أن الرواسم المكسية المعرفة بواسطة $h(z) = 1/z$ تنقل دوائر وخطوط إلى دوائر وخطوط . أي دوائر تنقل إلى خطوط ؟ – أي خطوط تنقل إلى دوائر ؟ افحص الصور تحت h للخطوط الرأسية المعطاة بالمعادلة . ثابت = $\operatorname{Re} z$ ، والخطوط الأفقية ثابت = $\operatorname{Im} z$ ، الدوائر = $|z|$ ثابت .

١٣ – (و) افحص الصفة الهندسية المميزة للرواسم المعرفة بواسطة $g(z) = z^2$ حدد ما إذا كان الراسم g هو واحد إلى واحد وما إذا كان الراسم g ينقل C إلى جميع C . افحص الصور تحت g للخطوط

$\operatorname{Re} z =$ ثابت و $\operatorname{Im} z =$ ثابت

والدوائر = $|z|$ ثابت .

الفصـــل الثالث

تقـــــارب

تمدنا المادة العلمية فى الفصلين السابقين بقدر كاف من الفهم لنظام العدد الحقيقى والفراغات الكارتيزية . والآن بما أنه قد وضعت هذه الأساسيات التوبولوجية والجبرية فنصبح مستعدين لتتبع أسئلة ذات طبيعة تحليلية أكثر وسنبدأ بدراسة تقارب المتتابعات وبعض هذه النتائج فى هذا الفصل ربما تكون معروفة للقارئ من مناهج أخرى فى التحليل ولكن يقصد بالتمثيل المعطى هنا بأن يكون أكثر تعمقاً وبأن يعطى نتائج معينة أكثر عمقاً من التى نوقشت عادة فى المناهج السابقة .

أولا سنقدم معنى التقارب المتتابعة التى عناصرها فى R^p ونقر بعض نتائج أولية (لكن مفيدة) عن المتتابعات التقاربية . وحينئذ سنقدم بعض معايير هامة للتقارب . وبعد ذلك ندرس التقارب والتقارب المنتظم لمتتابعات الدوال وبعد باب مختصر عن النهاية العليا سنلحق باباً أخيراً . ومع إنه شيق يمكن حذفه بدون فقدان الاستمرار حيث النتائج سوف لا تستخدم فيما بعد .

بسبب التحديدات الخطية اللازمة فى كتاب، فقد قررنا أن نتبع هذا الفصل بدراسة عن الاتصال ، التفاضل والتكامل وهذا له وجهة نظر غير موفقة لتأجيل تمثيلا تاماً للمتسلسلات وقتاً كافياً ويشجع المعلم على إعطاء مقدمة مختصرة على الأقل للمتسلسلات أثناء هذا الفصل أو يمكنه الانتقال مباشرة لجزء الأول من الفصل الرابع بعد باب ١٦ . إذا كان يفضل إجراء ذلك .

الباب الرابع عشر ــ مقدمة الى المتتابعات :

مع أن نظرية التقارب يمكن تمثيلها على مستوى تجريدى جداً ، فإننا نفضل مناقشة المتتابعات فى فراغات كارتيزية R^p منتبهين لحالة الخط الحقيقى . ويجب على القارئ أن يفسر الأفكار برسم أشكال توضيحية فى R و R^2 .

١٤ – ١ تعريف . إذا كانت S فئة ما، متتابعة فى S هى دالة على الفئة $N=\{1, 2, \ldots\}$ لأعداد طبيعية والتى مداها يكون فى S . وبوجه خاص ، تكون متتابعة فى R^p دالة نطاقها فى N ومداها يكون محتوياً فى R^p .

وبعبارة أخرى تخصص ، متتابعة فى R^p لكل عدد طبيعى $n = 1, 2, \ldots,$ عنصراً محدوداً وحيدا من R^p . وتقليدياً يشار للعنصر من R^p الذى يخص لعدد طبيعى n برمز مثل x_n ، ومع أن هذه الدلالة تغاير التى تستعمل لمعظم الدوال فسوف نتمسك بهذا الرمز التقليدى [لكى يكون مطابقاً لرمز استخدم سابقاً ، إذا كانت $X : N \to R^p$ متتابعة ، فقيمة X عند $n \in N$ يجب أن يرمز لها بالرمز $X(n)$ الذى هو أفضل من الرمز x_n] .

بينما نقبل الرمز التقليدى نريد أيضاً أن نميز بين الدالة X وبين قيمها $X(n) = x_n$. ومن ثم عندما يرمز لعناصر المتتابعة (أى قيم الدالة) بالرمز x_n سنشير للدالة بالدلالة

$$X = (x_n : n \in N) \quad \text{أو} \quad X = (x_n) .$$

ونستعمل أقواساً للدلالة على أن الترتيب فى N المستنتج بهذا مسألة هامة . وإذن فنحن نميز رمزياً بين المتتابعة $X = (x_n : n \in N)$ والفئة $\{x_n : n \in N\}$ لقيم هذه المتتابعة .

فى تعريف متتابعات ندون غالباً قائمة مرتبة لعناصر المتتابعة ونقف عندما تكون قاعدة التكوين واضحة . أى إنه يمكن أن نكتب

$$(2, 4, 6, 8, \ldots)$$

للمتتابعة لأعداد زوجية صحيحة . وطريقة أكثر كفاية وتمثيلا هى تعيين صيغة الحد العام فى المتتابعة ، مثل

$$(2n : n \in N)$$

وفى التطبيق العملى يكون من المناسب غالباً تحديد القيمة x_1 وطريقة الحصول على $x_{n+1}, n \geq 1$ عندما تكون x_n معروفة . ومع ذلك وهذا أكثر تعميما يمكن أن نحدد x_1 وقاعدة للحصول على x_{n+1} من $x_1, x_2, \ldots, x_n$. وسنشير إلى كل من هاتين الطريقتين بالتعاريف الحثية للمتتابعة . وبهذه الطريقة يمكننا تعريف المتتابعة لأعداد طبيعية زوجية بالتعريف

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = x_n + 2, \qquad n \geq 1$$

أو بالتعريف (يظهر أكثر تعقيداً)

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = x_n + x_1, \qquad n \geq 1$$

وواضح أن طرقاً أخرى كثيرة لتعريف هذه المتتابعة ممكنة .

والآن سنقدم بعض الطرق لتركيب متتابعات جديدة من المتتابعات المعطاة .

١٤ - ٢ تعريف . إذا كانت $X = (x_n)$ و $Y = (y_n)$ متتابعتين فى R^p ، حينئذ تعرف حاصل جمعهما بأنه المتتابعة $X + Y = (x_n + y_n)$ فى R^p ، والفرق بينهما هو المتتابعة $X - Y = (x_n - y_n)$ وحاصل ضربهما العددى هو المتتابعة $X \cdot Y = (x_n \cdot y_n)$

فى R والتى يمكن الحصول عليها بأخذ حاصل الضرب العددى للحدود المتناظرة وإذا كانت $X=(x_n)$ متتابعة فى R وإذا كانت $Y=(y_n)$ متتابعة فى R^p فنعرف حاصل ضرب المتتابعة X والمتتابعة Y بأنه المتتابعة فى R^p ويشار إليها بالمقدار $XY=(x_ny_n)$ أو إذا كانت $c \in R$ ، $X=(x_n)$ فنعرف $cX=(cx_n)$. وأخيراً إذا كانت $Y=(y_n)$ متتابعة فى R حيث $y_n \neq 0$ فيمكننا تعريف خارج القسمة لمتتابعة $X=(x_n)$ فى R^p على Y بأنه المتتابعة $X/Y=(x_n/y_n)$. مثال ذلك ، إذا كانت Y و X متتابعتين فى R معطيتين بواسطة

$$X=(2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots), \qquad Y=\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$$

حينئذ يكون لدينا

$$X+Y=\left(3, \frac{9}{2}, \frac{19}{3}, \ldots, \frac{2n^2+1}{n}, \ldots\right),$$

$$X-Y=\left(1, \frac{7}{2}, \frac{17}{3}, \ldots, \frac{2n^2-1}{n}, \ldots\right),$$

$$XY=(2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots),$$

$$3X=(6, 12, 18, \ldots, 6n, \ldots),$$

$$\frac{X}{Y}=(2, 8, 18, \ldots, 2n^2, \ldots).$$

بالمثل ، إذا كانت Z تدل على المتتابعة فى R والمعطاة بواسطة

$$Z=\left(1, 0, 1, \ldots, \frac{1-(-1)^n}{2}, \ldots\right)$$

حينئذ فقد عرفنا $Z+X$ ، $X-Z$ ، XZ لكن Z/X لا تعرف ، حيث إن بعض العناصر فى Z أصفار .

الآن نأتى إلى مفهوم النهاية لمتتابعة .

١٤ – ٣ تعريف . بفرض $X=(x_n)$ متتابعة فى R^p . يقال للعنصر x من R^p إنه نهاية X إذا كان يوجد لكل جوار V للعنصر x عدد طبيعى K_V بحيث إنه لكل $n \geq K_V$ ، حينئذ x_n تنتمى إلى V . إذا كانت x هى نهاية X ، نقول أيضا إن X تتقارب إلى x . إذا كانت المتتابعة لها نهاية فنقول إن المتتابعة تقاربية . إذا كانت المتتابعة ليس لها نهاية فنقول إنها تباعدية .

المدلول K_V يستخدم للدلالة على أن اختيار K يتوقف على V . من الواضح أن جيرة صغيرة V ستتطلب عادة قيمة كبيرة من K_V لكن يضمن أن $x_n \in V$ لكل $n \geq K_V$.

قد عرفنا النهاية لمتتابعة $X=(x_n)$ بدلالة الجيرات والمتاخمات . من المناسب غالباً أن نستخدم العمود فى $\boldsymbol{R}^p$ لإعطاء تعريف مكافئ الذى سنذكره الآن كنظرية .

١٤ – ٤ نظرية . بفرض $X=(x_n)$ هى متتابعة فى $\boldsymbol{R}^p$ فإن عنصرا x للمقدار $\boldsymbol{R}^p$ يكون نهاية X إذا وإذا فقــط كان يوجد لكل $\varepsilon>0$ عدد طبيعى $K(\varepsilon)$ بحيث إنه لكل $n \geq K(\varepsilon)$ فإن $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

البرهان : نفرض أن x هى نهاية المتتابعة X طبقاً للتعريف ١٤ – ٣ . الآن نفرض $\varepsilon>0$ ونعتبر الكرة المفتوحة $V(\varepsilon)=\{y \in \boldsymbol{R}^p : \|y-x\|<\varepsilon\}$ التى هى جوار x يوجد بتعريف ١٤ – ٣ عدد طبيعى $K_{V(\varepsilon)}$ بحيث إنه إذا كانت $n \geq K_{V(\varepsilon)}$ فإن $x_n \in V(\varepsilon)$. ومن ثم إذا كانت $n \geq K_{V(\varepsilon)}$ فإن $\|x_n - x\| < \varepsilon$ وهذا يثبت أن الخاصية المنصوصة تكون صحيحة عندما تكون x نهاية X .

وبالعكس ، نفرض أن الخاصية فى النظرية صحيحة لكل $\varepsilon>0$ ، يجب أن نثبت أن التعريف ١٤–٣ يكون متحققاً . ولإثبات هذا نفرض أن V هى أى جوار للعنصر x فحينئذ يوجد عدد $\varepsilon>0$ بحيث إن الكرة المفتوحة $V(\varepsilon)$ التى مركزها x ونصف قطرها ε تكون محتوية فى V . وطبقاً للخاصية فى النظرية ، يوجد عدد طبيعى $K(\varepsilon)$ بحيث إنه إذا كانت $n \geq K(\varepsilon)$ فإن $\|x_n - x\| < \varepsilon$. وبصورة مختلفة نجد أنه إذا كانت $n \geq K(\varepsilon)$ فحينئذ $x_n \in V(\varepsilon)$ ومن ثم $x_n \in V$ وتتحقق المتطلبات فى تعريف ١٤–٣ . وهو المطلوب إثباته

١٤ – ٥ انفرادية النهاية . يكون لمتتابعة فى $\boldsymbol{R}^p$ نهاية واحدة على الأكثر .

البرهان . نفرض – على العكس – أن x'' و x' هما نهايتا $X=(x_n)$ وأن $x' \neq x''$ ونفرض أن V'' و V' هما جواران غير متصلين المقدارين x'' و x' على الترتيب ونفرض أن K'' و K' هما عددان طبيعيان بحيث إنه إذا كانت $n \geq K'$ فإن $x_n \in V'$ وإذا كانت $n \geq K''$ فإن $x_n \in V''$. ونفرض $K=\sup\{K', K''\}$ بحيث إن كلا من $x_K \in V'$ ، $x_K \in V''$. نستنتج أن x_K تنتمى إلى $V' \cap V''$ مما يخالف التكوين وهو كون V' ، V'' غير متصلتين . وهو المطلوب إثباته

عندما يكون لمتتابعة $X=(x_n)$ فى $\boldsymbol{R}^p$ نهاية x فغالباً نكتب

$$x=\lim X, \qquad \text{أو} \qquad x=\lim_n (x_n)$$

أو أحياناً نستعمل الرمز $x_n \to x$.

نقول إن المتتابعة $X = (x_n)$ في R^p محدودة إذا كان يوجد $M > 0$ بحيث إن $\|x_n\| < M$ لجميع $n \in N$.

١٤ – ٦ مفترض . متتابعة تقاربية في R^p تكون محدودة .

البرهان . نفرض أن $x = \lim (x_n)$ ونفرض $\varepsilon = 1$ حسب نظرية ١٤ – ٤ يوجد عدد طبيعي $K = K(1)$ بحيث انه إذا كانت $n \geq K$ يكون $\|x_n - x\| \geq 1$. وباستخدام متباينة المثلث نستنتج أنه إذا كانت $n \geq K$ فإن $\|x_n\| \leq \|x\| + 1$. إذا وضعنا $M = \sup \{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_{K-1}\|, \|x\| + 1\}$ فإن $\|x_n\| \leq M$ لكل $n \in N$. وهو المطلوب إثباته

ربما يوجد شك من أن نظرية التقارب للمتتابعات في R^p تكون أكثر تعقيداً عنها في R لكن ليست هذه هي الحالة (باستثناء مواد رمزية) . وفي الحقيقة النتيجة القادمة هامة في توضيح أن الاستفسارات عن التقارب في R^p يمكن اختزالها إلى استفسارات مماثلة في R لكل من متتابعات الاحداثي .

قبل استعمال هذه النتيجة سنستعيد أن عنصراً مثالياً x في R^p يكون ممثلا في نمط الاحداثي بواسطة « طية p – » .

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

ومن ثم كل عنصر في المتتابعة (x_n) في R^p له تمثيل مشابه ، أي ان

$$x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{pn})$$

وبهذه الطريقة تولد (x_n) ، p متتابعة لأعداد حقيقية هي $(x_{1n}), (x_{2n}), \ldots, (x_{pn})$. والآن سنوضح أن تقارب المتتابعة (x_n) هو صورة منعكسة لتقارب هذه الـ p من متتابعات الاحداثيات .

١٤ – ٧ نظرية . المتتابعة (x_n) في R^p حيث

$$x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{pn}), \qquad n \in N \tag{14.1}$$

تتقارب إلى عنصر $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$ إذا وإذا فقط كانت المتتابعات المناظرة p لأعداد حقيقية

$$(x_{1n}), (x_{2n}), \ldots, (x_{pn}) \ .$$

تتقارب إلى $y_1, y_2, \ldots, y_p$ على الترتيب .

البرهان . إذا كانت $x_n \to y$ فإن $\| x_n - y \| < \varepsilon$ عند $n \geq K(\varepsilon)$. وحسب نظرية ٨ – ١٠ نجد أن لكل $j = 1, 2, \ldots, p$

يكون لدينا $|x_{jn} - y_j| \le \|x_n - y\| < \varepsilon$ لكل $n \ge K(\varepsilon)$

ومن ثم كل من هذه الـ p من متتابعات الاحداثيات يجب أن تتقارب إلى العدد الحقيق المناظر .

وبالعكس ، نفرض أن المتتابعات فى (١٤ - ١) تتقارب إلى y_j عند $j = 1, 2, \ldots, p$. وبأخذ $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعى $M(\varepsilon)$ بحيث انه إذا كانت $n \ge M(\varepsilon)$ فإن

$$|x_{jn} - y_j| < \varepsilon/\sqrt{p} \quad \text{عند} \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

ومن هذا ينتج أنه عندما $n \ge M(\varepsilon)$ حينئذ

$$\|x_n - y\|^2 = \sum_{j=1}^{p} |x_{jn} - y_j|^2 \le \varepsilon^2$$

أى ان المتتابعة (x_n) تتقارب إلى y .   وهو المطلوب إثباته

بعض امثلة :

الآن سنعرض بعض الأمثلة لإثبات تقارب متتابعة مستخدمين فقط الطرق المتاحة الآن . ومن الملاحظ أنه لكى نستمر يجب أن نخمن قيمة النهاية بفحص سابق للمتتابعة . وتشمل كل الأمثلة التى ستعرض فيما بعد بعض مهارات وتحايل ولكن النتائج التى تحصل عليها ستكون مفيدة لنا فى إثبات (بأقل عمليات تصرفية) التقارب لمتتابعات أخرى . لذلك سنكون مهتمين بالنتائج بنفس درجة اهتمامنا بالطرق .

١٤ - ٨ أمثلة . (أ) بفرض (x_n) هى المتتابعة فى R حيث $x_n = 1/n$. فسنوضح أن نها $(1/n) = 0$. ولإثبات هذا نفرض أن $\varepsilon > 0$ ، وطبقاً للنتيجة ٦-٧ (ب) (خاصية أرشميدس) يوجد عدد طبيعي $K(\varepsilon)$ بحيث ان $1/K(\varepsilon) < \varepsilon$ حينئذ إذا كانت $n \ge K(\varepsilon)$ فيكون لدينا

$$0 < x_n = \frac{1}{n} \le \frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$$

ويترتب على ذلك أن $|x_n - 0| < \varepsilon$ عند $n \ge K(\varepsilon)$. وبما أن $\varepsilon > 0$ اختيارية فهذا يبرهن أن نهاية $(1/n) = 0$.

(ب) إذا فرضنا أن $a > 0$ وتعتبر المتتابعة $X = [1/(1+na)]$ فى R . فسنوضح أن نها $X = 0$. أولا نلاحظ أن

$$0<\frac{1}{1+na}<\frac{1}{na}$$

نريد الحد السائد أن يكون أقل من القيمة المعطاة $\varepsilon > 0$ حيث n كبيرة كبراً كافياً . باستخدام نتيجة ٦–٧ (ب) ثانياً نجد أنه يوجد عدد طبيعى $K(\varepsilon)$ بحيث ان $1/K(\varepsilon) < a\varepsilon$ حينئذ إذا كانت $n \geq K(\varepsilon)$ فيكون لدينا .

$$0<\frac{1}{1+na}<\frac{1}{na}\leq\frac{1}{K(\varepsilon)a}<\varepsilon$$

ومن ذلك ينتج أن $|1/(1+na)-0| < \varepsilon$ عند $n \geq K(\varepsilon)$. حيث $\varepsilon > 0$ اختيارية فهذا يوضح أن نها $X = 0$.

(ج) افرض $b \in R$ تحقق $0 < b < 1$ واعتبر المتتـــابعة (b^n) . سنوضح أن نها $(b^n) = 0$ ولإثبات هذا ، يكون من المناسب أن نكتب b فى الصورة

$$b=\frac{1}{1+a}$$

حيث $a > 0$ ونستخدم متباينة برنولى $(1+a)^n \geq 1 + na$ عند $n \in N$ (انظر تمرين ه ج) إذن

$$0<b^n=\frac{1}{(1+a)^n}\leq\frac{1}{1+na}<\frac{1}{na}$$

كما فى المثال السابق إذا كانت $\varepsilon > 0$ معطاة فحينئذ يوجد عدد طبيعى $K(\varepsilon)$ بحيث ان $|b^n - 0| < \varepsilon$ عند $n \geq K(\varepsilon)$. وإذن يكون لدينا بها نها $(b^n) = 0$.

(د) نفرض أن $c > 0$ ونعتبر المتتابعة $(c^{1/n})$. سنوضح أن نها $(c^{1/n}) = 1$
أولا نفرض أن $c > 1$ حينئذ $c^{1/n} = 1 + d_n$ حيث $d_n > 0$ ومن ثم حسب متباينة برنويل

$$c=(1+d_n)^n \geq 1+nd_n.$$

ومن ذلك ينتج أن $c-1 \geq nd_n$ بما أن $c > 1$ يكون لدينا $c - 1 > 0$. وإذن بإعطاء $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعى $K(\varepsilon)$ بحيث انه إذا كانت $n \geq K(\varepsilon)$ ، فإن

$$0<c^{1/n}-1=d_n\leq\frac{c-1}{n}<\varepsilon$$

لذلك $|c^{1/n} - 1| < \varepsilon$ عند $n \geq K(\varepsilon)$ كالمطلوب .

الآن نفرض أن $1 > c > 0$ (لأن الحالة $c = 1$ واضحة) حينئذ $c^{1/n} = 1/(1+h_n)$ حيث $h_n > 0$ ومن ثم حسب متباينة برنولى

$$c = \frac{1}{(1+h_n)^n} \leq \frac{1}{1+nh_n} < \frac{1}{nh_n}$$

ينتج أن $0 < h_n < 1/nc$. ولكن بما أن $c > 0$ ، فبأخذ $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعى $K(\varepsilon)$ بحيث انه إذا كانت $n \geq K(\varepsilon)$ حينئذ

$$0 < 1 - c^{1/n} = \frac{h_n}{1+h_n} < h_n < \frac{1}{nc} < \varepsilon$$

لذلك $|c^{1/n} - 1| < \varepsilon$ عند $n \geq K(\varepsilon)$ كالمطلوب

(ﻫ) اعتبر المتتابعة $X = (n^{1/n})$. سنوضح أن نها $X = 1$ ، وهى حقيقة ليست واضحة نوعاً ما . نكتب $n^{1/n} = 1 + k_n$ حيث $k_n > 0$ عند $n > 1$ ومن ثم $n = (1+k_n)^n$. بنظرية ذات الحدين عند $n > 1$ نحصل على

$$n = 1 + nk_n + \frac{n(n-1)}{2}k_n^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}k_n^2$$

ومن ذلك ينتج $k_n^2 < 2/(n-1)$ بحيث ان

$$k_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

الآن بفرض $\varepsilon > 0$ معطاة ، فإنه يوجد $K(\varepsilon)$ بحيث انه إذا كانت $n \geq K(\varepsilon)$ فينتج $1/(n-1) < \varepsilon^2/2$ ومن ذلك ينتج أن $0 < k_n < \varepsilon$ وأيضاً

$$0 < n^{1/n} - 1 = k_n < \varepsilon$$

عند $n \geq K(\varepsilon)$. وبما أن $\varepsilon > 0$ اختيارية فهذا يبرهن أن نها $(n^{1/n}) = 1$.

هذه الأمثلة توضح أن هيكل النتائج التى ستجعل البراعة المستعملة هنا غير ضرورية سيكون مفيداً للغاية . سنحصل على مثل هذه النتائج فى البابين القادمين ولكن سنختتم هذا الباب بنتيجة مفيدة غالباً جداً .

١٤ – ٩ نظرية . بفرض $X = (x_n)$ متتابعة فى R^p ونفرض أن $x \in R^p$ بفرض $A = (a_n)$ متتابعة فى R بحيث ان

(i) $\lim (a_n) = 0$

(ii) $\| x_n - x \| \leq C \, | a_n |$ عند بعض $C > 0$ وكل $n \in N$.

فإن نها $x = (x_n)$.

البرهان . نفرض $\varepsilon > 0$ معطاة . وبما أن نها $(a_n) = 0$ فيوجد عدد طبيعى $K(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $n \ge K(\varepsilon)$ فإن

$$C|a_n| = C|a_n - 0| \le \varepsilon$$

ومن ذلك ينتج أن

$$\|x_n - x\| \le C|a_n| \le \varepsilon$$

لجميع $n \ge K(\varepsilon)$. وبما أن $\varepsilon > 0$ اختيارية فنستنتج أن نها $(x_n) = x$ وهو المطلوب إثباته

تمرينــات :

١٤ – (أ) بفرض أن $b \in R$. وضح أن نها $(b/n) = 0$.

١٤ – (ب) أثبت أن نها $[1/n - 1/(n+1)] = 0$.

١٤ –(ج) بفرض $X = (x_n)$ متتابعة فى R^p وتتقارب إلى x ، وبفرض $c \in R$ أثبت أن نها $(cx_n) = cx$.

١٤ – (د) بفرض $X = (x_n)$ هى متتابعة فى R^p ومتقاربة إلى x ، وضح أن نها $(\|x_n\|) = \|x\|$. (إرشاد : استعمل المتباينة المثلثية) .

١٤ – (هـ) بفرض أن $X = (x_n)$ متتابعة فى R^p والفرض أن نها $(\|x_n\|) = 0$. أثبت أن نها $(x_n) = 0$. لكن اعط مثالا فى R لتوضح أن تقارب $(|x_n|)$ ربما يستلزم تقارب (x_n) .

١٤ – (و) أثبت أن نها $(1/\sqrt{n}) = 0$ ، وفى الحقيقة إذا كانت (x_n) متتابعة لأعداد موجبة وكان نها $(x_n) = 0$، فإن نها $(\sqrt{x_n}) = 0$.

١٤ – (ز) إذا كانت $d \in R$ تحقق $d > 1$ استخدم متباينة بورنولى لتوضيح أن المتتابعة (d^n) ليست محدودة فى R ومن ثم ليست تقاربية .

١٤ –(ح) بفرض أن $b \in R$ تحقق $0 < b < 1$ فوضح أن نها $(nb^n) = 0$. (إرشاد : استعمل نظرية ذات الحدين كما فى مثال ١٤ – ٨ (هـ))

١٤ – (ط) بفرض $X = (x_n)$ متتابعة لأعداد حقيقية موجبة بالضبط بحيث ان نها $(x_{n+1}/x_n) < 1$. وضح أنه عند بعض قيم للمقدار r بحيث $0 < r < 1$ وبعض قيم للمقدار C بحيث $C > 0$ يكون لدينا $0 < x_n < Cr^n$ لكل قيمة $n \in N$. كبيرة كبراً كافياً) . استخدم هذا لتوضح أن نها $(x_n) = 0$.

۱٤ – (ى) بفرض أن $X = (x_n)$ متتابعة لأعداد حقيقية موجبة مضبوطة بحيث ان نها $(x_{n+1}/x_n) > 1$. وضح أن X ليست متتابعة محدودة وحينئذ ليست تقاربية .

۱٤ – (ك) اعط مثالا لمتتابعة (x_n) تقاربية لأعداد حقيقية موجبة بالضبط بحيث ان نها $(x_{n+1}/x_n) = 1$. اعط مثالا لمتتابعة تباعدية بهذه الخاصية .

۱٤ – (ل) استخدم النتائج من (تمرينى ۱٤ – ط ، ۱٤ – ى) للمتتابعة الاتية :

(هنا $0 < a < 1, 1 < b, c > 0$) :

(أ) (a^n) (ب) (na^n)

(ج) (b^n) (د) (b^n/n)

(ه) $(c^n/n!)$ (و) $(2^{3n}/3^{2n})$

۱٤ – (م) بفرض $X = (x_n)$ متتابعة لأعداد حقيقية موجبة مضبوطة بحيث أن نها $(x_n^{1/n}) < 1$ وضح أنه لبعض قيم r حيث $0 < r < 1$ فإن $0 < x_n < r^n$ لكل قيمة $n \in N$ كبيرة كبراً كافياً . استخدم هذا لتستنتج أن نها $(x_n) = 0$

۱٤ – (ن) بفرض $X = (x_n)$ متتابعة لأعداد حقيقية موجبة مضبوطة بحيث أن نها $(x_n^{1/n}) > 1$ وضح أن X ليست فئة محدودة ومن ثم ليست تقاربية .

۱٤ – (س) اعط مثالا لمتتابعة تقاربية (x_n) لأعداد حقيقية موجبة مضبوطة بحيث أن نها $(x_n^{1/n}) = 1$. اعط مثالا لمتتابعة تباعدية بهذه الخاصية .

۱٤ – (ع) افحص تقارب المتتابعة فى تمرين ۱٤ – ل بإلقاء النظر على تمرينى ۱٤ – م ، ۱٤ – ن .

۱٤ – (ف) افحص تقارب المتتابعات الآتية فى R

(أ) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ (ب) $\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(ج) $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)$ (د) $((-1)^n)$

الباب الخامس عشر – متتابعات جزئية وتوافيق :

يعطى هذا الباب بعض معلومات عن تقارب المتتابعات التى يحصل عليها بطرق مختلفة من متتابعات معروفة بأنها تقاربية . وستساعد فى إمكانتنا من فك مجموعات لمتتابعات تقاربية بتوسع نوع ما .

۱٥ – ۱ تعريف . إذا كانت $X = (x_n)$ متتابعة فى R^p وإذا كانت على سبيل الحصر $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$ متتابعة متزايدة لأعداد طبيعية ، حينئذ المتتابعة X' فى R^p المعطاة فى الصورة

$$(x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_n}, \ldots)$$

تسمى بمتابعة جزئية من X .

ربما يكون من المفيد أن نربط بين مدلول المتابعة الجزئية وبين تحصيل دالتين . إذا رضنا أن g هي دالة بنطاق N ومدى في N ونفرض أن g متزايدة مضبوطة بمعنى أنه إذا كانت $n < m$ فإن $g(n) < g(m)$. حينئذ g تعرف متابعة جزئية من $X = (x_n)$ بواسطة القانون

$$X \circ g = (x_{g(n)} : n \in N)$$

وبالعكس . كل متابعة جزئية للمقدار X لها الصورة $X \circ g$ لدالة ما متزايدة مضبوطة حيث g ، $D(g) = N$ ، $R(g) \subseteq N$.

من الواضح أن المتابعة معطاة متابعات جزئية مختلفة كثيرة . وبالرغم من أن النتيجة الآتية أولية جدا فلها أهمية كافية مما يحتم جعلها صريحة .

١٥ – ٢ مأخوذة أو مفترض . إذا كانت متابعة X في R^p تتقارب إلى عنصر x حينئذ أي متابعة جزئية من X أيضاً تتقارب إلى x .

البرهان . بفرض V هي جوار لنهاية العنصر x ، من التعريف يوجد عنصر طبيعي K_V بحيث أنه لكل $n \geq K_V$ فإن x_n تنتمي إلى V . الآن نفرض X' متابعة جزئية من X ، مثلا

$$X' = (x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_n}, \ldots)$$

بما أن $r_n \geq n$ حينئذ $r_n \geq K_V$ ومن ثم V تنتمي إلى X' . هذا يبرهن أن X تتقارب أيضاً إلى x . وهو مطلوب إثباته

١٥ – ٣ نتيجة . إذا كانت $X = (x_n)$ متابعة بحيث تتقارب إلى عنصر x من R^p وإذا كانت m أي عدد طبيعي فحينئذ المتابعة $X' = (x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)$ أيضاً تتقارب إلى x .

البرهان . بما أن X' متابعة جزئية من X ، فالنتيجة تنتج مباشرة من المفترضة السابقة .

وجهت النتائج السابقة وبدرجة كبيرة إلى برهنة أن متابعة تقترب من نقطة معلومة . ومن المهم أيضاً أن نعلم بدقة ماذا نعني بقولنا أن المتابعة X لا تقترب من x . النتيجة القادمة أولية ولكن ليست تافهة وتحقيقها جزء هام من ثقافة كل شخص لذلك سنترك برهانها بالتفصيل للقارئ .

١٥ – ٤ . إذا كانت $X=(x_n)$ متتابعة فى R^p حينئذ النصوص الآتية متكافئة :

(ا) X لا تقترب من x .

(ب) يوجد جوار X المقدار x بحيث أنه إذا كانت n أى عدد طبيعى فإنه يوجد عدد طبيعى $m=m(n)\geq n$ بحيث أن x_m لا ينتمى إلى V .

(ج) يوجد جوار X المقدار x ومتتابعة جزئية X' المقدار X بحيث لا يوجد أى عنصر من عناصر V وينتمى إلى V .

١٥ – ٥ أمثلة . (ا) نفرض X متتابعة فى R وتتكون من الأعداد الطبيعية .

$$X=(1, 2, \ldots, n, \ldots)$$

نفرض أن x أى عدد حقيقى ونعتبر الجوار V للمقدار x الذى يتكون من الفترة المفتوحة $(x-1, x+1)$. وطبقاً لخاصية أرشميدس ٦ – ٦ يوجد عدد طبيعى K_0 بحيث أن $x+1<k_0$ ومن ثم إذا كانت $n\geq k_0$ فينتج أن $x_n=n$ لا تنتمى إلى V . وإذن المتتابعة الجزئية $X'=(k_0, k_0+1, \ldots)$ من Xليس لها نقط فى V . مما يثبت أن X لا تقترب من x .

(ب) نفرض $Y=(y_n)$ متتابعة فى R وتتكون من$Y=(-1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots)$ نترك ذلك للقارئ ليوضح أنه لا توجد نقطة y . باستثناء إمكانية $y=\pm 1$ يمكن أن تكون نهاية Y . وسنوضح أن النقطة $Y=-1$ ليست نهاية y ، واعتبار الحالة التى فيها $y=+1$ تشابه الحالة السابقة تماماً . بفرض أن V جوار $y=-1$ ويتكون من الفترة المفتوحة $(-2, 0)$. حينئذ إذا كانت n زوجية فإن العنصر $y_n=(-1)^n=+1$ لا ينتمى إلى V . لذلك بتجنب الفئة الجزئية Y' من Y المناظرة إلى $r_n=2n,\ n\in N$ الجوار V، مما يثبت أن $y=-1$ ليست نهاية Y .

(ج) بفرض $Z=(z_n)$ متتابعة فى R حيث $z_n\geq 0$ عند $n\geq 1$. نستنتج أنه لا يوجد عدد $z<0$ بحيث يمكن أن يكون نهاية Z . وفى الحقيقة ، الفئة المفتوحة $V=\{x\in R: x<0\}$ هى جوار العدد z لا يحتوى على أى عنصر من Z . هذا يوضح (لماذا ؟) أن z لا يمكن أن تكون نهاية Z . ومن ثم إذا كانت Z لها نهاية فهذه النهاية يجب أن تكون موجبة .

توافيق المتتابعات :

النظرية الآتية تمكن الشخص من استعمال العمليات الجبرية للتعارف ١٤ – ٢ . لتكوين متتابعات جديدة يمكن التنبوء بتقاربها من تقارب المتتابعات المعطاة .

١٥ – ٦ نظرية . (أ) بفرض X ، Y متتابعتين فى R^p وتتقاربان إلى x ، y على الترتيب . حينئذ المتتابعات $X \cdot Y$ و $X+Y, X-Y$ تتقارب إلى $x \cdot y$ و $x+y, x-y$ على الترتيب .

(ب) بفرض $X=(x_n)$ متتابعة فى R^p بحيث تتقارب إلى x ونفرض أن $A=(a_n)$: متتابعة فى R وتتقارب إلى a فينتج أن المتتابعة $(a_n x_n)$ فى R^p تتقارب إلى ax .

(جـ) بفرض $X=(x_n)$ متتابعة فى R^p بحيث تتقارب إلى x ونفرض أن ، $B=(b_n)$ متتابعة لأعداد حقيقية غير صفرية وأنها تتقارب إلى عدد b لا يساوى صفرا ، حينئذ المتتابعة $(b_n^{-1} x_n)$ فى R^p تتقارب إلى $b^{-1}x$.

البرهان . (أ) لنوضح أن $(x_n+y_n) \to x+y$ نحتاج لتقييم مقدار

$$\|(x_n+y_n)-(x+y)\|$$

ولكى نفعل هذا فإننا نستخدم متباينة المثلث لنحصل على

$$\begin{aligned}\|(x_n+y_n)-(x+y)\| &= \|(x_n-x)+(y_n-y)\| \\ &\leq \|x_n-x\|+\|y_n-y\|\end{aligned} \tag{15.1}$$

من الفرض نجد أنه ، إذا كانت $\varepsilon > 0$ فإننا يمكننا اختيار K_1 بحيث أنه إذا كانت $n \geq K_1$ فإن $\|x_n-x\|<\varepsilon/2$ ونختار K_2 بحيث أنه إذا كانت $n \geq K_2$ فإن $\|y_n-y\|<\varepsilon/2$ ومن ثم إذا كانت $K_0=\sup\{K_1, K_2\}$ ، $n \geq K_0$ حينئذ نستنتج من (١٥ – ١) أن

$$\|(x_n+y_n)-(x+y)\|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

بما أنه يمكن إجراء ما سبق لكل $\varepsilon > 0$ اختيارية ، فنستخلص أن $X+Y$ تتقارب إلى $x+y$ وبالضبط يمكن استخدام نفس المناقشة لنوضح أن $X-Y$ تتقارب إلى $x-y$.

لبرهان أن $X \cdot Y$ تتقارب إلى $x \cdot y$ نقوم بإجراء المقايسة

$$\begin{aligned}|x_n \cdot y_n - x \cdot y| &= |(x_n \cdot y_n - x_n \cdot y)+(x_n \cdot y - x \cdot y)| \\ &\leq |x_n \cdot (y_n-y)|+|(x_n-x) \cdot y|\end{aligned}$$

باستخدام متباينة شفارتز ، نحصل على

$$|x_n \cdot y_n - x \cdot y| \leq \|x_n\|\,\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\,\|y\| \tag{15.2}$$

يوجد طبقاً للمفترض ١٤ – ٦ عدد $M>0$ الذى يكون حدا أعلى للمقدار $\{\|x_n\|, \|y\|\}$ وعلاوة على ذلك نستنتج من تقارب X, Y ، أنه إذا كانت $\varepsilon > 0$ معطاة حينئذ يوجد عددان طبيعيان K_1, K_2 بحيث أنه إذا كانت $n \geq K_1$ فإن $\|y_n-y\|<\varepsilon/2M$ وإذا كانت

$n \geq K_2$ فإن $\|x_n - x\| < \varepsilon/2M$. الآن نختار $K = \sup\{K_1, K_2\}$ فينتج أنه إذا كانت $n \geq K$ فنستنتج من (١٥ — ٢) أن

$$|x_n \cdot y_n - x \cdot y| \leq M\,\|y_n - y\| + M\,\|x_n - x\|$$
$$< M\left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}\right) = \varepsilon$$

هذا يبرهن أن Y . X تتقارب إلى y . x .

يبرهن جزء (ب) بنفس الطريقة

لبرهنة (ج) نقيم ونحسب كما يأتى :

$$\left\|\frac{1}{b_n} x_n - \frac{1}{b} x\right\| = \left\|\left(\frac{1}{b_n} x_n - \frac{1}{b} x_n\right) + \left(\frac{1}{b} x_n - \frac{1}{b} x\right)\right\|$$
$$\leq \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \|x_n\| + \frac{1}{|b|}\|x_n - x\|$$
$$= \frac{|b - b_n|}{|b_n b|}\|x_n\| + \frac{1}{|b|}\|x_n - x\|$$

الآن نفرض أن $M > 0$ بحيث أن

$$\frac{1}{M} < |b| \qquad \text{و} \qquad \|x\| < M$$

ومن ذلك ينتج أنه يوجد عدد طبيعى K_0 بحيث أنه إذا كانت $n > K_0$ ، فإن

$$\frac{1}{M} < |b_n| \qquad \text{و} \qquad \|x_n\| < M$$

ومن ثم إذا كانت $n \geq K$ ، فإن التقييم السابق ينص

$$\left\|\frac{1}{b_n} x_n - \frac{1}{b} x\right\| \leq M^3 |b_n - b| + M\,\|x_n - x\|$$

لذلك إذا كانت $\varepsilon > 0$ عدداً حقيقياً معيناً فإنه يوجد عددان طبيعيان K_1, K_2 بحيث أنه إذا كانت $n \geq K_1$ فحينئذ $|b_n - b| < \varepsilon/2M^3$ وإذا كانت $n \geq K_2$ حينئذ $\|x_n - x\| < \varepsilon/2M$ وبفرض $K = \sup\{K_0, K_1, K_2\}$ نستنتج أنه إذا كانت $n \geq K$ ، فإن

$$\left\|\frac{1}{b_n} x_n - \frac{1}{b} x\right\| < M^3 \frac{\varepsilon}{2M^3} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

مما يثبت أن (x_n/b_n) تتقارب إلى x/b . وهو المطلوب إثباته

١٥ – ٧ تطبيقات . مرة أخرى نعير اهتماماً دقيقاً إلى المتتابعات فى R

(أ) إذا كانت $X=(x_n)$ هى المتتابعة فى R المعرفة بواسطة

$$x_n=\frac{2n+1}{n+5}, \qquad n\in N$$

نلاحظ أنه يمكننا كتابة x_n فى الصورة

$$x_n=\frac{2+1/n}{1+5/n}$$

أى أن X يمكن اعتبارها كخارج قسمة $Y=(2+1/n)$ ، $Z=(1+5/n)$. بما أن المتتابعة الأخيرة تتكون من حدود ليست صفرية ولها نهاية 1 (لماذا ؟) فإن النظرية السابقة تسمح لنا باستنتاج أن

$$\lim X=\frac{\lim Y}{\lim Z}=\frac{2}{1}=2$$

(ب) إذا كانت $X=(x_n)$ هى متتابعة فى R وتتقارب إلى x وإذا كانت p كثيرة حدود ، فإن المتتابعة المعرفة بواسطة $(p(x_n):n\in N)$ تتقارب إلى $p(x)$

(إرشاد : استخدم نظرية ١٥ – ٦ والاستنتاج) .

(جـ) نفرض أن $X=(x_n)$ متتابعة فى R والتى تتقارب إلى x ونفرض r هى دالة قياسية ، أى $r(y)=p(y)/q(y)$ حيث ، p ، q كثيرتا الحدود . ونفرض أن $q(x_n)$ و $q(x)$ ليست أصفارا ، حينئذ المتتابعة $(r(x_n):n\in N)$ تتقارب إلى $r(x)$

(إرشاد : استعمل جزء (ب) ونظرية ١٥ – ٦) .

نختم هذا الباب بنتيجة مفيدة غالباً . وهى توصف أحياناً بالقول « يجتاز شخص إلى النهاية فى متباينة » .

١٥ – ٨ مفترض . نفرض أن $X=(x_n)$ متتابعة تقاربية فى R^p بنهاية x . إذا كان يوجد عنصر c فى R^p وعدد $r>0$ بحيث أن $\|x_n-c\|\leq r$ عندما تكون n كبيرة كبراً كافيا فإن $\|x-c\|\leq r$

البرهان . الفئة $V=\{y\in R^p:\|y-c\|>r\}$ فئة جزئية مفتوحة فى R^p . إذا كانت $x\in V$ فإن V هى جوار x وأيضاً $x_n\in V$ لقيم n الكبيرة كبراً كافياً مما يخالف الفرض ، ولذلك $x\notin V$ ومن ثم يكون عندنا $\|x-c\|\leq r$.

ومن المهم أن نلاحظ أننا افترضنا وجود النهاية فى هذه النتيجة لأن الفروض الباقية ليست كافية لكى تمكننا من البرهنة على وجودها .

تمرينـــات :

١٥ – (أ) إذا كانت (x_n) ، (y_n) متتابعتين تقاربيتين لأعداد حقيقية وإذا كانت $x_n \le y_n$ لكل $n \in N$ فإن نها $(x_n) \leq$ نها (y_n) .

١٥ – (ب) إذا كانت $X = (x_n)$ ، $Y = (y_n)$ متتابعتين لأعداد حقيقية بحيث أن كلا منهما تتقارب إلى c وإذا كانت $Z = (z_n)$ متتابعة بحيث أن $x_n \le z_n \le y_n$ عند $n \in N$ ، فاثبت أن Z تتقارب أيضاً إلى c .

١٥ – (ج) إذا كان x_n معطاة بالصيغ الآتية فحقق إما التقارب أو التباعد للمتتابعة $X = (x_n)$.

(أ) $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$ (ب) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$

(ج) $x_n = \dfrac{2n}{3n^2+1}$ (د) $x_n = \dfrac{2n^2+3}{3n^2+1}$

(هـ) $x_n = n^2 - n$ (و) $x_n = \sin n$

١٥ – (د) إذا كانت X ، Y متتابعتين فى R^p وإذا كانت $X + Y$ تتقارب . هل X ، Y تتقارب وتحقق نها $(X + Y) =$ نها $X +$ نها Y ؟

١٥ – (هـ) إذا كانت X ، Y متتابعتين فى R^p وإذا كانت $X . Y$ تتقارب هل X ، Y تتقارب وتحقق نها $(X . Y) =$ نها $Y .$ نها X ؟

١٥ – (و) إذا كانت $X = (x_n)$ متتابعة موجبة متقاربة إلى x ، حينئذ $(\sqrt{x_n})$ تتقارب إلى $\sqrt{x}$. (إرشاد : $\sqrt{x_n} - \sqrt{x} = (x_n - x)/(\sqrt{x_n} + \sqrt{x})$ عندما $x \neq 0$.

١٥ – (ز) إذا كانت $X = (x_n)$ متتابعة لأعداد حقيقية بحيث أن $Y = (x_n^2)$ تتقارب إلى صفر حينئذ هل X تتقارب إلى صفر ؟

١٥ – (ح) إذا كانت $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ هل المتتابعات $X = (x_n)$ و $Y = (\sqrt{n}\, x_n)$ تتقارب ؟

١٥ – (ط) بفرض أن (x_n) متتابعة فى R^p بحيث أن المتتابعتين الجزئيتين (x_{2n}) ، (x_{2n+1}) تتقاربان إلى $x \in R^p$. أثبت أن (x_n) تتقارب إلى x .

١٥ – (ى) بفرض (x_n) ، (y_n) متتابعتين فى R بحيث أن نها $(x_n) \neq 0$ ونها $(x_n y_n)$ موجودة . أثبت أن نها (y_n) تكون أيضاً موجودة

١٥ – (ك) هل تمرين ١٥ – ى يظل صحيحاً فى R^2؟

١٥ – (ل) إذا كانت $0<a\le b$ وإذا كانت $x_n=(a^n+b^n)^{1/n}$. حينئذ نها $(x_n) = b$.

١٥ – (م) كل عدد غير قياسى فى R هو النهاية لمتتابعة لأعداد قياسية . كل عدد قياسى فى R هو النهاية لمتتابعة لأعداد غير قياسية .

١٥ (ن) إذا فرضنا $A\subseteq R^p$ ، $x\in R^p$ حينئذ x هى النقطة الحدودية المقدار A إذا وإذا فقط كانت توجد متتابعة (a_n) عناصرها فى A ومتتابعة (b_n) عناصرها فى $\mathscr{C}(A)$ بحيث أن

$$\lim(a_n)=x=\lim(b_n)$$

١٥ (س) بفرض أن $A\subseteq R^p$ ، $x\in R^p$ حينئذ x هى نقطة تجميع للمقدار A إذ وإذا فقط كانت توجد متتابعة (a_n) لعناصر مختلفة فى A بحيث أن $x=\lim(a_n)$.

١٥ (ع) إذا كانت نها $(x_n) = x$ وإذا كانت $\|x_n-c\|<r$ for all $n\in N$ هل ينتج أن $\|x-c\|<r$ ؟

مشروعات :

١٥ – α . بفرض d قياسى أو مترى على فئة M بمفهوم تمرين ٨ – ق . إذا كانت $X=(x_n)$ متتابعة فى M ، حينئذ يقال لعنصر $x\in M$ إنه نهاية X . إذا كان يوجد لكل $\varepsilon>0$ عدد $K(\varepsilon)$ فى N بحيث أنه لكل $n\ge K(\varepsilon)$ يكون $d(x_n,x)<\varepsilon$.

استخدم هذا التعريف ووضح أن نظريات ١٤ – ٥ ، ١٤ – ٤ ، ١٥ – ٢ ، ١٥ – ٣ ، ١٥ – ٤ يمكن امتدادها إلى الفراغات المترية . وضح أن المتريات d_1, d_2, d_∞ فى R^p تؤدى إلى نفس المتتابعات المتقاربة فى R^p . وضح أنه إذا كانت d هو مترى منفصل على فئة ، حينئذ المتتابعات التى تتقارب فقط بالنسبة إلى d هى التى تكون ثابتة بعد عدد طبيعى ما .

١٥ – β . بفرض أن m تشير إلى مجموعة كل المتتابعات المحدودة فى R ، وبفرض C تدل إلى المجموعة لكل المتتابعات التقاربية فى R ، وبفرض C تشير المجموعة من كل المتتابعات فى R والتى تقترب إلى صفر .

(أ) بحاصل جمع $X+Y$ وحاصل ضرب cX مثل المعطى فى تعريف ١٤–٢ اثبت أن كلا من المجموعات السابقة هو فراغ المتجه الذى يكون فيه عنصر الصفر هو المتتابعة $0=(0,0,\dots)$

(ب) فى كل من المجموعات m, c, c_0 عرف العمود $X=(x_n)$ بالصورة $\|x\|=\sup\{|x_n|:n\in N\}$. وضح أن هذا التعريف فى الحقيقة ينتج عموداً .

(جـ) إذا كانت X ، Y تنتمى إما إلى c و m أو إلى c_0 فإن حاصل الضرب XY ينتمى أيضاً إليها ، $\|XY\| \leq \|X\| \|Y\|$. اعط مثالا لتوضح أن علامة التساوى ربما تكون صحيحة فى هذه العلاقة الأخيرة واعط مثالا آخر لتوضح أن التساوى ربما يفشل .

(د) وضح أن المترية المستنتجة بواسطة المعود فى جزء (ب) فى هذه الفراغات يعطى بالعلاقة $d(X, Y) = \sup \{|x_n - y_n| : n \in N\}$

(هـ) وضح أنه إذا كانت متتابعة (X_k) تتقارب إلى Y بالنسبة إلى المترى فى (د) ، فإن كل متتابعة الأحداثى تتقارب إلى نفس الأحداثى المناظر فى Y .

(تحذير : (X_k) متتابعة فى R بينما X_k متتابعة فى c و m أو c_0 ، أى « متتابعة لمتتابعات » فى (R) .

(و) اعط مثالا لمتتابعة (X_k) فى c_0 بحيث أن من متتابعات الأحداثى كل متتابعة متساوية الدرجة تتقارب إلى صفر لكن $d(X_k, 0)$ لا تتقارب إلى صفر .

الباب السادس عشر – معيارات أو مقياسان للتقارب :

للآن الطريقة الرئيسية الممكنة لتوضيح أن متتابعة تقاربية هى أن نطابقها كمتتابعة جزئية أو مجموعة جبرية مؤتلفة من متتابعات تقاربية ويمكننا عند إجراء هذا أن نحسب النهاية مستخدمين نتائج الأبواب السابقة . ولكن عند عدم إمكانية إجراء هذا فإننا نرجع إلى تعريف ١٤ – ٣ أو نظرية ١٤ – ٤ لكى نثبت وجود النهاية .واستعمال هذه الطرق الأخيرة له عيب يستحق الذكر وهو أننا يجب أن نعرف (أو نشك على الأقل) قبل ذلك فى القيمة الصحيحة للنهاية وبعد ذلك نحقق أن شكنا صحيح .

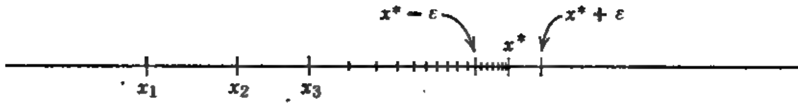
يوجد حالات كثيرة ولكن لا توجد طريقة مرشحة واضحة لنهاية متتابعة معطاة وحتى التحليل الأولى قد يقودنا إلى الاعتقاد بعدم وجود تقارب . فى هذا الباب سنعطى بعض نتائج أعمق عما سبق ذكره فى الأبواب السابقة والتى يمكن أن تستعمل لتقرير تقارب المتتابعة عندما لا يوجد عنصر خاص يمثل نفسه كقيمة النهاية . أول نتيجة فى هذا الاتجاه هامة جداً . ومع أنه يمكن تعميمها فى R^p ، لكن من المناسب أن نحصر نصها فى حالة المتتابعات فى R .

١٦ – ١ نظرية تقارب باطراد . بفرض $X = (x_n)$ متتابعة لأعداد حقيقية ومتزايدة باطراد بمعنى أن $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$

فينتج أن المتتابعة X تتقارب إذا وإذا فقط كانت محدودة . فى هذه الحالة :

$$\lim (x_n) = \sup \{x_n\}$$

البرهان . قد ظهر فى مفترض ١٤ – ٦ أن المتتابعة التقاربية محدودة . إذا كانت نها $x = (x_n)$ ، $\varepsilon > 0$ ، حينئذ يوجد عدد طبيعى .



(شكل ١٦ – ١)

$K(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $n \geq K(\varepsilon)$ ، فإن

$$x-\varepsilon \leq x_n \leq x+\varepsilon$$

بما أن X تزداد باطراد فتعطى هذه العلاقة

$$x-\varepsilon \leq \sup\{x_n\} \leq x+\varepsilon$$

ومن ذلك ينتج أن $|x-\sup\{x_n\}| \leq \varepsilon$. وبما أن هذا يكون صحيحاً لكل $\varepsilon > 0$ فنستنتج أن $\lim(x_n) = x = \sup\{x_n\}$

وبالعكس ، نفرض أن $X=(x_n)$ متتابعة متزايدة باطراد ومحدودة لأعداد حقيقية . وطبقاً لمبدأ العلو ، فإنه يوجد $x^* = \sup\{x_n\}$ supremum وسنوضح أنه نهاية X . وبما أن x هي الحد الأعلى للعناصر فى X فينتج أن $x_n \leq x^*$ عند $n \in N$ وبما أن x^* هى علو للمتتابعة X ، إذا كانت $\varepsilon > 0$ فإن العدد $x^* - \varepsilon$ ليس الحد الأعلى للمتتابعة X ويوجد عدد طبيعى $K(\varepsilon)$ بحيث أن

$$x^*-\varepsilon < x_{K(\varepsilon)}$$

ومن وجهة نظر خاصية الاطراد للمتتابعة X لكل $n \geq K(\varepsilon)$ نجد أن

$$x^*-\varepsilon < x_n \leq x^*$$

ومن ثم ينتج أن $|x_n - x^*| < \varepsilon$ وخلاصة الشرح هى أن العدد $x^* = \sup\{x_n\}$ الخاصية التى تقول إنه يأخذ $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعى $K(\varepsilon)$ (متوقفاً ε) بحيث أن $|x_n - x^*| < \varepsilon$ طالما $n \geq K(\varepsilon)$ وهذا يوضح أن $x^* = \lim X$ وهو المطلوب إثباته .

١٦ – ٢ نتيجة . بفرض $X=(x_n)$ متتابعة للأعداد حقيقية متناقصة باطراد بمعنى أن

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots .$$

فإن المتتابعة X تتقارب إذا وإذا فقط كانت محدودة فى هذه الحالة .

$$\lim(x_n) = \inf\{x_n\}$$

البرهان . نفرض أن $y_n = -x_n$ عند $n \in N$. حينئذ قد بينا حالا أن المتتابعة $Y = (y_n)$ متتابعة تزايدية باطراد . وعلاوة على ذلك فإن Y تكون محدودة إذا وإذا فقط كانت X محدودة . وإذن ينتج الاستنتاج من النظرية .

١٦ – ٣ أمثلة . (أ) رجع إلى المتتابعة $X = (1/n)$ التي نوقشت في مثال ١٤ – ٨ (أ). من الواضح أن

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \cdots > \frac{1}{n} > \cdots > 0$$

ولذلك ينتج من نتيجة ١٦ – ٢ أن $X = (1/n)$ تتقارب . يمكننا إثبات قيمة نهاية $(1/n)$ إذا أمكننا حساب $\inf\{1/n\}$. وتبادلية إذا كان تقارب X أكيداً فإنه يمكننا غالباً حساب قيمة النهاية باستخدام مفترض ١٥ – ٢ ونظرية ١٥ – ٦ . وفي الحالة التي معنا ، إذا كانت $X' = (1/2, 1/4, \ldots, 1/2n, \ldots)$ فينتج أن

$$\lim X = \lim X' = \tfrac{1}{2} \lim X$$

لذلك نستنتج أن $\lim X = 0$

(ب) نفرض أن $Y = (y_n)$ متتابعة في R المعرفة استنتاجياً بالآتي :

$$y_1 = 1, \qquad y_{n+1} = (2y_n + 3)/4 \quad \text{عند} \quad n \in N.$$

الحساب المباشر يوضح أن $y_1 < y_2 < 2$ إذا كانت $y_{n-1} < y_n < 2$ حينئذ

$$2y_{n-1} + 3 < 2y_n + 3 < 2 \cdot 2 + 3$$

التي منها ينتج أن $2 > y_{n+1} > y_n$ بالاستنتاج نجد أن المتتابعة Y تتزايد باطراد ومحدودة من أعلى بالعدد ٢ . وينتج من نظرية التقارب المطرد أن المتتابعة Y تتقارب إلى نهاية ليست أكبر من العدد ٢ . وفي هذه الحالة ربما لا يكون من السهل تقدير $y = \lim Y$ بحساب $\sup\{y_n\}$. لكن بمجرد معرفتنا بوجود نهاية . فتوجد طريقة أخرى لحساب قيمتها . طبقاً لمفترض ١٥ – ١ يكون عندنا $y = \lim (y_n) = \lim (y_{n+1})$ باستخدام نظرية ١٥ – ٦ ، يجب أن تحقق النهاية y العلاقة

$$y = (2y + 3)/4 \, .$$

لذلك ، نستنتج أن $y = \frac{3}{2}$

(جـ) بفرض $Z = (z_n)$ هي المتتابعة في R والمعرفة بالآتي

$$z_1 = 1, \qquad z_{n+1} = \sqrt{2 z_n} \quad \text{عند} \quad n \in N$$

من الواضح أن $z_1 < z_2 < 2$. إذا كانت $z_n < z_{n+1} < 2$ فإن $2z_n < 2z_{n+1} < 4$ بحيث أن $z_{n+1} = \sqrt{2z_n} < z_{n+2} = \sqrt{2z_{n+1}} < 2 = \sqrt{4}$

هذا يوضح أن Z متتابعة متزايدة باطراد ومحدودة من أعلى بالعدد ٢ . وإذن تتقارب Z إلى العدد z ويمكن توضيح مباشرة أن $2 = \sup\{z_n\}$ مما يثبت أن النهاية هي $z = 2$ وتبادلياً يمكننا استعمال الطريقة في المثال السابق . وبمعرفة أن المتتابعة لها نهاية z ، نستنتج من العلاقة $z_{n+1} = \sqrt{2z_n}$ أن z يجب أن تحقق $z = \sqrt{2z}$. لإيجاد الجذور لهذه المعادلة الأخيرة ، نجد أنه بالتربيع نحصل على $z^2 = 2z$ والتي جذراها هما $0, 2$. من الواضح أن الصفر لا يمكن أن يكون النهاية (لماذا ؟) ومن ثم هذه النهاية يجب أن تكون مساوية للعدد ٢ .

(د) بفرض $U = (u_n)$ هي المتتابعة لأعداد حقيقية معرفة بما يلي $u_n = (1 + 1/n)^n$ حيث $n \in N$ باستخدام نظرية ذات الحدين ، يمكننا أن نكتب

$$u_n = 1 + \frac{n}{1}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n}$$

بقسمة قوى n في بسوط معاملات ذات الحدين ، نحصل على

$$u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

وبتعبير u_{n+1} بنفس الطريقة ، يكون لدينا

$$u_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

لاحظ أن التعبير لحد u_n يحتوى $n + 1$ حدا ، والتعبير لحد u_{n+1} يحتوى على $n + 2$ حدا . يوضح اختيارا أوليا أن كل حد في u_n ليس أكبر من الحد المناظر في u_{n+1} والأخير يزيد بحد موجب واحد . لذلك يكون لدينا

$$u_1 < u_2 < \cdots < u_n < u_{n+1} < \cdots$$

لتوضيح أن المتتابعة محدودة ، نلاحظ أنه إذا كانت $p = 1, 2, \ldots, n$ فإن

$(1-p/n)<1$. وبالإضافة إلى ذلك (لماذا ؟) بحيث أن $p! \geq 2^{p-1}$ من التعبير السابق لحد u_n ، هذه التقديرات تعطى

$$2<u_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3, \qquad n>2$$

من ذلك ينتج أن المتتابعة المطردة U محدودة من أعلى بالعدد ٣ .

تدل نظرية التقارب المطرد على أن المتتابعة U تقترب من عدد حقيق قيمته الذى على الأكثر هى ٣ . وكما هو محتمل معروف جدا للقارئ أن نهاية U هو العدد الأساسى e وبتكرار حساباتنا يمكننا إيجاد تقريبات قياسية للقيمة e ولكن لا يمكننا بهذه الطريقة حسابها بالضبط . حيث أنها غير قياسية بالرغم من إمكانية حسابها لأرقام عشرية كثيرة على حسب المطلوب . (هذا يوضح أن نتيجة مثل نظرية التقارب المطرد التى تقرر وجود نهاية المتتابعة فقط يمكن أن يكون لها استعمال هام حتى ولو كانت القيمة المضبوطة للنهاية لا يمكن الحصول عليها بسهولة) .

نظرية بولتزانو — ڤيرشتراس :

نظرية التقارب المطرد مفيدة بدرجة غير عادية وهامة ، ولكن من عيوبها أنها تستخدم فقط لمتتابعات مطردة . ولذلك يليق بنا إيجاد شرط يضمن تقارباً فى R أو R^p بدون استخدام خاصية الاطراد . هذا الشرط المرغوب هو معيار كوشى والذى سيقدم فيما بعد . ولكن سنعطى أولا صورة لنظرية بولتزانو ڤيرشتراس ١٠ — ٦ التى تستعمل بوجه خاص للمتتابعات .

١٦ — ٤ نظرية بولتزانو — ڤيرشتراس . متتابعة محدودة فى R^p لها متتابعة جزئية تقاربية .

البرهان . بفرض $X=(x_n)$ متتابعة محدودة فى R^p . إذا كان يوجد فقط عدد محدود لقيم مميزة فى المتتابعة X ، فإن أحد هذه القيم على الأقل يجب أن يحدث مراراً بدرجة لا نهائية . إذا عرفنا متتابعة جزئية للمتتابعة X باختيار هذا العنصر فى كل مرة عند ظهوره فإننا على متتابعة جزئية تقاربية للمتتابعة X .

ومن جهة أخرى ، إذا كانت المتتابعة X تحوى عدداً لا نهائيا من قيم مميزة فى R^p ، حينئذ — بما أن هذه النقط محدودة — ، تدل نظرية بولتزانو ڤيرشتراوس ١٠ — ٦ للفئات على أنه يوجد على الأقل نقطة تجميع واحدة ولتكن x^* نفرض أن x_{n_1} هو عنصر من X بحيث أن

$$\|x_{n_1}-x^*\|<1$$

نعتبر الجوار $V_2=\{y:\|y-x^*\|<\frac{1}{2}\}$ بما أن النقطة x^* نقطة تجميع الفئة $S_1=\{x_m: m\geq 1\}$ ، فهى أيضاً نقطة تجميع للفئة $S_2=\{x_m: m>n_1\}$ والتى نحصل عليها بحذف عدد محدود من عناصر S_1 (لماذا ؟) لذلك يوجد عنصر x_{n_2} من S_2 (حيث $n>n_1$) ينتمى إلى V_2 الآن نفرض V_3 هى الجوار $V_3=\{y:\|y-x^*\|<\frac{1}{3}\}$ ونفرض $S_3=\{x_m: m>n_2\}$. وحيث أن x^* هى نقطة تجميع للمتتابعة S_3 فيجب وجود عنصر x_{n_3} من S_3 (حيث $n_3>n_2$) وينتمى إلى V_3 وبالاستمرار فى هذه الطريقة نحصل على متتابعة جزئية $X'=(x_{n_1}, x_{n_2},\ldots)$ من X عند

$$\|x_{n_r}-x^*\|<1/r$$

بحيث أن $\lim X'=x^*$. وهو المطلوب إثباته

١٦ – ٥ نتيجة . إذا كانت $X=(x_n)$ متتابعة فى R^p ، x^* هى نقطة تجميع للفئة $\{x_n: n\in N\}$ فإنه يوجد متتابعة جزئية X' من X بحيث تتقارب إلى x^* .

وفى الحقيقة ، هذا هو ما أثبته الجزء الثانى من برهان ١٦ – ٤

متتابعات كوشى :

ندخل الآن مفهوماً هاماً عن متتابعة كوشى فى R^p . ونتيجة هذا هى أن المتتابعة فى R^p تكون تقاربية إذا وإذا فقط كانت متتابعة كوشى .

١٦ – ٦ تعريف . متتابعة $X=(x_n)$ فى R^p يقال إنها متتابعة كوشى فى حالة أنه لكل $\varepsilon>0$ يوجد عدد طبيعى $M(\varepsilon)$ بحيث أنه لجميع

$$m, n\geq M(\varepsilon) \quad \text{يكون} \quad \|x_m-x_n\|<\varepsilon$$

لكى نعاون الدافع إلى مفهومية متتابعة كوشى فإننا سوف نوضح أن كل متتابعة تقاربية فى R^p هى متتابعة كوشى .

١٦ – ٧ مفترض . إذا كانت $X=(x_n)$ هى متتابعة تقاربية فى R^p ، فإن X هى متتابعة كوشى .

البرهان . إذا كانت $x=\lim X$ ، حينئذ عند أخذ $\varepsilon>0$ فإنه يوجد عدد طبيعى $K(\varepsilon/2)$ بحيث أنه إذا كانت $n\geq K(\varepsilon/2)$ فإن $\|x_n-x\|<\varepsilon/2$ أى أنه إذا كانت $M(\varepsilon)=K(\varepsilon/2)$ وإذا كانت $m, n\geq M(\varepsilon)$ فإن

$$\|x_m-x_n\|\leq\|x_m-x\|+\|x-x_n\|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

ومن ثم المتتابعة التقاربية X هى متتابعة كوشى . وهو المطلوب إثباته

ولكى نطبق نظرية بولتزانو – ڤيرشتراس سنحتاج إلى النتيجة الآتية :

١٦ – ٨ مفترض . متتابعة كوشى فى R^p تكون محدودة .

البرهان . بفرض $X=(x_n)$ هى متتابعة كوشى وبفرض أن $\varepsilon = 1$ إذا كانت $m=M(1)$ و $n \geq M(1)$ فإن $\|x_m - x_n\| < 1$ ومن متباينة المثلث فهذا يدل على أن $\|x_n\| < \|x_m\| + 1$ عند $n \geq M(1)$ لذلك إذا كانت

$$B = \sup\{\|x_1\|, \ldots, \|x_{m-1}\|, \|x_m\|+1\}$$

حينئذ يكون لدينا $\|x_n\| \leq B$ لكل $n \in N$ أى أن متتابعة كوشى X تكون محدودة .
وهو المطلوب إثباته

١٦ – ٩ مفترض . إذا كانت X' فئة جزئية لمتتابعة كوشى X فى R^p متقاربة إلى عنصر x ، فإن المتتابعة الكلية X تتقارب إلى x .

البرهان . حيث أن $X = (x_n)$ هى متتابعة كوشى . فبأخذ $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعى $M(\varepsilon/2)$ بحيث أنه إذا كانت $m, n \geq M(\varepsilon/2)$ فإن

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon/2 \qquad (*)$$

إذا كانت المتتابعة $X' = (x_{n_k})$ تتقارب إلى x ، فيوجد عدد طبيعى $K \geq M(\varepsilon/2)$ بحيث ينتمى إلى الفئة $\{n_1, n_2, \ldots\}$ وبحيث أن

$$\|x - x_K\| < \varepsilon/2$$

الآن نفرض n أى عدد طبيعى بحيث أن $n \geq M(\varepsilon/2)$ فينتج أن $(*)$ تكون صحيحة عند هذه القيمة للعدد n وعند $m = K$ أى أن

$$\|x - x_n\| \leq \|x - x_K\| + \|x_K - x_n\| < \varepsilon$$

حيث $n \geq M(\varepsilon/2)$ لذلك تقترب المتتابعة X من العنصر x ، الذى هو النهاية للمتتابعة الجزئية X'.
وهو المطلوب إثباته

الآن أصبحنا مستعدين للحصول على المعيار الهام لكوشى . برهاننا قصير خداعاً ولكن القارئ سيلاحظ أن هذا العمل قد سبق أداءه ونحن فقط نضع الأجزاء مع بعضها .

١٦ – ١٠ معيار تقارب كوشى . متتابعة فى R^p تكون تقاربية إذا وإذا فقط كانت متتابعة كوشى .

البرهان . لوحظ من مفترض ١٦ – ٧ أن متتابعة تقاربية يجب أن تكون متتابعة كوشى .

وبالعكس ، نفرض أن X هي متتابعة كوشي في R^p ينتج من مفترض ١٦ – ٨ أن المتتابعة X محدودة في R^p . وحسب نظرية بولتزانو – فيرشتراوس ١٦ – ٤ تكون المتتابعة المحدودة X لها متتابعة جزئية متقاربة X' . من مفترض ١٦ – ٩ تتقارب المتتابعة الكلية X إلى النهاية X' .

١٦ – ١١ أمثلة . (أ) بفرض أن $X=(x_n)$ هي المتتابعة في R والمعرفة

$$x_1=1, x_2=2, \ldots, x_n=\tfrac{1}{2}(x_{n-2}+x_{n-1}) \quad \text{عند} \quad n>2.$$

ويمكن توضيح بالاستنتاج أن

$$1 \le x_n \le 2 \quad \text{عند} \quad n \in N$$

لكن المتتابعة X ليست متناقصة باطراد ولا متزايدة باطراد (في الحقيقة تكون الحدود التي رمزها السفلي فردياً متتابعة متزايدة وتكون حدودها التي رمزها السفلي زوجياً متناقصة) وبما أن الحدود في المتتابعة تكونت بأخذ المتوسط ، فقد اتضح من قبل أن

$$|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{عند} \quad n \in N$$

أي أنه إذا كانت $m>n$ ، فنستخدم متباينة المثلث لنحصل على

$$|x_n - x_m| \le |x_n - x_{n+1}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m|$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-2}} = \frac{1}{2^{n-1}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{m-n-1}}\right) < \frac{1}{2^{n-2}}$$

وبإعطاء $\varepsilon > 0$ ، فنجد أن إذا اخترت n كبيرة بدرجة تجعل $1/2^n < \varepsilon/4$ وكانت $m \ge n$ ينتج أن

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

لذلك ، X هي متتابعة كوشي في R وبمعيار كوشي تتقارب المتتابعة X إلى عدد x . لحساب النهاية نلاحظ أنه بأخذ النهاية في قاعدة التعريف ينتج النتيجة الصحيحة ولكنها غير مفيدة وهي

$$x = \tfrac{1}{2}(x+x)$$

لكن ، حيث أن المتتابعة X تتقارب ، فتتقارب المتتابعة الجزئية برموز سفلى فوقية وبالاستنتاج يمكننا إثبات أن

$$x_1 = 1, \qquad x_3 = 1+\frac{1}{2}, \qquad x_5 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}, \ldots$$

$$x_{2n+1} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}}, \ldots$$

ومن ذلك ينتج

$$x_{2n+1}=1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-1/4^n}{1-1/4}=1+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

لذلك ، تتقارب المتتابعة الجزئية بأدلة فردية إلى $5/3$ ومن ثم المتتابعة الكلية لها نفس النهاية .

(ب) نفرض أن $X=(x_n)$ هي المتتابعة الحقيقية المعطاة كما يلي

$$x_1=\frac{1}{1!},\quad x_2=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!},\ldots,\quad x_n=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n!},\ldots$$

بما أن هذه المتتابعة ليست مطردة ، فإن استعمالا مباشراً لنظرية التقارب المطرد ليس ممكنة . لاحظ أنه إذا كانت $m>n$ ، فإن

$$x_m-x_n=\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!}+\frac{(-1)^{n+3}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{(-1)^{m+1}}{m!}$$

وبتذكرنا أن $2^{r-1}\le r!$ نجد أن

$$|x_m-x_n|\le\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{m!}$$
$$\le\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}}<\frac{1}{2^{n-1}}$$

لذلك المتتابعة هي متتابعة كوشي في $\boldsymbol{R}$

(جـ) إذا كانت $X=(x_n)$ هي متتابعة في $\boldsymbol{R}$ المعرفة بما يلي

$$x_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\qquad \text{عند}\qquad n\in\boldsymbol{N}$$

وإذا كانت $m>n$ ، فإن

$$x_m-x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{m}$$

حيث كل من هذه $m-n$ حداً يزيد عن $1/m$ ، هذا الفرق يزيد عن $(m-n)/m=1-n/m$ وبوجه خاص ، إذا كانت $m=2n$ يكون عندنا

$$x_{2n}-x_n>\tfrac{1}{2}$$

هذا يوضح أن X ليست متتابعة كوشي ، ومن ثم نستنتج أن X تباعدية (قد برهنا حالا أن « المتسلسلة التوافقية » تباعدية) .

تمرينـــات :

١٦ – (أ) بفرض أن $x_1 \in R$ تحقق $x > 1$ وبفرض $x_{n+1} = 2 - 1/x_n$ عند $n \in N$ وضح أن المتتابعة (x_n) تكون مطردة ومحدودة . ما هي نهايتها ؟

١٦ – (ب) بفرض أن $y_1 = 1$ و $y_{n+1} = (2 + y_n)^{1/2}$ عند $n \in N$ اثبت أن (y_n) تكون مطردة ومحدودة . ما هي نهايتها ؟

١٦ – (ج) بفرض أن $a > 0$ ، ونفرض أن $z_1 > 0$. عرف $z_{n+1} = (a + z_n)^{1/2}$ عند $n \in N$ أثبت أن (z_n) تتقارب .

١٦ – (د) إذا كانت a تحقق $0 < a < 1$. وضح أن المتتابعة $X = (a^n)$ تقاربية . بما أن $Y = (a^{2n})$ هي فئة جزئية ، فيكون لدينا

$$\lim X = \lim Y = (\lim X)^2 \quad \text{وأن} \quad \lim X = 0$$

١٦ – (هـ) وضح أن كل متتابعة فى R يكون لها إما متتابعة جزئية متزايدة باطراد أو متتابعة جزئية متناقصة باطراد .

١٦ – (و) استخدم تمرين ١٦–هـ لتبرهن نظرية بولتزانو – فيرشتراس للمتتابعات فى R .

١٦ – (ز) حدد التقارب أو التباعد للمتتابعة (x_n) حيث

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad \text{عند} \quad n \in N$$

١٦ – (ح) بفرض أن $X = (x_n)$ ، $Y = (y_n)$ متتابعتين فى R^p وبفرض $Z = (z_n)$ متتابعة مختلطة بالآتى $z_1 = x_1, z_2 = y_1, \ldots, z_{2n} = x_n, z_{2n+1} = y_n, \ldots$

هل صحيح أن Z تتقارب إذا وإذا فقط كانت X ، Y تقــاربيتين وكان $\lim X = \lim Y$ ؟

١٦ – (ط) وضح مباشرة أن المتابعات الآتية هى متتابعات كوشى :

(ا) $\left(\frac{1}{n}\right)$ (ب) $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ (ج) $\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$

١٦ – (ى) وضح مباشرة أن المتتابعات الآتية ليست متتابعات كوشى :

(ا) $((-1)^n)$ ، (ب) $(n + (-1)^n/n)$ ، (ج) (n^2)

١٦ – (ك) بفرض أن $X = (x_n)$ هى متتابعة لأعداد حقيقية موجبة مضبوطة ، وبفرض أن $\lim (x_{n+1}/x_n) = L$ وأن $0 < \varepsilon < L$. وضح أنه يوجد $A > 0, B > 0$ و $K \in N$ بحيث أن $A(L - \varepsilon)^n \le x_n \le B(L + \varepsilon)^n$ عند $n \ge K$ ومن ذلك أثبت أن $(x_n^{1/n}) = L$.

١٦ – (ل) استخدم مثال ١٦ – ٣٫ (د) والتمرين السابق المتتابعة $(n^n/n!)$ لتوضح أن $(n/(n!)^{1/n}) = e$

١٦ – (م) أثبت التقارب وأوجد النهايات للمتتابعات الآتية :

(أ) $((1+1/n)^{n+1})$ ، (ب) $((1+1/2n)^n)$

(ج) $((1+2/n)^n)$ ، (د) $((1+1/(n+1))^{3n})$

١٦ – (ن) بفرض أن $0 < a_1 < b_1$ وعرف عند $n \in N$

$$a_{n+1} = (a_n b_n)^{1/2}, \qquad b_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n)$$

بالاستنتاج وضح أن $a_n < b_n$. وضح أن كلا من (a_n) و (b_n) تتقارب إلى نفس النهاية .

١٦ (س) اعط برهاناً لنظرية تقاطع كانتور ١١ – ٤ بأخذ نقطة $x_n \in F_n$ واستخدام نظرية بولتزانو – فيوشتراس ١٦ – ٤ .

١٦ – (ع) اعط برهاناً لنظرية أقرب نقطة ١١ – ٦ باستخدام نظرية بولتزانو فير – شتراوس ١٦ – ٤ .

١٦ – (ف) أثبت أنه إذا كانت K_1 ، K_2 فئتين جزئيتين مدمجتين فى R^p فإنه يوجد فقط $x_1 \in K_1, x_2 \in K_2$ بحيث أنه إذا كانت $z_1 \in K_1, z_2 \in K_2,$ فإن $\|z_1 - z_2\| \geq \|x_1 - x_2\|$

مشروع :

١٦ – α فى هذا المشروع ، نفرض أن c_0 و m تدل على مجموعات المتتابعات الحقيقية التى قدمت فى الخطة ١٥ – β وبفرض أن d تشير إلى المترى المعرف فى جزء (د) لتلك الخطة :

(أ) إذا كانت $r \in I$ و $r = 0 . r_1 r_2 \cdots r_n \cdots$ هى مفكوكها العشرى ، نعتبر العنصر $X_r = (r_n)$ فى m . استنتج أنه توجد فئة جزئية غير معدودة A من m بحيث أنه إذا كانت X_r ، X_s هما عنصران مختلفان من A ، فإن $d(X_r, X_s) \geq 1$

(ب) نفرض أن B هى فئة جزئية من c بخاصية أنه إذا كانت Y ، X عنصرين مختلفين من B ، فإن $d(X, Y) \geq 1$ أثبت أن B هى فئة عددية .

(جـ) إذا كانت $j \in N$ وبفرض أن $Z_j = (z_{nj} : n \in N)$ هى المتتابعة حيث كل من العناصر الأولى j هو واحد صحيح وكل من عناصرها الباقية هو صفر . لاحظ أن Z_j تنتمى لكل من الفراغات المترية m, c, c_0 وأن $d(Z_j, Z_k) = 1$ عند $j \neq k.$ وضح أن المتتابعة $(Z_j : j \in N)$ مطردة بمعنى أن كل متتابعة الأحداثى $(z_{nj} : j \in N)$ مطردة . وضح أن المتتابعة (Z_j) ليست تقاربية بالنسبة المترى d فى أى من هذه الفراغات الثلاثة .

(د) أثبت أنه يوجد متتابعة (X_j) فى c_0 و c و m وتكون محدودة (بمعنى أنه يوجد مقدار ثابت K حيث أن $d(X_j, 0) \leq K$ لكل $j \in N$) لكن ليس لها متتابعة جزئية تقاربية .

(هـ) إذا كانت d هو مترى على الفئة M ، فنقول أن المتتابعة (X_j) فى M هى متتابعة كوشى إذا كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $K(\varepsilon) \in N$ بحيث أن $d(X_j, X_k) < \varepsilon$ عندما $j, k \geq K(\varepsilon)$ فنقول أن M هى تامة بالنسبة إلى d فى حالة كون كل متتابعة فى M تقترب إلى عنصر من M) . أثبت أن الفئات c_0 و c و m تكون تامة بالنسبة للمترى الذى اعتبرناه .

(و) بفرض f هى المجموعة لكل متتابعات حقيقية والتى لها فقط عدد محدود من عناصر غير صفرية وعرف d كما سبق . أثبت أن d هى مترى على f ، لكن f ليست تامة بالنسبة إلى d .

الباب السابع عشر — متتابعات الدوال :

قد اعتبرنا فى الأبواب الثلاثة السابقة تقارب متتابعات لعناصر من R^p ، وفى الباب الحالى سنعتبر متتابعات الدوال . بعد بعض تمهيدات بسيطة ، سنقدم تعبيرا رقيقاً إلى حد ما ، لكنه أساس ، عن موضوع التقارب المنتظم لمتتابعات الدوال .

بفرض أن $D \subseteq R^p$ معطاة ونفرض أنه لكل عدد طبيعى $n \in N$ توجد دالة f_n بنطاق D ومدى فى R^q سنقول أن (f_n) هى متتابعة دوال على $D \subseteq R^p$ إلى R^q . ومن الواجب فهم أنه لأى نقطة x فى D تعطى متتابعة دوال مثل هذه متتابعة عناصر فى R^q أى المتتابعة

$$(f_n(x)) \quad , \qquad (17.1)$$

التى يمكن الحصول عليها بحساب كل من الدوال عند x . المتتابعة ١٧ — ١ ربما تتقارب عند نقط معينة x فى D عند نقط أخرى فى D فإن هذه المتتابعة ربما تتباعد . لكل من هذه النقط x التى عندها D تتقارب المتتابعة (١٧ — ١) توجد ، بنظرية ١٤—٥ ، نقطة محددة وحيدة من R^q ، وبوجه عام ، ستعتمد قيمة هذه النهاية عند وجود هذا الاختيار للنقطة x وبهذه الطريقة سنظهر دالة نطاقها يتكون من جميع نقط x فى $D \subseteq R^p$ التى عندها (١٧ — ٢) تتقارب المتتابعات (١٧ — ١) فى R^q .

الآن سنجمع هذه الكلمات التقديمية فى تعريف أصولى لتقارب متتابعة الدوال .

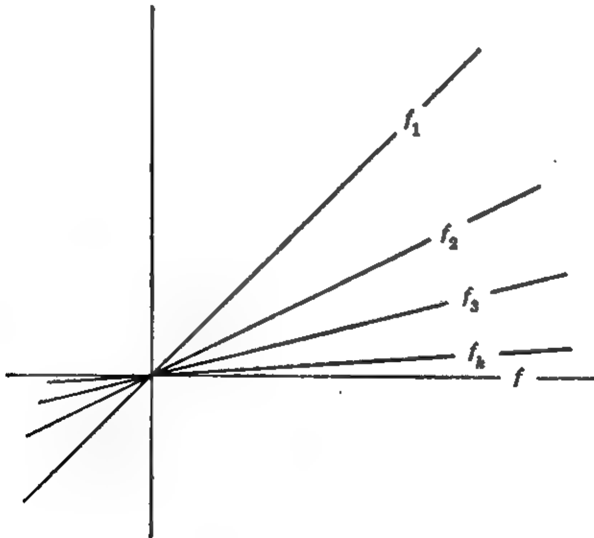
١٧ – ١ تعريف . بفرض (f_n) متتابعة دالة فى $D \subseteq R^p$ إلى R^q ، ونفرض أن D_0 هى فئة جزئية من D ، ونفرض أن f دالة نطاقها يحتوى D_0 ومداها فى R^q . نقول أن المتتابعة (f_n) تتقارب فى D_0 إلى f ، إذا كانت لكل x فى D_0 المتتابعة $(f_n(x))$ تتقارب فى R^q إلى $f(x)$. فى هذه الحالة تسمى الدالة f النهاية فى D_0 للمتتابعة (f_n) . عند وجود مثل هذه الدالة نقول أن المتتابعة (f_n) تتقارب إلى f فى D_0 ، أو ببساطة ، تكون المتتابعة تقاربية فى D_0 .

ينتج من نظرية ١٤ – ٥ أن ، ما عدا تغير ممكن فى النطاق D_0 ، نهاية الدالة وحيدة التحديد . عادة ، نختار D_0 بحيث تكون أكبر فئة ممكنة أى ، الفئة لكل x فى D التى عندها (١٧ – ١) تتقارب . ولكى نرمز إلى أن المتتابعة (f_n) تتقارب فى D_0 إلى f نكتب أحياناً

$$f = \lim (f_n) \text{ على } D_0 \quad \text{أو} \quad f_n \to f \text{ على } D_0$$

سنعتبر الآن بعض أمثلة لهذه الفكرة . وللتبسيط ، سنعالج الحالة الخاصة $p = q = 1$.

١٧ – ٢ أمثلة . (أ) لكل عدد طبيعى n ، نفرض أن f_n معرفة عند x فى $D = R$ بأنها $f_n(x) = x/n$ بفرض أن f معرفة لكل x فى $D = R$ بالتعريف $f(x) = 0$ (انظر شكل ١٧ – ١) . النص بأن المتتابعة (f_n) تتقارب فى R إلى f يكافئ النص بأنه لكل



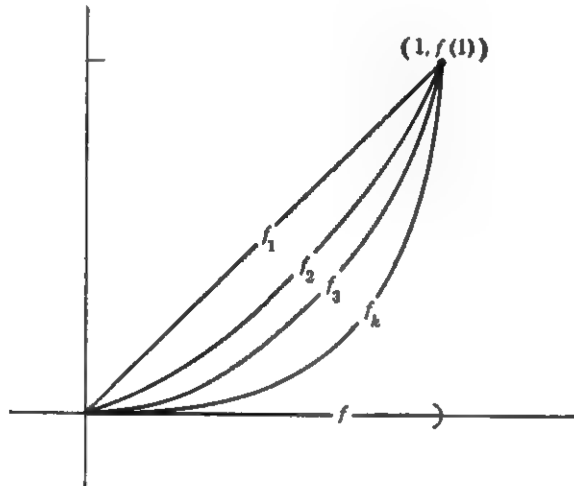
(شكل ١٧ – ١)

عدد حقيقي x تتقارب المتتابعة العددية (x/n) إلى صفر . وللاحظة أن هذه هى الحالة نستخدم مثال ١٤ – ٨ (أ) ونظرية ١٥ – ٦ (ب)

(ب) بفرض أن $D=\{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ ونفرض لكل عدد طبيعى n أن المتتابعة f_n معرفة بالتعريف $f_n(x)=x^n$ لكل x فى D ونفرض أن f معرفة بالآتى

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \qquad 0 \leq x < 1 \\ &= 1, \qquad x = 1 \end{aligned}$$

(انظر شكل ١٧–٢) . من الواضح أن عندما $x=1$ حينئذ $f_n(x)=f_n(1)=1^n=1$ بحيث



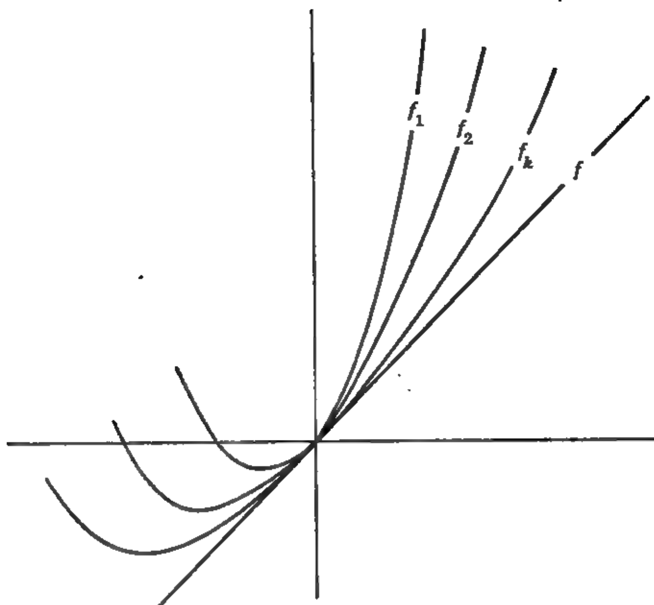
(شكل ١٧ – ٢)

أن $f_n(1) \to f(1)$. محدد ضمناً فى مثال ١٤ – ٨ (ج) أنه إذا كانت $0 \leq x < 1$ فإن $f_n(x)=x^n \to 0$ لذلك ، نستنتج أن (f_n) تتقارب فى D إلى f (ليس من الصعب أن نبرهن أنه إذا كانت $x > 1$ فإن $(f_n(x))$ لا تتقارب بالمرة)

(ج) بفرض $D=\mathbf{R}$ ونفرض لكل عدد طبيعى n ، أن f_n هى الدالة المعرفة عند x فى D بأنها

$$f_n(x)=\frac{x^2+nx}{n}$$

ونفرض $f(x) = x$. (انظر شكل ١٧–٣) . بما أن $f_n(x)=(x^2/n)+x$ فينتج من مثال ١٤–٨(أ) ونظرية ١٥–٦ (ب) أن $(f_n(x))$ تتقارب إلى $f(x)$ لجميع $x \in \mathbf{R}$

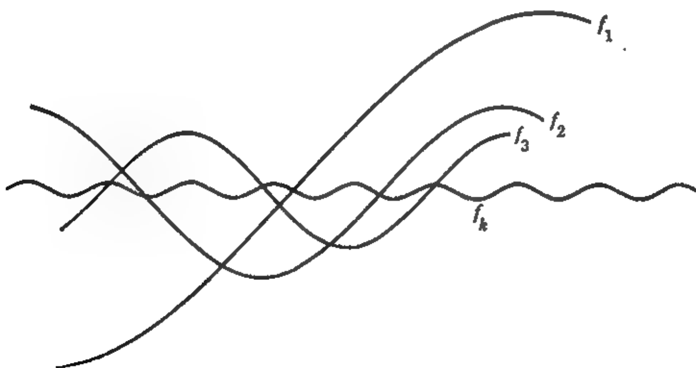


(شكل ١٧ – ٣)

(د) بفرض أن $D = \mathbf{R}$ ، ولكل عدد طبيعى n نفرض أن f_n معرفة بأنها

$$f_n(x) = (1/n)\sin(nx + n)$$

(انظر شكل ١٧–٤) (تعريف عنيف الدالة الجيب لا نحتاجه هنا ، وفى الحقيقة ، كل ما نريده هو أن $|\sin y| \leq 1$ عند أى عدد حقيقى y) . إذا كانت f معرفة بأنها دالة الصفر $f(x) = 0, x \in \mathbf{R}$ حينئذ $f = \lim(f_n)$ فى $\mathbf{R}$. وفى الحقيقة لكل أى عدد حقيقى x ،



(شكل ١٧ – ٤)

يكون لدينا

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n}|\sin(nx+n)|\leq\frac{1}{n}$$

إذا كانت $\varepsilon>0$ فإنه يوجد عدد طبيعي $K(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $n\geq K(\varepsilon)$ فإن $1/n<\varepsilon$. ومن ثم لمثل n نستنتج أن

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

مهما كانت قيمة x . لذلك نستنتج أن المتابعة (f_n) تتقارب إلى f (لاحظ أنه باختيار n كبيرة كبراً كافياً ، فيمكننا جعل الفرق $|f_n(x)-f(x)|$ أقل من ε لجميع قيم x في وقت واحدا) .

نصيغ النص الآتى ١٧ – ١ جزئياً لتقرير تعريف ١٧ – ١ وجزئياً تمهيد الطريق لفكرة هامة عن تقارب منتظم .

١٧ – ٣ مفترض . متتابعة (f_n) لدوال في $D\subseteq R^p$ إلى R^q تتقارب إلى دالة في $D_0\subseteq D$ إذا وإذا فقط كان يوجد لكل $\varepsilon>0$ وكل x في D_0 عدد طبيعي $K(\varepsilon, x)$ بحيث أنه لكل $n\geq K(\varepsilon, x)$ فإن

$$\|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon \tag{17.2}$$

بما أن هذه مجرد نص ثان لتعريف ١٧–١ لذلك سوف لا نتعمق في تفصيلات البرهان . لكن سنتركها كتمرين للقارئ . نرغب فقط في الإشارة إلى أن قيمة n المطلوبة في متباينة (١٧ – ٢) تتوقف ، بوجه عام ، على كل من $\varepsilon>0$ و $x\in D_0$ سيلاحظ قارئ متيقظ تواً أنه في أمثلة ١٧ – ٢ (أ – ج) كانت قيمة n المطلوبة للحصول على (١٧ – ٢) تعتمد على كل من $\varepsilon>0$ و $x\in D_0$ لكن في مثال ١٧ – ٢ (د) المتباينة (١٧ – ٢) يمكن أن تتحقق لكل x في D_0 على شرط أن نختار n كبيرة كبراً كافياً وبحيث تعتمد على ε فقط .

وبالضبط هذا الفرق الدقيق نوعاً ما الذى يميز بين مدلول التقارب العادى لمتابعة الدوال (بمعنى تعريف ١٧ – ١) وتقارب منتظم الذى نعرفه الآن .

١٧ – ٤ تعريف . متتابعة (f_n) لدوال في $D\subseteq R^p$ إلى R^q تتقارب بانتظام في فئة جزئية D_0 من D إلى دالة f في حالة كون أنه لكل $\varepsilon>0$ يوجد عدد طبيعي $K(\varepsilon)$ (متوقف على ε لكن ليس متوقفاً على $x\in D_0$) بحيث أنه لكل $n\geq K(\varepsilon)$ ، $x\in D_0$ فإن

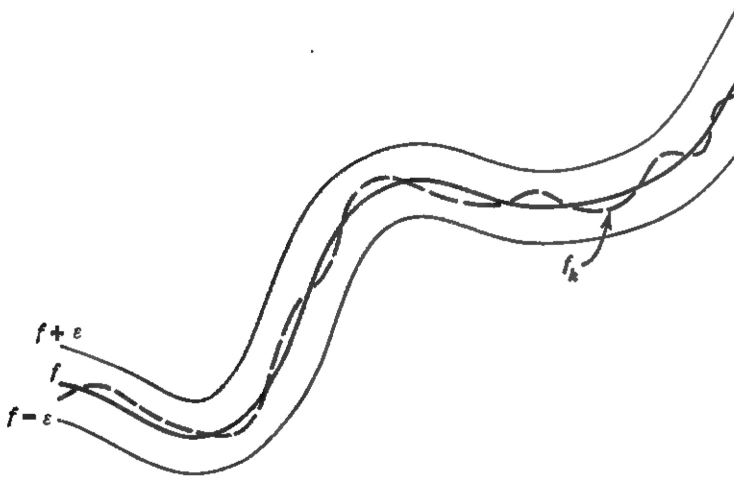
$$\|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon \tag{17.3}$$

فى هذه الحالة تقول إن المتتابعة تقاربية بانتظام فى D_0 (انظر شكل ١٧ – ٥) .

ينتج مباشرة أنه إذا كانت المتتابعة (f_n) تقاربية بانتظام على D_0 إلى f ، حينئذ هذه متتابعة دوال أيضاً تتقارب إلى f بمعنى تعريف ١٧ – ١ وكون العكس لا يكون صحيحاً يتضح بفحص دقيق لأمثلة ١٧–٢ (أ – ج) ، ستعطى أمثلة أخرى فيما بعد . وقبل أن نستمر يكون من المفيد أن نقرر الشرط اللازم والكافى للمتتابعة (f_n) لكى تفشل فى أن تتقارب بانتظام فى D_0 إلى f .

١٧ – ٥ مفترض . متتابعة (f_n) لا تتقارب بانتظام فى D_0 إلى f إذا وإذا فقط كان يوجد عند عدد ما ε_0 حيث $0 < \varepsilon_0$ متتابعة جزئية (f_{n_k}) من (f_n) ومتتابعة (x_k) فى D_0 بحيث أن

$$\|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)\| \geq \varepsilon_0 \quad \text{لكل} \quad k \in N \tag{17.4}$$



(شكل ١٧ – ٥)

برهان هذه النتيجة يتطلب فقط من القارئ أن ينفى تعريف ١٧ – ٤ . سيترك كتمرين جوهرى للقارئ . المفترض السابق مفيد لتوضيح أن الأمثلة ١٧ – ٢ (أ – ج) لا تتقارب بانتظام فى الفئات المعطاة D_0 .

١٧ – ٦ أمثلة . (أ) نعتبر مثال ١٧ – ٢ (أ) . إذا كانت $n_k = k$ و $x_k = k$ ، فإن $f_k(x_k) = 1$ بحيث أن

$$|f_k(x_k)-f(x_k)|=|1-0|=1$$

هذا يوضح أن المتتابعة (f_n) لا تتقارب بانتظام فى $\boldsymbol{R}$ إلى f .

(ب) نعتبر مثال ١٧ – ٢ (ب) . إذا كانت $n_k=k$ ، $x_k=(\frac{1}{2})^{1/k}$ فإن

$$|f_k(x_k)-f(x_k)|=|f_k(x_k)|=\tfrac{1}{2}$$

لذلك ، نستنتج أن المتتابعة (f_n) لا تتقارب بانتظام فى $[0, 1]$ إلى f .

(ج) نعتبر مثال ١٧ – ٢ (ج) . إذا كانت $n_k=k$ ، $x_k=k$ حينئذ .

$$|f_k(x_k)-f(x_k)|=k$$

مما يثبت أن (f_k) لا تتقارب بانتظام فى $\boldsymbol{R}$ إلى f .

(د) نعتبر مثال ١٧ – ٢ (د) فيها أن

$$|f_n(x)-f(x)|\leq 1/n$$

لكل x فى $\boldsymbol{R}$ ينتج أن المتتابعة (f_n) تتقارب بانتظام فى $\boldsymbol{R}$ إلى f .

العمود المنتظم :

من المفيد غالباً فى مناقشة التقارب المنتظم استعمال عمود معين فى فراغ متجه الدوال .

إذا كانت $D\subseteq \boldsymbol{R}^p$ ، $f:D\to \boldsymbol{R}^q$ نقول أن f محدودة فى حالة وجود $M>0$ بحيث أن $\|f(x)\|\leq M$ لكل $x\in D$. إذا كانت $f:D\to \boldsymbol{R}^q$ محدودة ، حينئذ ينتج أن العدد $\|f\|_D$ المعرف بواسطة

$$\|f\|_D=\sup\{\|f(x)\|:x\in D\} \tag{17.5}$$

يوجد فى $\boldsymbol{R}$. (نلاحظ أن العمود فى الطرف الأيمن من هذه المعادلة هو العمود فى الفراغ $\boldsymbol{R}^q$.

١٧ – ٧ تعريف . إذا كانت $D\subseteq \boldsymbol{R}^p$ فإن المجموعة لجميع الدوال المحدودة فى D إلى $\boldsymbol{R}^q$ يرمز لها بالرمز $B_{pq}(D)$ أو (p و q إذا كانتا مفهومتين) فيرمز لها بالرمز $B(D)$.

فى الفراغ $B_{pq}(D)$ نعرف قيمة جمع لدالتين f, g ، الضرب العددى إلى $c\in R$ ، f بأنه

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \qquad (cf)(x)=cf(x) \tag{17.6}$$

لكل $x\in D$. نعرف دالة الصفر بأنها الدالة $0:D\to \boldsymbol{R}^q$ المعرفة لجميع $x\in D$ بواسطة $0(x)=0$. نربط الآن هذا المصطلح من المدلولات المذكورة فى باب ٨ .

١٧ – ٨ مفترض . (أ) الفئة $B_{pq}(D)$ هى فراغ المتجه تحت عمليات المتجه المعرفة فى المعادلة (١٧ – ٦) .

(ب) الدالة $f \mapsto \|f\|_D$ المعرفة فى $B_{pq}(D)$ فى معادلة (١٧–٥) هى عمود فى $B_{pq}(D)$

البرهان . يتطلب برهان الجزء :

(أ) حسابات روتينية فقط لبرهان الجزء (ب) نحتاج لإثبات أربع خواص لعمود معطى فى تعريف ٨ – ٥ .

(i) من الواضح من (١٧ – ٥) أن $\|f\|_D \geq 0$.

(ii) وواضح أن $\|0\|_D = \sup\{\|0(x)\| : x \in D\} = 0$ ، وبالعكس إذا كانت $\|f\|_D = 0$ فإننا بما أن $0 \leq \|f(x)\| \leq \|f\|_D = 0$ نستنتج أن $\|f(x)\| = 0$ وإذن $f(x) = 0$ لكل $x \in D$ بحيث أن $f = 0$.

(iii) الحقيقة التى تقول أن $\|cf\|_D = |c|\,\|f\|_D$ قد اتضحت من قبل .

(iv) بما أن

$$\|(f+g)(x)\| = \|f(x)+g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|$$
$$\leq \|f\|_D + \|g\|_D$$

لكل $x \in D$ فينتج أن $\|f\|_D + \|g\|_D$ هى الحد الأعلى الفئة $\{\|(f+g)(x)\| : x \in D\}$ لذلك يكون

$$\|f+g\|_D = \sup\{\|(f+g)(x)\| : x \in D\}$$
$$\leq \|f\|_D + \|g\|_D.$$

وهو المطلوب إثباته

أحياناً يسمى العمود $f \mapsto \|f\|_D$ بالعمود المنتظم (أو العمود الأعلى) فى $B_{pq}(D)$ سنوضح الآن أن التقارب المنتظم لدوال فى $B_{pq}(D)$ يكافىء التقارب فى العمود المنتظم .

١٧ – ٩ نظرية . متتابعة (f_n) فى $B_{pq}(D)$ تتقارب بانتظام فى D إلى $f \in B_{pq}(D)$ إذا وإذا فقط كان

$$\|f_n - f\|_D \to 0$$

البرهان . إذا كانت المتتابعة (f_n) تتقارب بانتظام إلى f فى D ، فإنه يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعى $K(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $n \geq K(\varepsilon)$ و $x \in D$ فإن $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ وهذا . يدل على أن

$$\|f_n - f\|_D = \sup\{\|(f_n - f)(x)\| : x \in D\} \leq \varepsilon$$

حيث $\varepsilon > 0$ اختيارية ، هذا يضمن أن $\|f_n - f\|_D \to 0$.

وبالعكس إذا كانت $\|f_n - f\|_D \to 0$ فحينئذ بأخذ $\varepsilon > 0$ يوجد $K(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $n \ge K(\varepsilon)$ فإن $\|f_n - f\|_D \le \varepsilon$. هذا يدل أنه إذا كانت $x \in D$ فإن

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \|(f_n - f)(x)\| \le \|f_n - f\|_D \le \varepsilon$$

لذلك تتقارب المتتابعة (f_n) بانتظام فى D إلى f . وهو المطلوب إثباته

الآن نوضح كيفية استعمال هذا المفترض كأداة لفحص متتابعة الدوال لتقارب منتظم نلاحظ أولا أن الممود قد عرف فقط لدوال محدودة . ومن ثم يمكننا استخدامه (مباشرة على الأقل) إذا كانت المتتابعة تتكون من دوال محدودة فقط .

١٧ - ١٠ أمثلة . (أ) لا يمكننا استخدام مفترض ١٧ - ٩ للمثال الموجود فى ١٧ - ٢ (أ) ، المثال الموجود ١٧ - ٦ (أ) لأن الدوال f_n ، المعرفة بالتعريف $f_n(x) = x/n$ ليست محدودة فى نطاقها R .

لغرض التوضيح ، نتير النطاق لحصول على متتابعة محدودة فى النطاق الجديد . من المناسب أن نفرض أننا أخذنا $E = [0, 1]$ مع أن المتتابعة (x/n) لا تتقارب بانتظام إلى الدالة صفر فى النطاق R (كما رأينا فى مثال ١٧ - ٦ (أ)) ، فإن التقارب يكون منتظماً فى $E = [0, 1]$. وللاحظة هذا . نحسب

$$\|f_n - f\|_E = \sup\left\{\left|\frac{x}{n} - 0\right| : 0 \le x \le 1\right\} = \frac{1}{n}$$

وينتج $\|f_n - f\|_E = 1/n \to 0$

(ب) نعتبر الآن المتتابعة التى نوقشت فى مثال ١٧-٢ (ب) ، مثال ١٧-٦ (ب) هنا $D = [0, 1], f_n(x) = x^n$.ونهاية الدالة f تكون مساوية صفرا لكل $0 \le x < 1$ ومساوية للواحد الصحيح عند $x = 1$ بحساب الممود للفرق $f_n - f$ ، يكون لدينا

$$\|f_n - f\|_D = \sup\begin{Bmatrix} x^n, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{Bmatrix} = 1 \quad \text{عند} \quad n \in N$$

بما أن هذا الممود لا يقترب من الصفر ، نستنتج أن المتتابعة (f_n) لا تتقارب بانتظام فى $D = [0, 1]$ إلى f . هذا يبرهن اعتباراتنا السابقة .

(ج) نعتبر مثال ١٧ - ٢ (ج) . مرة أخرى لا يمكننا استخدام مفترض ١٧ - ٩ لأن الدوال ليست محدودة . نختار أيضاً نطاقاً أصغر بأخذ $E = [0, a]$ حيث $a > 0$. بما أن

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^2 + nx}{n} - x\right| = \frac{x^2}{n}$$

ويكون لدينا

$$\|f_n - f\|_E = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : 0 \le x \le a\} = \frac{a^2}{n}$$

ومن ثم تتقارب المتابعة بانتظام إلى f فى الفترة $[0, a]$. (لماذا هذا لا يخالف النتيجة التى حصلنا عليها فى مثال ١٧ – ٦ (ج) ؟) .

(د) بالإشارة إلى مثال ١٧ – ٢ (د) ، نعتبر الدالة $f_n(x) = (1/n)\sin(nx + n)$ فى $D = \boldsymbol{R}$. نهاية الدالة هنا $f(x) = 0$ لكل $x \in D$. ولإثبات التقارب المنتظم لهذه المتابعة لاحظ أن

$$\|f_n - f\|_D = \sup\{(1/n)\,|\sin(nx + n)| : x \in \boldsymbol{R}\}$$

لكن بما أن $|\sin y| \le 1$ فنستنتج أن $\|f_n - f\|_D = 1/n$. وإذن (f_n) تتقارب بانتظام فى $\boldsymbol{R}$ ، كما أثبتنا فى مثال ١٧ – ٦ (د) .

أحد المظاهر الأكثر فائدة للمعود هو أنه يسهل النص لمعيار كوشى للتقارب المنتظم لمتابعة دوال محدودة .

١٧ – ١١ معيار كوشى لتقارب منتظم . إذا فرضنا (f_n) متابعة الدوال فى $B_{pq}(D)$ فإنه توجد دالة $f \in B_{pq}(D)$ تتقارب إليها بانتظام (f_n) ، فى D إذا وإذا فقط كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعى $M(\varepsilon)$ بحيث أنه لكل $m, n \ge M(\varepsilon)$ ، يكون

$$\|f_m - f_n\|_D < \varepsilon$$

البرهان . نفرض أن المتابعة (f_n) تتقارب بانتظام فى D إلى دالة $f \in B_{pq}(D)$ حينئذ عند $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعى $K(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $n \ge K(\varepsilon)$ فإن $\|f_n - f\|_D < \varepsilon/2$. ومن ثم إذا كانت كلا من $m, n \ge K(\varepsilon)$ فنستنتج أن

$$\|f_m - f_n\|_D \le \|f_m - f\|_D + \|f - f_n\|_D < \varepsilon$$

وبالعكس ، نفرض أن معيار كوشى متحقق وأنه عند $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعى $M(\varepsilon)$ بحيث أن $\|f_m - f_n\|_D < \varepsilon$ عند $m, n \ge M(\varepsilon)$.
الآن لكل $x \in D$ يكون عندنا

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| \le \|f_m - f_n\|_D < \varepsilon \quad \text{لكل} \quad m, n \ge M(\varepsilon) \qquad (17.6)$$

وإذن المتابعة $[f_n(x)]$ هى متابعة كوشى فى $\boldsymbol{R}^q$ ولذلك تتقارب إلى عنصر ما من $\boldsymbol{R}^q$. نعرف f عند x فى D بأنها

$$f(x) = \lim(f_n(x))$$

من (١٧ — ٦) نستنتج أنه إذا كانت m عدداً طبيعياً ثابتاً يحقق $m \geq M(\varepsilon)$ وإذا كانت n أى عدد طبيعى حيث $n \geq M(\varepsilon)$ ، حينئذ لكل x فى D . يكون لدينا

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| < \varepsilon.$$

إذا استخدمنا مفترض ١٥ — ٨ ينتج أنه إذا كانت $m \geq M(\varepsilon)$ ، $x \in D$ فإن

$$\|f_m(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

وبما أن f_m دالة محدودة ، فينتج حالا من هذا (لماذا ؟) أن f محدودة ومن ثم فهى تنتمى إلى $B_{pq}(D)$. وبالإضافة إلى ذلك نستنتج أن (f_n) تتقارب بانتظام إلى f فى D .
وهو المطلوب إثباته .

تمرينـــات :

فى هذه التمرينات يمكن استعمال الخواص الأولية لحساب المثلثات والدوال الأسية من المناهج الدراسية السابقة .

١٧ — (أ) لكل $n \in N$ ، نفرض f_n معرفة عند $x > 0$ بأنها $f_n(x) = 1/(nx)$
لأى قيم للمتغير x توجد $\lim (f_n(x))$ ؟ .

١٧ — (ب) لكل $n \in N$ ، نفرض g_n معرفة عند $x \geq 0$ بالنص

$$g_n(x) = nx, \qquad 0 \leq x \leq 1/n,$$
$$= \frac{1}{nx}, \qquad 1/n < x$$

أثبت أن $\lim (g_n(x)) = 0$ لكل $x > 0$.

١٧ — (ج) وضح أن $\lim ((\cos \pi x)^{2n})$ موجودة لكل قيم x . ما نهايتها ؟

١٧ — (د) وضح أنه إذا عرفنا f_n على R بأنها .

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

فإن (f_n) تتقارب فى R .

١٧ — (هـ) بفرض h_n معرفة فى الفترة $I = [0, 1]$ بالتعريف

$$h_n(x) = 1 - nx, \qquad 0 \leq x \leq 1/n,$$
$$= 0, \qquad 1/n < x \leq 1$$

وضح أن $\lim (h_n)$ موجود فى I .

١٧ — (و) بفرض g_n معرفة فى I بأنها

$$g_n(x) = nx, \qquad 0 \le x \le 1/n,$$
$$= \frac{n}{n-1}(1-x), \qquad 1/n < x \le 1$$

أثبت أن $\lim (g_n)$ موجود فى I .

١٧ – (ز) وضح أنه إذا كانت f_n معرفة فى R بأنها

$$f_n(x) = \frac{2}{\pi} \text{ Arc tan } (nx)$$

فإن $f = \lim (f_n)$ توجد على R . فى الحقيقة تعطى النهاية بما يلى :

$$f(x) = 1, \qquad x > 0,$$
$$= 0, \qquad x = 0,$$
$$= -1, \qquad x < 0$$

١٧ – (ح) وضح أن $\lim (e^{-nx})$ موجود عند $x \ge 0$. أيضاً ابحث وجود $\lim (xe^{-nx})$

١٧ – (ط) نفرض أن (x_n) متتابعة تقاربية للنقط التى تقع جميعاً مع نهايتها x ، فى فئة $D \subseteq R^p$. بفرض أن (f_n) تتقارب فى D إلى الدالة f . هل $f(x) = \lim (f_n(x_n))$ صحيحة ؟

١٧ – (ى) ابحث التمرين السابق بالفرض الإضافى وهو أن التقارب للدالة (f_n) منتظم فى D .

١٧ – (ك) أثبت أن التقارب فى تمرين ١٧ – (أ) ليس منتظماً فى الفئة الشاملة للتقارب ، لكن يكون منتظماً عند $x \ge 1$.

١٧ – (ل) وضح أن التقارب فى تمرين ١٧ – (ب) ليس منتظماً فى النطاق $x \ge 0$ ، لكنه منتظم فى فئة $x \ge c$ ، حيث $c > 0$.

١٧ – (م) هل التقارب فى تمرين ١٧ – (د) منتظم فى R ؟

١٧ – (ن) هل التقارب فى تمرين ١٧ – (هـ) منتظم فى I ؟

١٧ – (س) هل التقارب فى تمرين ١٧ – (و) منتظم فى I ؟ هل هو منتظم فى $[c, 1]$ عندما $c > 0$ ؟

١٧ – (ع) هل المتتابعة (x^2e^{-nx}) متقاربة بانتظام عند $x \ge 0$ ؟

١٧ – (ف) هل المتتابعة (xe^{-nx}) متقاربة بانتظام عند $x \ge 0$ ؟

١٧ – (ص) نفرض أن (f_n) متتابعة لدوال تتقارب فى D إلى دالة f . إذا كانت A ، B هما فئتين جزئيتين من D فإذا علم أن التقارب منتظم فى A وأيضاً فى B ، أثبت أن التقارب يكون منتظماً فى $A \cup B$.

١٧ – (ق) اعط مثالا لمتابعة (f_n) فى $B_m(I)$ بحيث أن $\|f_n\|_I \le 1$ لكل $n \in N$ والتى ليس لها متتابعة جزئية متقاربة بانتظام (ومن ثم استنتج أن نظرية بولتزانو – ڤيرشتراس ليست سارية المفعول فى $B_m(I)$.

الباب الثامن عشر ـــ العلو النهائى :

قدمنا فى باب ٦ معلومات عن الأعلى (علواً) لفئة محدودة غير خالية لأعداد حقيقية وقد أجرينا استعمالا هاماً لهذه المعلومات مرات عديدة . ولكن ، ببحث فئة لانهائية محدودة $S \subseteq R$ يكون من الممتع أحياناً حساب أكبر نقطة تجميع s^* من S . هذه النقطة s^* هى أكبر أقل جميع الأعداد الحقيقية التى يزيد عنها على الأكثر عدد محدود من عناصر S . سنطبق هذا المفهوم على المتتابعات المحدودة فى R لحصول على التصور المقيد كثيراً للعلو النهائى .

١٨ – ١ تعريف . بفرض $X = (x_n)$ متتابعة محدودة فى R .

(أ) العلو النهائى للمتتابعة X والذى سنرمز له

$$\limsup X, \qquad \limsup (x_n) \qquad \text{أو} \qquad \overline{\lim}\,(x_n)$$

هو أدنى الفئة V حيث $v \in R$ بحيث أنه يوجد على الأكثر عدد محدود من $n \in N$ بحيث أن $v < x_n$.

(ب) الأدنى النهائى للمتتابعة X والذى سنرمز له

$$\liminf X, \qquad \liminf (x_n) \qquad \text{أو} \qquad \underline{\lim}\,(x_n)$$



(شكل ١٨ – ١)

هو أعلى الفئة W حيث $w \in R$ بحيث أنه يوجد على الأكثر عدد محدود من $m \in N$ بحيث $x_m < w$.

بينما لا تحتاج متتابعة محدودة إلى نهاية ، لها دائماً علو نهائى وحيد (وأدنى نهائى وحيد) . يكون هذا واضحاً من الحقيقة التى تقول إن العدد $v = \sup \{x_n : n \in N\}$ ينتمى إلى الفئة V، بينما العدد $\inf \{x_n : n \in N\} - 1$ حد أدنى للفئة V .

يوجد طرق عديدة متكافئة ومفيدة غالباً فى تمكين الشخص من تعريف العلو النهائى لمتتابعة محدودة (ويجب حث القارىء بشدة على محاولة برهنة هذه النتيجة قبل قراءة البرهان) .

١٨ – ٢ نظرية . إذا كانت $X = (x_n)$ متتابعة محدودة فى R ، فإن النصوص الآتية تكون متكافئة لعدد حقيقى x^* .

(أ) $x^* = \lim\sup (x_n)$

(ب) إذا كانت $\varepsilon>0$ فيوجد على الأكثر عدد محدود من $n \in N$ بحيث أن $x^*+\varepsilon < x_n$ لكن يوجد عدد لانهائى بحيث أن $x^*-\varepsilon < x_n$.

(ج) إذا كانت $v_m = \sup\{x_n : n \geq m\}$ فإن $x^* = \inf\{v_m : n \in N\}$.

(د) إذا كانت $v_m = \sup\{x_n : n \geq m\}$ فإن $x^* = \lim (v_m)$.

(هـ) إذا كانت L هى الفئة للأعداد $v \in R$ بحيث أنه يوجد متتابعة جزئية من X والتى تتقارب إلى v ، حينئذ $x^* = \sup L$.

البرهان . نفرض $x^* = \lim\sup (x_n)$ وبفرض أن $\varepsilon > 0$. من تعريف ١٨ – ١ ، يوجد $v \in V$ حيث $x^* \leq v \leq x^*+\varepsilon$. لذلك $x^*+\varepsilon$ تنتمى أيضاً إلى V ، إذن يمكن أن يوجد على الأكثر عدد محدود من $n \in N$ بحيث أن $x^*+\varepsilon < x_n$ ومن ناحية أخرى $x^* - \varepsilon$ ليست فى V ، لذلك يوجد عدد لانهائى من $n \in N$ بحيث أن $x^*-\varepsilon < x_n$ ومن ثم (أ) تعنى ضمنياً (ب) .

إذا تحققت (ب) فإنه بأخذ $\varepsilon > 0$. حينئذ يكون عندنا لكل m كبيرة كبراً كافياً $v_m \leq x^*+\varepsilon$ ، لذلك $\inf\{v_m : m \in N\} \leq x^*+\varepsilon$. لكن بما أنه يوجد عدد لا نهائى من $n \in N$ بحيث أن $x^*-\varepsilon < x_n$ فإن $x^*-\varepsilon < v_m$ لكل $m \in N$ ومن ثم $x^*-\varepsilon \leq \inf\{v_m : m \in N\}$. بما أن $\varepsilon > 0$ اختيارية ، فنستنتج أن $x^* = \inf\{v_m : m \in N\}$ وتكون (ج) متحققة .

إذا عرفت المتتابعة (v_m) كما فى (ج) فتكون متناقصة بإطراد ومن ثم $(v_m) = \lim (v_n)$ حيث (ج) تعنى ضمناً (د) .

نفرض الآن أن x^* تحقق (د) ، $X' = (x_{n_k})$ هى متتابعة جزئية تقاربية من X بما أن $n_k \geq k$ فيكون لدينا $x_{n_k} \leq v_k$ ومن ثم $\lim X' \leq \lim (v_k) = x^*$. وبالعكس لاحظ أنه يوجد $n_1 \in N$ بحيث أن $v_1 - 1 < x_{n_1} \leq v_1$. استنتاجياً نختار $n_{k+1} > n_k$ بحيث أن

$$v_k - \frac{1}{k+1} < x_{n_{k+1}} \leq v_k.$$

بما أن $\lim (v_k) = x^*$ ، فينتج أن $x^* = \lim (x_{n_k})$. لذلك (د) تتضمن (هـ) .

أخيراً ، نفرض أن $w = \sup L$. إذا أعطيت $\varepsilon > 0$ فيمكن أن يوجد على الأكثر عدد محدود من $n \in N$ حيث $w+\varepsilon < x_n$. (من نظرية بولتزانو – فيراشتراس ١٦—٤).

وإذن $\limsup X \leq w+\varepsilon$ و $w+\varepsilon \in V$. ومن جهة أخرى توجـد متابعة X' متقاربة إلى عدد ما أكبر من $w - \varepsilon$. مما يثبت أن $w - \varepsilon$ ليست فى V وإذن $w - \varepsilon \leq \limsup X$. وبما أن $\varepsilon > 0$ اختيارية نستنتج أن $w = \limsup X$.
وإذن (ه) تتضمن (أ) .

كلا الميزتين (د) ، (ه) يمكن اعتبارهما تحقيقاً للمصطلح « العلو النهائى » يوجد ميزتان متناظرتان للأدنى النهائى لمتتابعة محدودة والقارىء يجب أن ينسخها ويبرهنها .

الآن نكون الخواص الجبرية الأساسية للعلو النهائى وللأدنى النهائى لمتتابعات محدودة .

١٨ – ٣ نظرية . بفرض $Y=(y_n)$ و $X=(x_n)$ متتابعتين محدودتين لأعدادحقيقية . فإن العلاقات الآتية تكون متحققة

(أ) $\liminf (x_n) \leq \limsup (x_n)$

(ب) إذا كانت $c \geq 0$ ، فإن $\liminf (cx_n) = c \liminf (x_n)$ ،
$\limsup (cx_n) = c \limsup (x_n)$

(ب') إذا كانت $c \leq 0$ ، فإن $\liminf (cx_n) = c \limsup (x_n)$ ،
$\limsup (cx_n) = c \liminf (x_n)$

(ج) $\liminf (x_n) + \liminf (y_n) \leq \liminf (x_n + y_n)$

(د) $\limsup (x_n + y_n) \leq \limsup (x_n) + \limsup (y_n)$

(ه) إذا كانت $x_n \leq y_n$ لجميع n ، فإن $\liminf (x_n) \leq \liminf (y_n)$ ،
وأيضاً $\limsup (x_n) \leq \limsup (y_n)$

البرهان . (أ) إذا كانت $w < \liminf (x_n)$ ، $v > \limsup (x_n)$ فإنه يوجد بدرجة لا نهائية كثير من $n \in N$ بحيث أن $w \leq x_n$ ، بينما يوجد فقط عدد محدود بحيث أن $v < x_n$ وإذن يجب أن نحصل على $w \leq v$ التى تتضمن (أ) .

(ب) إذا كانت $c \geq 0$ ، فإن الضرب فى c يحفظ كل المتباينات التى على الصورة $w \leq x_n$ إلخ .

(ب') إذا كانت $c \leq 0$ ، فإن الضرب فى c يعكس المتباينات ويحول العلو النهائى إلى الأدنى النهائى وبالعكس .

نص (ج) يكون ثنائيا إلى(د) ويمكن اشتقاقه مباشرة من (د) أو برهانه باستخدام نفس النوع من المناقشة . لبرهنة (د)، نفرض $v > \limsup (x_n)$ و $u > \limsup (y_n)$ من التعريف يوجد فقط عدد محدود من $n \in N$ بحيث أن $v < x_n$ وعدد محدود بحيث أن

$u < y_n$. وإذن يمكن أن يوجد فقط عدد محدود من n بحيث أن $v+u < x_n + y_n$
مما يوضح أن $\limsup (x_n + y_n) \leq v + u$ هذا يبرهن نص (د) .

الآن نبرهن النص الثانى فى (هـ) . إذا كانت $u > \limsup (y_n)$ فإنه يمكن فقط وجود عدد محدود من أعداد طبيعية n بحيث أن $u < y_n$. بما أن $x_n \leq y_n$ ، فينتج $\limsup (x_n) \leq u$ وكذلك $\limsup (x_n) \leq \limsup (y_n)$. وهو المطلوب إثباته .

كل من الشروط المكافئة المعطاة فى نظرية ١٨ – ٢ يمكن استعماله لبرهنة أجزاء نظرية ١٨ – ٣ .

يقترح كفاية بعض هذه البراهين البديلة كتمرين .

ربما يسأل ما إذا كان يمكن أن تحل محل المتباينات فى نظرية ١٨ – ٣ متساويات بوجه عام ، الإجابة لا ، لأنه إذا كانت $X = [(-1)^n]$ فإن $\liminf X = -1$ ، $\limsup X = +1$ إذا كانت $Y = ((-1)^{n+1})$ فإن $X + Y = (0)$ بحيث أن

$$\liminf X + \liminf Y = -2 < 0 = \liminf (X+Y),$$
$$\limsup (X+Y) = 0 < 2 = \limsup X + \limsup Y$$

قد رأينا أن الأدنى النهائى والأعلى النهائى يوجدان لأى متتابعة محددة . بصرف النظر عما إذا كانت المتتابعة تقاربية . الآن سنوضح أن وجود $\lim X$ تكون مكافئة لتساوى $\liminf X$ ، $\limsup X$.

١٨ – ٤ مفترض . نفرض أن X متتابعة محدودة لأعداد حقيقية . حينئذ X تقاربية إذا وإذا فقط $\liminf X = \limsup X$ ، فى أى حالة تكون $\lim X$ هى القيمة المشتركة .

البرهان . إذا كانت $x = \lim X$ ، فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعى $N(\varepsilon)$ بحيث أن

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon, \qquad n \geq N(\varepsilon)$$

المتباينة الثانية توضح أن $\limsup X \leq x + \varepsilon$ والمتباينة الأولى توضح أن $x - \varepsilon \leq \liminf X$. وإذن $0 \leq \limsup \leq X - \liminf X \leq 2\varepsilon$
وبما أن $\varepsilon > 0$ اختيارية ، فيكون لدينا المتساوية المنصوص عليها .

وبالعكس ، نفرض أن $x = \liminf X = \limsup X$ إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، فينتج نظرية ١٨–٢ (ب) أنه يوجد عدد طبيعى $N_1(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $n \geq N_1(\varepsilon)$

فإن $x_n < x + \varepsilon$. بالمثل يوجد عدد طبيعى $N_2(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $n \geq N_2(\varepsilon)$ فإن $x - \varepsilon < x_n$. بفرض $N(\varepsilon) = \sup\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ ، إذا كانت $n \geq N(\varepsilon)$ فإن $|x_n - x| < \varepsilon$ مما يثبت أن $x = \lim X$.

وهو المطلوب إثباته .

متتابعات غير محدودة :

أحياناً يكون من المناسب إيجاد العلو النهائى والأدنى النهائى المعرف لمتتابعات اختيارية (أى ليست بالضرورة محدودة) فى R لإجراء هذا نحتاج لنقدم الرمزين $+\infty$، $-\infty$ ، لكن مع التأكيد بعد اعتبارهما أعداداً حقيقية ، هما مجرد رمزين مناسبين فقط .

إذا كانت S فئة غير خالية فى R وكانت غير محدودة من أعلى ، فنعرف $\sup S = +\infty$ إذا كانت T فئة غير خالية فى R وكانت غير محدودة من أسفل فنعرف $T = -\infty$ وكما لاحظنا بعد تعريف ٦ – ١ ، أن كل عدد حقيقى يكون حداً أعلى لفئة خالية $\emptyset$ ، لذلك نعرف $\sup \emptyset = -\infty$ بالمثل كل عدد حقيقى يكون حداً أسفل لفئة خالية $\emptyset$ ، لذلك نعرف $\inf \emptyset = +\infty$.

الآن نفرض أن $X = (x_n)$ متتابعة فى R وغير محدودة من أعلى ، حينئذ فإن الفئة V لأعداد $v \in R$ بحيث أنه يوجد على الأكثر عدد محدود من $n \in N$ حيث $v < x_n$ تكون خالياً . إذن $\inf V = +\infty$. أى أنه إذا كانت $X = (x_n)$ متتابعة فى R غير محدودة من أعلى ، فنجد أن

$$\lim\sup (x_n) = +\infty$$

بالمثل ، إذا كانت $Y = (y_n)$ متتابعة فى R وغير محدودة من أسفل ، فنجد أن

$$\lim\inf (y_n) = -\infty$$

نلاحظ أنه إذا كانت $X = (x_n)$ متتابعة فى R وغير محدودة من أعلى ، فإن الفئات $\{x_n : n \geq m\}$ ليست محدودة من أعلى وإذن

$$v_m = \sup\{x_n : n \geq m\} = +\infty$$

لكل $m \in N$.

نهايات لا نهائية :

إذا كانت $X = (x_n)$ متتابعة فى R ، فنقول إن $X = (x_n)$ تتباعد إلى $+\infty$ ونكتب $\lim (x_n) = +\infty$ إذا كان ، لكل $\alpha \in R$ ، يوجد $K(\alpha) \in N$ بحيث أنه إذا كانت $n \geq K(\alpha)$ فإن $x_n > \alpha$.

بالمثل نقول إن $X = (x_n)$ تتباعد إلى $-\infty$ ونكتب $\lim (x_n) = -\infty$ في حالة أنه لكل $\alpha \in R$ يوجد $K(\alpha) \in N$ بحيث أنه إذا كانت $n \geq K(\alpha)$ فإن $x_n < \alpha$.

ويمكن ، كتمرين إثبات أن $X = (x_n)$ تتباعد إلى $+\infty$ إذا وإذا فقط

$$\lim \inf (X_n) = \lim \sup (x_n) = +\infty$$

وأن $X = (x_n)$ تتباعد إلى $-\infty$ إذا وإذا فقط

$$\lim \inf (x_n) = \lim \sup (x_n) = -\infty$$

تمرينـــات :

١٨ – (أ) حدد الأعلى النهائي والأدنى النهائي للمتتابعات المحدودة الآتية في

(ا) $((-1)^n)$ (ب) $((-1)^n/n))$

(ج) $((-1)^n + 1/n)$ (د) $(\sin n)$

١٨ – (ب) إذا كانت $X = (x_n)$ متتابعة محدودة في R ، وضح أنه يوجد متتابعة جزئية للمتتابعة X بحيث تتقارب إلى $\lim \inf X$.

١٨ – (ج) برهن مباشرة النظرية المناظرة لنظرية ١٨ – ٢ للأدنى النهائي بعد تكون صيغة لها .

١٨ – (د) اعط برهاناً مباشراً لنظرية ١٧ – ٣ (ج) .

١٨ – (هـ) برهن نظرية ١٨ – ٣ (د) باستخدام ١٨ – ٢ (ب) كتعريف للأعلى النهائي . افعل نفس الشيء باستخدام ١٨ – ٢ (د) ، ١٨ – ٢ (هـ) .

١٨ – (و) إذا كانت $X = (x_n)$ متتابعة محدودة لعناصر موجبة على سبيل الحصر في R وضح أن $\lim \sup (x_n^{1/n}) \leq \lim \sup (x_{n+1}/x_n)$.

١٨ – (ز) حدد الأعلى النهائي والأدنى للمتتابعات الآتية في R .

(ا) $((-1)^n n)$ (ب) $(n \sin n)$

(ج) $(n(\sin n)^2)$ (د) $(n \tan n)$.

١٨ –(ح) اثبت أن المتتابعة $X = (x_n)$ في R تتباعد إلى $+\infty$ إذا وإذا فقط $\lim \inf X = +\infty$

١٨ –(ط) وضح أن $\lim \sup X = +\infty$ إذا وإذا فقط كان توجد متتابعة جزئية X' من X بحيث أن $\lim X' = +\infty$

١٨ – (ى) فسر نظرية ١٨ – ٣ لمتتابعات غير محدودة .

الباب التاسع عشر ـــ بعض امتدادات :

من المهم كثيراً فى التحليل أن نقيم « رتبة مقدار » لمتابعة أو نقارن متتابعتين بالنسبة إلى مقدارهما . لإجراء ذلك نتخلص من الحدود التى لا تصنع « إسهاماً جوهرياً » . فمثلا إذا كانت $x_n = 2n + 17$ فإنه عند $n \in N$ بحيث تكون كبيرة ، يأتى الإسهام المسيطر من الحد $2n$. إذا كانت $y_n = n^2 - 5n$ فإنه عند $n \in N$ بحيث تكون كبيرة ، يكون الحد المسيطر هو n^2 . وبالرغم من أن الحدود الأولى القليلة من (y_n) أصغر من تلك التى فى (x_n) ، فإن الحدود لهذه المتتابعة تنمو بسرعة أكثر من تلك التى تنمو بها الحدود فى (x_n) .

الآن سندخل بعض مصطلحات فنية لجعل هذه الفكرة أكثر دقة وسندخل دلالة ما ، ترجع إلى لانداو(*) ومفيدة غالباً .

١٩ ـ ١ تعريف . نفرض أن $X = (x)$ و $Y = (y_n)$ متتابعتان فى R ونفرض أن $y_n \neq 0$ لكل $n \in N$ بحيث تكون كبيرة كبراً كافياً . نقول إن X و Y متكافئتان ونكتب

$$(x_n) \sim (y_n) \qquad \text{أو} \qquad X \sim Y$$

عندما $\lim (x_n/y_n) = 1$. نقول إن X لها رتبة أقل مقدار من Y ونكتب

$$x_n = o(y_n) \qquad \text{أو} \qquad X = o(Y)$$

عندما $\lim (x_n/y_n) = 0$. نقول إن X تكون مسيطرة على Y ونكتب

$$x_n = O(y_n) \qquad \text{أو} \qquad X = O(Y)$$

فى حالة كون المتتابعة (x_n/y_n) محدودة .

من الواضح أن إما $X \sim Y$ أو $X = o(Y)$ تدل على أن $X = O(Y)$ خواص مختلفة لهذه الدلالات ستعطى فى التمارين .

مجموع سيزارو :

عرفنا سابقاً ما المقصود بالتقارب لمتابعة $X = (x_n)$ فى R^p إلى عنصر x . لكن ، ربما يكون ممكناً أن نربط x إلى المتتابعة X كنوع من « النهاية العامة » حتى ولو لم تتقارب المتتابعة X إلى x بمعنى تعريف ١٤ ـ ٢ . يوجد طرق كثيرة التى بها يمكن للشخص أن يعمم

(*) ادموند «ج.انش» لانداو (١٨٧٧ ـــ ١٩٣٨) كان استاذا فى « بيتنجن » ومعروف بابحاثه وكتبه على نظرية العدد والتحليل . هذه الكتب مشهورة بشدتها واختصارها فى الاسلوب (وبلغتها الالمانية الأولية) .

فكرة نهاية متتابعة ويمكنه إعطاء مقدار كبير من البيان عن أن بعض هذه الطرق ستأخذنا بعيداً أبعد من مجال هذا الكتاب . لكن ، توجد طريقة أولية فى طبيعتها وفى نفس الوقت مفيدة فى تطبيقاتها لمتتابعات تذبذبية .

بما أن هذه الطريقة لها بعض الأهمية وبرهان النتيجة الرئيسية نموذجى لمناقشات تحليلية كثيرة ، فندخل هنا مقدمة مختصرة لنظرية قابلية الجمع لسيزارو (*) .

١٩ — ٢ تعريف . إذا كانت $X = (x_n)$ متتابعة من عناصر فى R^p ، فإن المتتابعة $S = (\sigma_n)$ المعرفة بالتعريف .

$$\sigma_1 = x_1, \quad \sigma_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ldots, \quad \sigma_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \ldots$$

تسمى متتابعة المتوسطات الحسابية للمتابعة X .

وبمعنى آخر ، توجد عناصر S بأخذ متوسطات الحدود فى X. وحيث أن هذا المتوسط يميل إلى ملامسة تذبذبات من حين لآخر فى X ، فمن المعقول أن نتوقع أن يكون للمتتابعة S فرصة أكبر للتقارب عن المتتابعة الأصلية X . فى حالة تقارب المتتابعة S لمتوسطات حسابية إلى عنصر y ، نقول ان المتتابعة X تكون جمع سيزارو إلى y ، أو أن y هى النهاية $(C, 1)$ للمتتابعة X .

مثال ذلك ، بفرض X هى المتتابعة الحقيقية غير التقاربية $X = (1, 0, 1, 0, \ldots)$ فقد تبين تواً أنه إذا كانت n عدداً طبيعياً زوجياً فإن $\sigma_n = \frac{1}{2}$ وإذا كانت n عدداً فردياً فإن $\sigma_n = (n+1)/2n$. بما أن $\lim (\sigma_n) = \frac{1}{2}$ فإن المتتابعة X لها جمع سيزارو إلى $\frac{1}{2}$ ، الذى ليس نهاية المتتابعة X ولكن يبدو أنه النهاية العامة الطبيعية التى يمكننا ربطها للمتتابعة X .

ويبدو أنه من المعقول لتعميم فكرة نهاية المتتابعة أن نقتضى بأن النهاية العامة تعطى القيمة العادية للنهاية عندما تكون المتتابعة تقاربية . الآن سنوضح أن طريقة سيزارو لها هذه الخاصية .

١٩ — ٣ نظرية . إذا كانت المتتابعة $X = (x_n)$ تتقارب إلى x ، فإن المتتابعة $S = (\sigma_n)$ للمتوسطات الحسابية تتقارب أيضا إلى x .

(*) ارنست سيزارو (١٨٥٦ — ١٩٠٦) درس فى روما ودرس فى نابولى ، وقد عمل فى الهندسة والجبر وأيضا بالتحليل .

البرهان . نحتاج لحساب المقدار الآتى :

$$\sigma_n - x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - x$$
$$= \frac{1}{n}\{(x_1 - x) + (x_2 - x) + \cdots + (x_n - x)\} \qquad (19.1)$$

بما أن $x = \lim (x_n)$ ، فينتج بأخذ $\varepsilon > 0$ أنه يوجد عدد طبيعى $N(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $m \geq N(\varepsilon)$ فإن $\|x_m - x\| < \varepsilon$. أيضاً حيث أن المتابعة $X = (x_n)$ تقاربية . يوجد عدد حقيق A بحيث أنه $\|x_k - x\| < A$ لكل k . إذا كانت $n \geq N = N(\varepsilon)$ ، نقسم المجموع فى الطرف الأيمن من ١٩ – ١ إلى مجموع من $k = 1$ إلى $k = N$ مضافاً إليه مجموع من $k = N+1$ إلى $k = n$ ونستخدم التقدير $\|x_k - x\| < \varepsilon$ الحدود $n - N$ الأخيرة لنحصل

$$\|\sigma_n - x\| \leq \frac{NA}{n} + \frac{n-N}{n}\varepsilon \quad \text{عند} \quad n \geq N(\varepsilon)$$

إذا كانت n كبيرة كبراً كافياً ، فإن $NA/n < \varepsilon$ وبما أن $(n - N)/n < 1$ فنجد أن $\|\sigma_n - x\| < 2\varepsilon$ لكل n كبيرة كبراً كافياً . ومن ثم $x = \lim (\sigma_n)$ وهو المطلوب إثباته .

سوف لا نتابع نظرية قابلية الجمع أكثر من هذا ، لكى نجعل القارئ يرجع إلى كتب على متسلسلات تباعدية وقابلية الجمع . مثال ذلك ، انظر الكتاب لمؤلفه كنوب المدون فى المراجع . إحدى أكثر التطبيقات الأساسية الشيقة لقابلية الجمع لسيزارو هى نظرية فيجر الشهيرة التى تنص على أن دالة متصلة يمكن استردادها من متسلسلة فورييه لها بطريقة سيزارو لقابلية الجمع . حتى ولو كانت الدالة بحيث لا يمكن استخلاصها من هذه المتسلسلة بالتقارب العادى (انظر نظرية ٣٨ – ١٢) .

متتابعات مزدوجة ومكررة :

نتذكر أن متتابعة فى الفراغ R^p هى دالة معرفة على الفئة N لأعداد طبيعية وبمدى فى الفراغ R^p . متتابعة مزدوجة فى الفراغ R^p هى دالة X نطاقها $N \times N$ وتتكون من جميع الأزواج المرتبة لأعداد طبيعية ومداها فى R^p وبمعنى آخر ، عند كل زوج مرتب (m, n) للأعداد الطبيعية تكون القيمة للمتتابعة المزدوجة X عنصراً فى الفراغ R^p والذى سوف نرمز له نموذجاً بالرمز x_{mn} . وفى الحالة العامة سنستعمل رمزاً مثل $X = (x_{mn})$ لتمثيل X ، لكن من المناسب أحياناً أن ندون العناصر فى شكل مصفوفة منتظمة مثل

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \quad (19.2)$$

لاحظ أنه فى هذا النظام ، يشير الدليل الأول إلى الصف الذى يظهر فيه العنصر x_{mn} ويشير الدليل الثانى إلى العمود الذى يظهر فيه نفس العنصر .

١٩ – ٤ تعريف . إذا كانت $X=(x_{mn})$ هى متتابعة مزدوجة فى الفراغ $\boldsymbol{R}^p$ ، فإنه يقال لعنصر x انه نهاية (أو نهاية مزدوجة) للمتتابعة X إذا كان يوجد لكل عدد موجب ε عدد طبيعى $N(\varepsilon)$ بحيث أنه لكل $m, n \geq N(\varepsilon)$ فإن $\|x_{mn}-x\|<\varepsilon$ فى هذه الحالة نقول ان المتتابعة المزدوجة تتقارب إلى X ونكتب

$$x = \lim_{mn} (x_{mn}) \quad \text{أو} \quad x = \lim X$$

كثيرا من النظرية الأساسية الأولية لنهايات المتتابعات تطبق مع تغيير بسيط على المتتابعات المزدوجة . بوجه خاص ، حقيقة كون النهاية المزدوجة وحيدة التعيين (إن وجدت) تبرهن تماماً بنفس الطريقة كما فى نظرية ١٥ – ٦ . يوجد أيضاً معيار كوشى لتقارب المتتابعة المزدوجة الذى سنكتب نصه والذى نترك برهانه القارىء .

١٩ – ٥ معيار كوشى . إذا كانت $X=(x_{mn})$ متتابعة مزدوجة فى الفراغ $\boldsymbol{R}^p$ ، فإن X تكون تقاربية إذا وإذا فقط كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعى $M(\varepsilon)$ بحيث أنه لكل $m, n, r, s \geq M(\varepsilon)$ فإن

$$\|x_{mn}-x_{rs}\|<\varepsilon.$$

سوف لا نتعمق فى أى تفاصيل أكثر فى هذا الجزء لنظرية المتتابعات المزدوجة الذى يوازى نظرية المتتابعة المفردة . بالأحرى نقترح ملاحظة باختصار العلاقة بين النهاية كما عرفت فى ١٩ – ٤ والنهايات المكررة .

وكبداية ، نلاحظ أن المتتابعة المزدوجة يمكن اعتبارها (بطريقتين على الأقل) كمتتابعة لمتتابعات . إحدى الطرق ، يمكننا اعتبار كل صف فى النظام المرتب فى (١٩ – ٢) متتابعة فى الفراغ $\boldsymbol{R}^p$. أى إن الصف الأول فى النظام (١٩ – ٢) ينتج المتتابعة

$$Y_1 = (x_{1n} : n \in \boldsymbol{N}) = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots)$$

الصف الثانى فى (١٩ – ٢) ينتج المتتابعة $Y_2 = (x_{2n} : n \in \boldsymbol{N})$ .. إلخ . وكتفكير لا بأس به هو اعتبار النهايات لمتتابعات الصف $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m, \ldots$ (عند وجود

هذه النهايات) نفرض أن هذه النهايات موجودة ونرمز لها بالرموز $y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$ نحصل على متتابعة لعناصر فى R^p التى ربما يمكن فحصها جيداً التقارب . أى إننا نعتبر وجود $y = \lim (y_m)$. وحيث أن العناصر y_m معطاة بالصورة $y_m = \lim Y_m$ حيث $Y_m = (x_{mn} : n \in N)$ فإن هذا يقودنا إلى التعبير عن النهاية $y = \lim (y_m)$ (عند وجوده) بالتعبير

$$y = \lim_m \lim_n (x_{mn})$$

سنشير إلى y كنهاية مكررة للمتتابعة المزدوجة (أو أكثر دقة كنهاية الصف المتكرر لهذه المتتابعة المزدوجة) .

والذى أجريناه بالنسبة لصفوف يمكن عمله على قدم المساواة بالنسبة لأعمدة أى إننا نكون المتتابعات

$$Z_1 = (x_{m1} : m \in N), \qquad Z_2 = (x_{m2} : m \in N)$$

وهكذا . بفرض أن النهايات $z_1 = \lim Z_1, z_2 = \lim Z_2, \ldots$ موجودة ، فيمكننا أن نعتبر $z = \lim (z_n)$ وعند وجود هذه النهاية الأخيرة ، فنرمز لها بالرمز

$$z = \lim_n \lim_m (x_{mn}),$$

ونرمز إلى z كنهاية مكررة أو النهاية المكررة لعمود لمتتابعة مزدوجة $X = (x_{mn})$

والسؤال الأول الذى يمكن أن نسأله هو : إذا كانت النهاية المزدوجة للمتتابعة $X = (x_{mn})$ موجودة ، فحينئذ هل توجد النهايات المكررة ؟ . والإجابة عن هذا السؤال ربما تكون «مفاجأة للقارىء» ، هى بالنفى . لنرى هذا نفرض أن X هى متتابعة مزدوجة فى R والمعطاة على الصورة $x_{mn} = (-1)^{m+n}(1/m + 1/n)$ ، فقد رأينا حالا أن النهاية المزدوجة لهذه المتتابعة موجودة وتساوى صفرا . بينما قد تحقق من قبل أنه لا أحد من المتتابعتين

$$Y_1 = (x_{1n} : n \in N), \ldots, Y_m = (x_{mn} : n \in N) \ \ldots$$

لها نهاية . ومن ثم لا يمكن وجود نهاية مكررة محتملة حيث لا يوجد أحد من النهايات الداخلة .

السؤال الثانى يكون : إذا كانت النهاية المزدوجة موجودة وإذا كانت إحدى النهايات المكررة موجودة ، فهل النهاية المكررة تساوى النهاية المزدوجة ؟ . فى هذه المرة تكون الإجابة بالإيجاب . وفى الحقيقة ، سنقرر الآن نتيجة قوية نوعاً ما .

١٩ – ٦ نظرية نهاية مزدوجة . إذا كانت النهاية المزدوجة $x = \lim_{mn} (x_{mn})$ موجودة وإذا كانت توجد لكل عدد طبيعى m النهاية $y_m = \lim_n (x_{mn})$ فإن النهاية المكررة $\lim_m \lim_n (x_{mn})$ موجودة وتساوى x .

البرهان . نجد من الفرض ، بأخذ $\varepsilon > 0$ أنه يوجد عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $m, n \geq N(\varepsilon)$ فإن $\|x_{mn} - x\| < \varepsilon$. ثانياً من الفرض ، حيث أن النهايات $y_m = \lim_n (x_{mn})$ موجودة فينتج من المتباينة السابقة ومفترض ١٥ – ٨ أن $\|y_m - x\| \leq \varepsilon$ لكل $m \geq N(\varepsilon)$ لذلك نستنتج أن $x = \lim (y_m)$ وهو المطلوب إثباته .

النتيجة السابقة توضح أنه إذا كانت النهاية المزدوجة موجودة ، فإن الشيء الوحيد الذى يمكنه منع النهايات المكررة من الوجود ومساواتها بالنهاية المزدوجة هو عدم وجود النهايات الداخلة . وأكثر دقة يكون عندنا النتيجة الآتية .

١٩ – ٧ نتيجة . بفرض أن النهاية المزدوجة موجودة وأن النهايات

$$y_m = \lim_n (x_{mn}), \qquad z_n = \lim_m (x_{mn})$$

موجودة لجميع الأعداد الطبيعية m و n . حينئذ النهايات المكررة

$$\lim_m \lim_n (x_{mn}), \qquad \lim_n \lim_m (x_{mn})$$

ومساوية للنهاية المزدوجة .

نستعلم بعد ذلك عما إذا كان وجود تساوى النهايتين المكررتين يضمن وجود النهاية المزدوجة . الجواب هو لا . هذا يتضح بفحص المتتابعة المزدوجة $X = (x_{mn})$ فى R المعرفة بأن $x_{mn} = 1$ عندما $m \neq n$ ، $x_{mn} = 0$ عندما $m = n$. هنا كلا النهايتين المكررتين موجودتين ومتساويتين . بينما لا توجد النهاية المزدوجة ولكن ، تحت بعض شروط إضافية ، يمكننا ضمان وجود النهاية المزدوجة من وجود إحدى النهايتين المكررتين .

١٩ – ٨ تعريف . لكل عدد طبيعي m ، نفرض أن $Y_m = (x_{mn})$ متتابعة فى الفراغ R^p ومتقاربة إلى y_m ، نقول إن المتتابعات $\{Y_m : m \in N\}$ تكون تقاربية منتظمة إذا كان يوجد ، لكل $\varepsilon > 0$ ، عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $n \geq N(\varepsilon)$ فإن $\|x_{mn} - y_m\| < \varepsilon$ لجميع الأعداد الطبيعية m .

سيفمل القارىء حسناً عندما يقارن هذا التعريف مع تعريف ١٧ – ٤ ويلاحظ أنهما من نفس الصيغة . جزئياً لكى نعلل إثبات نظرية ١٩ – ١٠ ، سنوضح أنه إذا كانت كل من المتتابعات y_m تقاربية ، فإن وجود النهاية المزدوجة يضمن أن المتتابعات $\{Y_m : m \in N\}$ تكون تقاربية تقارباً منتظماً .

١٩ – ٩ مفترض . إذا كانت النهاية المزدوجة لمتتابعة مزدوجة $X = (x_{mn})$ موجودة وإذا كانت ، لكل عدد طبيعي m ، المتتابعة $Y_m = (x_{mn} : n \in N)$ تقاربية ، فإن هذه المجموعة تكون تقاربية منتظمة .

البرهان . بما أن النهاية المزدوجة موجودة ، فبأخذ $\varepsilon > 0$ نجد أنه يوجد عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $m, n \geq N(\varepsilon)$ فإن $\|x_{mn} - x\| < \varepsilon$. من الفرض نجد أن المتتابعة $Y_m = (x_{mn} . n \in N)$ تقترب إلى عنصر y_m وباستخدام مفترض ١٥ – ٨ نجد أنه إذا كانت $m \geq N(\varepsilon)$ فإن $\|y_m - x\| \leq \varepsilon$ أى إنه إذا كانت $m, n \geq N(\varepsilon)$ فإننا نستنتج أن

$$\|x_{mn} - y_m\| \leq \|x_{mn} - x\| + \|x - y_m\| < 2\varepsilon$$

وبالإضافة إلى ذلك ، تكون ، عند $m = 1, 2, \ldots, N(\varepsilon) - 1$ المتتابعة Y_m متقاربة من y_m ، ومن ثم يوجد عدد طبيعي $K(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $n \geq K(\varepsilon)$ ، فإن

$$\|x_{mn} - y_m\| < \varepsilon, \qquad m = 1, 2, \ldots, N(\varepsilon) - 1$$

بفرض $M(\varepsilon) = \sup\{N(\varepsilon), K(\varepsilon)\}$ فإننا نستنتج أنه إذا كانت $n \geq M(\varepsilon)$ ، فإنه لأى قيمة للمقدار m نحصل على

$$\|x_{mn} - y_m\| < 2\varepsilon$$

هذا يثبت انتظام التقارب للمتتابعات $\{Y_m : m \in N\}$ وهو المطلوب إثباته .

المفترض السابق يوضح أنه ، تحت الفرض بأن المتتابعات Y_m تقاربية ، فإن التقارب المنتظم لهذه المجموعة من المتتابعات شرط ضرورى لوجود النهاية المزدوجة . نثبت الآن نتيجة فى الاتجاه العكسى .

١٩ – ١٠ نظرية نهاية مكررة . نفرض أن النهايات الفردية

$$y_m = \lim_n (x_{mn}), \qquad z_n = \lim_m (x_{mn})$$

موجود لكل $m, n \in N$ وأن التقارب لأحد من هذه المجموعات منتظم . فإن كلا من النهايتين المكررتين والنهاية المزدوجة موجودة وكل الثلاثة متساوية .

البرهان . نفرض أن التقارب للمجموعة $\{Y_m : m \in N\}$ منتظم . وإذن بإعطاء $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $n \geq N(\varepsilon)$ فإن لكل

$$\|x_{mn} - y_m\| < \varepsilon \tag{19.3}$$

الأعداد الطبيعية m . لتوضيح أن $\lim (y_m)$ موجود ، نأخذ عدداً ثابتاً $q \geq N(\varepsilon)$. بما أن $z_q = \lim (x_{rq} : r \in N)$ موجود ، نعرف أنه إذا كانت $r, s \geq R(\varepsilon, q)$ فإن

$$\|y_r - y_s\| \leq \|y_r - x_{rq}\| + \|x_{rq} - x_{sq}\| + \|x_{sq} - y_s\| < 3\varepsilon$$

لذلك (y_r) هى متتابعة كوشى وتقترب إلى عنصر y فى R^p مما يؤكد وجود النهاية المكررة

$$y = \lim_m (y_m) = \lim_m \lim_n (x_{mn})$$

الآن سنوضح أن النهاية المزدوجة موجودة ، حيث أن $y = \lim (y_m)$ ، بأخذ $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد مقدار $M(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $m \geq M(\varepsilon)$ فإن $\|y_m - y\| < \varepsilon$ نفرض $K(\varepsilon) = \sup \{N(\varepsilon), M(\varepsilon)\}$ ونستعمل ثانياً (١٩ – ٣) لنستنتج أنه إذا كانت $m, n \geq K(\varepsilon)$ فإن

$$\|x_{mn} - y\| \leq \|x_{mn} - y_m\| + \|y_m - y\| < 2\varepsilon$$

هذا يثبت أن النهاية المزدوجة موجودة ومساوية النهاية y .

أخيراً ، لتوضيح أن النهاية المكررة الأخرى موجودة وتساوى النهاية y ، فإننا نستخدم نظرية ١٩ – ٦ أو نتيجتها .

ربما يكون من التخمين أن ، مع أن البرهان المعطى حالياً يعتمد على وجود كلا من مجموعات النهايات الفردية وانتظام النهاية لواحد منهما ، الاستنتاج ربما ينتج من وجود (وانتظام) لمجموعة واحدة بالضبط لنهايات فردية . سنترك هذا للقارىء لفحص صحة أو بطلان هذا التخمين .

تمرينـــات :

١٩ – (أ) كون الملاقات الآتية :

(أ) $(n^2+2) \sim (n^2-3)$ (ب) $(n^2+2) = o(n^3)$

(جـ) $((-1)^n n^2) = O(n^2)$ (د) $((-1)^n n^2) = o(n^3)$

(هـ) $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \sim (1/2\sqrt{n})$ (و) $(\sin n) = O(1)$

١٩ – (ب) بفرض أن Z و Y و X متتابعات بمناصر غير صفرية . وضح أن

(ا) $X \sim X$

(ب) إذا كانت $X \sim Y$ فإن $Y \sim X$.

(ج) إذا كانت $X \sim Y$ و $Y \sim Z$ فإن $X \sim Z$.

١٩ – (ج) إذا كانت $X_1 = O(Y)$ و $X_2 = O(Y)$ ، فنستنتج أن $X_1 \pm X_2 = O(Y)$ ونلخص هذا فى المعادلة :

(أ) $O(Y) \pm O(Y) = O(Y)$. اعط تعليلا مشابهاً لهذا وأثبت أن

(ب) $o(Y) \pm o(Y) = o(Y)$

(ج) إذا كانت $c \neq 0$ حينئذ $o(cY) = o(Y)$ ، $O(cY) = O(Y)$.

(د) $O(o(Y))=o(Y), \quad o(O(Y))=o(Y)$

(هـ) $O(X)O(Y)=O(XY), \quad O(X)o(Y)=o(XY), \quad o(X)o(Y)=o(XY)$

١٩ – (د) أثبت أن $Y=o(X)$ و $X=o(Y)$ لا يمكن أن يتحققا فى وقت واحد . اعط مثالا لمتتابعات بحيث أن $X=O(Y)$ ولكن $Y\neq O(X)$.

١٩ – (هـ) إذا كانت X متتابعة مطردة فى الفراغ R وضح أن المتتابعة للمتوسطات الحسابية تكون مطردة .

١٩ – (و) إذا كانت $X=(x_n)$ متتابعة فى R ، (σ_n) متتابعة للمتوسطات الحسابية ، حينئذ $\limsup(\sigma_n)\leq\limsup(x_n)$ اعط مثالا فيه تظل المتباينة قائمة .

١٩ – (ز) إذا كانت $X=(x_n)$ متتابعة لأعداد حقيقية موجبة، فهل (σ_n) متزايدة باطراد ؟

١٩ – (ح) إذا كانت المتتابعة $X=(x_n)$ فى الفراغ R^p هى حاصل جمع سيزارو ، فإن $X=o(n)$ (إرشاد : $x_n=n\sigma_n-(n-1)\sigma_{n-1}$) .

١٩ – (ط) بفرض أن X متتابعة مطردة فى R ، هل صحيح أن X تكون حاصل جمع سيزارو إذا وإذا فقط كانت تقاربية ؟

١٩ – (ى) اعط برهانا لنظرية ١٩ – ٥

١٩ – (ك) اعتبر وجود النهايات المزدوجة والمكررة للمتتابعات المزدوجة (x_{mn}) حيث x_{mn} مبينة كالآتى :

(أ) $(-1)^{m+n}$ (ب) $\dfrac{1}{m+n}$ (ج) $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$

(د) $\dfrac{m}{m+n}$ (هـ) $(-1)^m\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)$ (و) $\dfrac{mn}{m^2+n^2}$

١٩ – (ل) هل المتتابعة المزدوجة التقاربية محدودة ؟

١٩ – (م) إذا كانت $X=(x_{mn})$ متتابعة مزدوجة تقاربية لأعداد حقيقية ، وإذا كانت النهاية $y_m=\limsup_n(x_{mn})$ موجودة لكل $m\in N$ فإنه يكون لدينا $\lim_{mn}(x_{mn})=\lim_m(y_m)$

١٩ – (ن) أى من المتتابعات المزدوجة فى تمرين ١٩ – ك تكون بحيث أن المجموعة $\{Y_m=\lim(x_{mn}):m\in N\}$ تقاربية منتظمة ؟

١٩ – (س) بفرض $X=(x_{mn})$ متتابعة مزدوجة محدودة فى الفراغ R بخاصية أنه لكل $m\in N$ تكون المتتابعة $Y_m=(x_{mn}:n\in N)$ مطردة الزيادة ولكل $n\in N$ تكون المتتابعة $Z_n=(x_{mn}:m\in N)$ مطردة الزيادة . هل صحيح أن النهايتين المكررتين موجودتان ومتساويتان ؟ . هل النهاية المزدوجة تحتاج إلى أن توجد ؟

١٩ – (ع) ناقش المسألة الموضوعة فى آخر فقرة من هذا الباب .

الفصـل الرابـع

دوال متصلة

سنبدأ الآن دراستنا لصنف من الدوال الأكثر أهمية فى التحليل ، والدوال المتصلة . فى هذا الفصل ، سنخلط النتائج فى فصلى ٢ ، ٣ ونجنى محصولا غنياً من نظريات ذات عمق وفائدة كبيرة .

باب ٢٠ ـ يقدم ويفحص الفكرة عن الاتصال . نقدم فى باب ٢١ الصنف الهام من الدوال الخطية . الباب الأساسى ٢٢ يدرس خواص الدوال المتصلة على الفئات المدمجة والمتصلة ، يناقش باب ٢٣ فكرة الاتصال المنتظم . ستستعمل النتائج لهذه الأبواب الأربعة مراراً خلال بقية الكتاب متتابعات لدوال متصلة . سندرس فى باب ٢٤ ، وندرس النهاية الأعلى والنهاية الأدنى فى باب ٢٥ . يعرض الباب الباقى بعض نتائج هامة ومشوقة ، لكن هذه النتائج سوف لا تستخدم فى الأبواب القادمة .

وليس من المفروض أن القارىء عنده أى ألفة سابقة بمعالجة قوية للدوال المتصلة . لكن ، فى بعض الأمثلة والتمرينات ، تستخدم الدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية لإعطاء أمثلة ليست بسيطة .

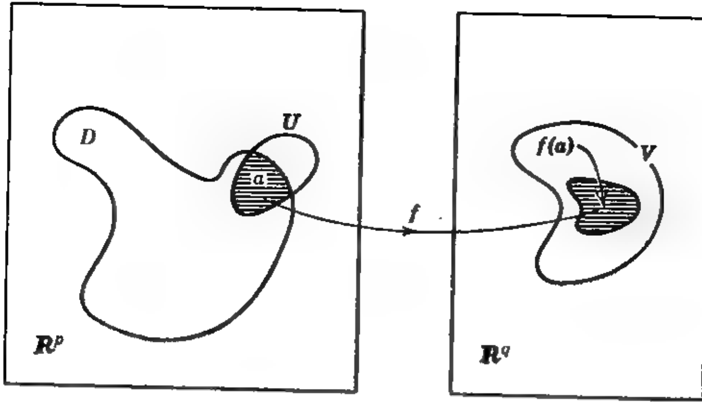
الباب العشرون — خواص محلية لدوال متصلة :

سنفترض أن f هى دالة نطاقها $D(f)$ ومحتوية فى الفراغ R^p ومداها $R(f)$ محتوى فى الفراغ R^q بوجه عام سوف لا تتطلب أن $D(f)=R^p$ أو أن $p=q$.

أولا سوف نعرف الاتصال بدلالة الجوار وعندئذ نشير إلى شروط قليلة مكافئة .

٢٠ – ١ تعريف . إذا كانت $a \in D(f)$ ، فنقول إن f متصلة عند a إذا كان لكل جوار V من $f(a)$ يوجد جوار U (معتمد على V) من a بحيث أنه إذا كانت x أى عنصر من $U \cap D(f)$ فإن $f(x)$ تكون عنصرا من V. (انظر شكل ٢٠ – ١) إذا كانت $A \subseteq D(f)$ فنقول إن f متصلة فى A فى حالة اتصالها عند كل نقطة من A .

أحيانا يقال إن دالة متصلة هى دالة بحيث « ترسل نقطاً متجاورة إلى نقط متجاورة » .



(شكل ٢٠ – ١)

هذا التعبير البدهى ممنوع إذا كان شخصاً يعتقد أن الصورة لجوار a لابد أن تكون جوار الدالة $f(a)$.(اعتبر $x \mapsto |x|$ عند $x = 0$) .

نعطى الآن نصين متكافئين قد أمكن استخدامهما كالتعريف .

٢٠ – ٢ نظرية . بفرض a هى نقطة فى النطاق $D(f)$ للدالة f . النصوص الآتية تكون متكافئة :

(أ) الدالة f تكون متصلة عند a .

(ب) إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، فيوجد عدد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث أنه إذا كانت $x \in D(f)$ $\|x - a\| < \delta(\epsilon)$ فإن $\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$.

(جـ) إذا كانت (x_n) أى متتابعة لعناصر النطاق $D(f)$ بحيث تتقارب إلى a ، فإن المتتابعة $(f(x_n))$ تتقارب إلى $f(a)$.

البرهان . نفرض أن (أ) صحيحة وأن $\varepsilon > 0$ إذن الكرة $V_\varepsilon = \{y \in R^q : \|y - f(a)\| < \varepsilon\}$ هى جوار النقطة $f(a)$ يوجد من تعريف ٢٠ – ١ يوجد جوار U للنقطة a ، بحيث أنه إذا كانت $x \in U \cap D(f)$ فإن $f(x) \in V$. بما أن U هى جوار للنقطة a ، فيوجد عدد حقيقى موجب $\delta(\varepsilon)$ بحيث تكون الكرة المفتوحة التى نصف قطرها $\delta(\varepsilon)$ ومركزها a محتوية فى U . لذلك شرط (أ) يعنى (ب) .

نفرض أن (ب) صحيحة ونفرض أن (x_n) متتابعة من عناصر فى $D(f)$ ومتقاربة إلى a . بفرض $\varepsilon > 0$ ونستنجد بالشرط (ب) لنحصل على $\delta(\epsilon) > 0$ بالخاصية المنصوصة

فى (ب) . بسبب تقارب (x_n) إلى a ، يوجد عدد طبيعى $N(\delta(\varepsilon))$ بحيث أنه إذا كانت $n \geq N(\delta(\varepsilon))$ فإن $\|x_n - a\| < \delta(\varepsilon)$. بما أن كل $x_n \in D(f)$ فينتج من (ب) أن $\|f(x_n) - f(a)\| < \varepsilon$ مما يثبت أن (ج) تظل صحيحة .

أخيرا سنناقش بطريقة غير مباشرة ونوضح أنه إذا كان شرط (أ) لا يظل قائماً ، فإن شرط (ج) لا يظل قائما . إذا فشلت (أ) ، فإنه يوجد جوار V_0 للدالة $f(a)$ بحيث أنه لكل أى جوار U للنقطة a ، يوجد عنصر x_U ينتمى إلى $D(f) \cap U$ لكن بحيث أن $f(x_U)$ لا ينتمى إلى V_0 . لأنه كل عدد طبيعى n تعتبر الجوار U_n النقطة a المعرفة بالصورة $U_n = \{x \in \mathbf{R}^p : \|x - a\| < 1/n\}$ ، من الجملة السابقة ، نجد أنه لكل n فى $\mathbf{N}$ يوجد عنصر x_n ينتمى إلى $D(f) \cap U_n$ ولكن بحيث أن $f(x_n)$ لا تنتمى إلى V_0 . المتتابعة (x_n) المكونة توآ تنتمى إلى $D(f)$ وتتقارب إلى a ، وأيضاً لا ينتمى أحد من عناصر المتتابعة $(f(x_n))$ إلى الجوار V_0 الدالة $f(a)$. ومن ثم نكون قد كونا متتابعة فيهاالشرط (ج) لا يظل قائماً . هذا يثبت أن جزء (ج) ينتج (أ) . وهو المطلوب إثباته .

معيار عدم الاتصال المفيد الآتى هو نتيجة لما قد أجريناه حالا .

٢٠ — ٣ معيار عدم الاتصال . الدالة f ليست متصلة عند نقطة a فى $D(f)$ إذا وإذا فقط كان يوجد متتابعة (x_n) من عناصر فى $D(f)$ بحيث تتقارب إلى a لكن المتتابعة $(f(x_n))$ للصور لا تتقارب إلى $f(a)$.

النتيجة الآتية صياغة أخرى بسيطة التعريف . نتذكر من تعريف ٢ — ١٢ أن الصورة العكسية $f^{-1}(H)$ لفئة جزئية H من $\mathbf{R}^q$ تحت f تكون معروفة بأنها

$$f^{-1}(H) = \{x \in D(f) : f(x) \in H\}$$

٢٠ — ٤ نظرية . الدالة f متصلة عند نقطة a فى $D(f)$ إذا وإذا فقط كان يوجد لكل جوار V الدالة $f(a)$ جوار V_1 للنقطة a بحيث أن

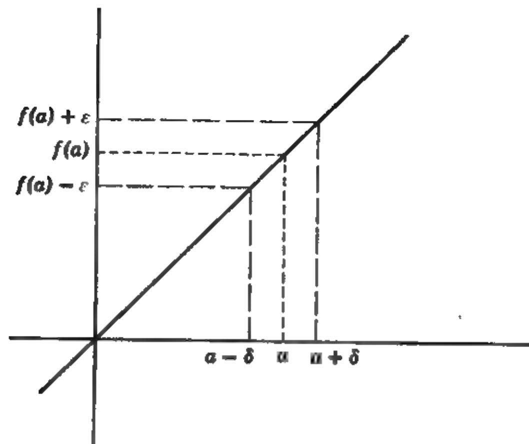
$$V_1 \cap D(f) = f^{-1}(V) \tag{20.1}$$

البرهان . إذا كانت V_1 جوارا للنقطة a بحيث يحقق هذه المعادلة ، حينئذ يمكننا أخذ $U = V_1$. وبالعكس ، إذا كان تعريف ٢٠ — ١ متحققاً ، حينئذ يمكننا أخذ $V_1 = U \cup f^{-1}(V)$ لنحصل على معادلة ٢٠ — ١ .

قبل دفع النظرية أكثر من هذا ، سنقف وقفة أمام بعض أمثلة . وللتبسيط معظم الأمثلة هى من الحالة التى فيها $\mathbf{R}^p = \mathbf{R}^q = \mathbf{R}$

٢٠ — ٥ أمثلة . (أ) نفرض أن $D(f) = \mathbf{R}$ ونفرض أن f هى الدالة الثابتة المساوية

للعدد الحقيقى c لجميع الأعداد الحقيقية x . إذن f تكون متصلة عند كل نقطة الفراغ $\mathbf{R}$ ، وفى الحقيقة ، يمكننا أخذ الجوار U .



(شكل ٢٠ – ٢)

فى تعريف ٢٠ – ١ ليكون مساوياً إلى $\mathbf{R}$ لأى نقطة a فى $D(f)$. بالمثل ، الدالة g المعرفة بأنها

$$g(x)=1, \qquad 0\leq x\leq 1$$
$$=2, \qquad 2\leq x\leq 3$$

هى دالة متصلة عند كل نقطة فى نطاقها .

(ب) نفرض أن $D(f)=\mathbf{R}$ ونفرض أن f هى الدالة المتطابقة المعرفة بالتعريف $f(x)=x$ ، $x\in\mathbf{R}$ (انظر شكل ٢٠ – ٢) . إذا كانت a عدداً حقيقياً معطى بفرض أن $\varepsilon>0$ ونفرض أن $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$. حينئذ . إذا كانت $|x-a|<\delta(\varepsilon)$ ، فيكون لدينا $|f(x)-f(a)|=|x-a|<\varepsilon$

(ج) نفرض $D(f)=\mathbf{R}$ ونفرض أن f هى دالة التربيع المعرفة بأنها $f(x)=x^2$ ، $x\in\mathbf{R}$ نفرض أن a تنتمى إلى $\mathbf{R}$ ونفرض أن $\varepsilon>0$ ، حينئذ $|f(x)-f(a)|=|x^2-a^2|=|x-a|\,|x+a|$. نريد أن نجعل التعبير السابق أقل من ε بجعل $|x-a|$ صغيرة صغراً كافياً . إذا كانت $a=0$ فإننا نختار $\delta(\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}$. إذا كانت $a\neq 0$ فإننا نريد أن نحصل على حد للمقدار $|x+a|$ فى جوار a . مثال ذلك ، إذا كانت $|x-a|<|a|$ فإن $0<|x|<2|a|$ ، $|x+a|\leq|x|+|a|<3\,|a|$. ومن ثم

$$|f(x)-f(a)| \le 3\,|a|\,|x-a| \qquad (20.2)$$

بحيث أن $|x-a|<|a|$. أى أنه إذا عرفنا $\delta(\varepsilon)=\inf\{|a|, \varepsilon/3\,|a|\}$ ، فإنه عندما $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ ، فإن المتباينة (٢٠-٢) تظل قائمة ويكون عندنا $|x-a|<\delta(\varepsilon)$.

(د) نعتبر نفس الدالة كما فى (ج) لكن نستعمل أسلوباً فنياً مختلفاً قليلا بدلا من تحليل x^2-a^2 إلى عوامل ، نكتبه ككثيرة حدود فى $x-a$. أى أن

$$x^2-a^2=(x^2-2ax+a^2)+(2ax-2a^2)=(x-a)^2+2a(x-a)$$

باستخدام المتباينة المثلثية ، نحصل على

$$|f(x)-f(a)| \le |x-a|^2+2\,|a|\,|x-a|$$

إذا كانت $\delta \le 1$ و $|x-a|<\delta$ فإن $|x-a|^2<\delta^2 \le \delta$ والحد فى الطرف الأيمن يكون المقدار $\delta+2\,|a|\,\delta=\delta(1+2\,|a|)$. مسيطرا عليه . ومن ثم يكون قد أرشدنا لاختيار

$$\delta(\varepsilon)=\inf\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+2\,|a|}\right\}$$

(هـ) اعتبر $D(f)=\{x \in \mathbf{R} : x \ne 0\}$ ونفرض أن f معرفة بأنها $f(x)=1/x,\ x \in D(f)$ اذا كانت $a \in D(f)$ ، فإن

$$|f(x)-f(a)|=|1/x-1/a|=\frac{|x-a|}{|ax|}$$

نريد مرة أخرى إيجاد حد لمعامل المقدار $|x-a|$ الذى يكون متحققاً فى جوار $a \ne 0$

نلاحظ أنه إذا كانت $|x-a|<\frac{1}{2}|a|$ فإن $\frac{1}{2}|a|<|x|$ ويكون عندنا

$$|f(x)-f(a)| \le \frac{2}{|a|^2}|x-a|$$

وإذن قد أرشدنا لأخذ $\delta(\varepsilon)=\inf\{\frac{1}{2}|a|, \frac{1}{2}\varepsilon\,|a|^2\}$

(و) نفرض أن f معرفة عند $D(f)=\mathbf{R}$ بأنها

$$\begin{aligned} f(x)&=0, \qquad x \le 0,\\ &=1, \qquad x>0 \end{aligned}$$

ربما يلاحظ أن f متصلة عند كل النقط $a \ne 0$. سنوضح أن f غير متصلة عند صفر باستخدام معيار عدم الاتصال ٢٠ — ٣ . وفى الحقيقة ، إذا كانت $x_n=1/n$ فإن المتتابعة $(f(1/n))=(1)$ لا تقترب من $f(0)$ (انظر شكل ٢٠ — ٣) .

(ز) نفرض $D(f)=\mathbf{R}$ ونفرض أن f دالة درشليت(*) غير المتصلة المعرفة كما يلى :

$f(x) = 1$ إذا كانت x قياسية

$f(x) = 0$ إذا كانت x غير قياسية

إذا كانت a عدداً قياسياً ، نفرض أن $X=(x_n)$ متتابعة لأعـداد غير قياسية بحيث تقترب من a (نظرية ٦ – ١٠ تؤكد لنا وجود مثل هذه المتتابعة) . بما أن $f(x_n)=0$ ، لكل $n \in \mathbf{N}$ فإن المتتابعة $(f(x_n))$ لا تقترب إلى $f(a)=1$ ، f ليست متصلة عند العدد القياسى a . وبمعنى آخر ، إذا كانت b عددا غير قياسى ، فإنه توجد متتابعة $Y=(y_n)$ لأعداد قياسية تتقارب إلى b المتتابعة $(f(y_n))$ لا تتقارب من $f(b)$ ، لذلك تكون f غير متصلة عند b وإذن ، دالة درشليت غير متصلة عند أى نقطة .





(شكل ٢٠ – ٣)

(ح) بفرض $D(f)=\{x \in \mathbf{R} : x>0\}$. لأى عدد غير قيـاسى $x>0$ ، نعرف $f(x)=0$ لأى عدد قياسى على الصورة m/n ، حيث العددان الطبيعيان m و n ليس بينهما عامل مشترك ماعدا واحداً ، نعرف $f(m/n)=1/n$. سنوضح أن f متصلة عند كل عدد قياسى فى $D(f)$ وغير متصلة عند كل عدد قياسى $D(f)$. النص الأخير ينتج بأخذ متتابعة لأعداد غير قياسية بحيث تقترب إلى العدد القياسى المعلوم واستخدام معيار عدم الاتصال . نفرض أن a عدد غير قياسى ، $\varepsilon > 0$ ، حينئذ يوجد عدد طبيعى n بحيث أن $1/n < \varepsilon$. إذا كانت δ مختارة صغيرة صغراً كافياً بحيث أن الفترة $(a-\delta, a+\delta)$ لا تحتوى عدداً قياسياً مقامه أقل من n ، فينتج أنه عند x فى هذه الفترة يكون لدينا $|f(x)-f(a)|=|f(x)| \le 1/n < \varepsilon$. أى أن f متصلة عند العدد غير القياسى a . لذلك تكون هذا الدالة متصلة بالضبط عند النقط غير القياسية فى نطاقها .

(*) بيتر جوستاف ليبجين درشليت (١٨٠٥ – ١٨٥٩) ولد فى (راين لاند) وتعلم فى برلين لمدة ثلاثين عاماً تقريباً قبل ذهابه إلى جيتنجن خلفاً للأستاذ جاوس . قد أوجد اسهامات أساسية فى نظرية العدد والتحليل .

(ط) فى هذه المرة ، نفرض أن $D(f)=\mathbf{R}^2$ ، ونفرض أن f هى الدالة فى $\mathbf{R}^2$ بقيم فى $\mathbf{R}^2$ معرفة بالآتى

$$f(x, y)=(2x+y, x-3y)$$

نفرض أن (a, b) نقطة ثابتة فى $\mathbf{R}^2$ ، سنوضح أن f متصلة عند هذه النقطة . ولإجراء هذا ، نحتاج لتوضيح أنه يمكننا جعل المقدار

$$\|f(x, y)-f(a, b)\|=\{(2x+y-2a-b)^2+(x-3y-a+3b)^2\}^{1/2}$$

صغيرا اختيارياً بأخذ (x, y) قريبة قرباً كافياً من (a, b) . بما أن $\{p^2+q^2\}^{1/2} \leq \sqrt{2}\sup\{|p|, |q|\}$ ، فن الواضح جدا ملاحظة أنه يمكن جعل الحدين

$$|2x+y-2a-b|, \qquad |x-3y-a+3b|$$

صغيرين اختيارياً بأخذ (x, y) قريبة قرباً كافياً من (a, b) فى $\mathbf{R}^2$. وفى الحقيقة بمتباينة المثلث نجد أن

$$|2x+y-2a-b|=|2(x-a)+(y-b)| \leq 2|x-a|+|y-b|$$

الآن $|x-a| \leq \{(x-a)^2+(y-b)^2\}^{1/2}=\|(x, y)-(a, b)\|$ وبالمثل المقدار $|y-b|$ ؛ ومن ثم يكون لدينا

$$|2x+y-2a-b| \leq 3\|(x, y)-(a, b)\|$$

بالمثل

$$|x-3y-a+3b| \leq |x-a|+3|y-b| \leq 4\|(x, y)-(a, b)\|$$

لذلك إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، يمكننا أخذ $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/(4\sqrt{2})$ ومتأكدين من أنه إذا كانت $\|(x, y)-(a, b)\|<\delta(\varepsilon)$ فإن $\|f(x, y)-f(a, b)\|<\varepsilon$ ، مع أنه يمكن الحصول على فترة أكبر بمقدار δ بتحليل أكثر صفاء (مثال ذلك باستخدام متباينة شفارتز ٨ – ٧) .

(ى) ثانياً نفرض أن $D(f)=\mathbf{R}^2$ ونفرض أن f معرفة بأنها

$$f(x, y)=(x^2+y^2, 2xy)$$

إذا كانت (a, b) نقطة ثابتة فى $\mathbf{R}^2$ ، فإن

$$\|f(x, y)-f(a, b)\|=\{(x^2+y^2-a^2-b^2)^2+(2xy-2ab)^2\}^{1/2}$$

كما فى (ك) ، نفحص الحدين فى الطرف الأيمن كل على حدة ، سيلاحظ أننا نحتاج للحصول على حسابات أولية لمقدار . من المتباينة المثلثية ، نجد أن

$$|x^2+y^2-a^2-b^2| \leq |x^2-a^2|+|y^2-b^2|$$

إذا كانت النقطة (x, y) فى نطاق مسافة واحد صحيح من (a, b) ، فإن $|x| \leq |a|+1$

لذلك $|x+a| \le 2|a|+1$ ، $|y| \le |b|+1$ بحيث أن $|y+b| \le 2|b|+1$ ونجد أن

$$|x^2+y^2-a^2-b^2| \le |x-a|\,(2|a|+1)+|y-b|\,(2|b|+1)$$
$$\le 2(|a|+|b|+1)\,\|(x, y)-(a, b)\|$$

وبنمط مماثل نجد أن

$$|2xy-2ab| = 2\,|xy-xb+xb-ab| \le 2\,|x|\,|y-b|+2\,|b|\,|x-a|$$
$$\le 2(|a|+|b|+1)\,\|(x, y)-(a, b)\|$$

لذلك ، نضع

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{1, \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}(|a|+|b|+1)}\right\}$$

إذا كانت $\|(x, y)-(a, b)\| < \delta(\varepsilon)$ ، وإذن نحصل على $\|f(x, y)-f(a, b)\| < \varepsilon$ مما يثبت أن f متصلة عند النقطة (a, b) .

محصلة دوال :

النتيجة الآتية هى نتيجة مباشرة لنظريتى ١٥ – ٦ ، ٢٠ – ٢ (ج) ، لذلك سوف لا ننسخ التفاصيل . وبالتناوب ، يمكن برهنة هذه النتيجة مباشرة باستخدام مناقشات موازية تماماً التى استخدمت فى البرهان لنظرية ١٥ – ٦ . نتذكر أنه إذا كانت f ، g دالتين نطاقهما $D(f)$ ، $D(g)$ فى R^p ومداهما فى R^q . ونعرف حاصل جمعهما $f+g$ ، باقى طرحهما $f-g$ وحاصل ضربهما القياسى $f \cdot g$ لكل x فى $D(f) \cap D(g)$ بالصيغ الآتية :

$$f(x)+g(x), \qquad f(x)-g(x), \qquad f(x)\cdot g(x)$$

بالمثل ، إذا كانت c عدداً حقيقياً وإذا كانت φ دالة نطاقها $D(\varphi)$ فى R^p ومداها فى R ، فنعرف حواصل cf عند x فى $D(f)$ ، φf عند x فى $D(\varphi) \cap D(f)$ بالصيغتين

$$cf(x), \qquad \varphi(x)f(x)$$

وفى الحالة الخاصة ، إذا كانت $\varphi(x) \neq 0$ عند $x \in D_0$ ، فإنه يمكننا تعريف خارج القسمة f/φ عند x فى $D(f) \cap D_0$ بالتعريف

$$f(x)/\varphi(x)$$

الآن بهذه التعاريف نقرر النتيجة .

٢٠ – ٦ نظرية . إذا كانت الدوال f, g, φ متصلة عند نقطة ، فإن المحصلات الجبرية لهذه الدوال

$$f+g, \quad f-g, \quad f\cdot g, \quad cf, \quad \varphi f \quad و \quad f/\varphi$$

تكون أيضاً متصلة عند هذه النقطة .

يوجد محصلة جبرية مفيدة غالباً . إذا كانت f معرفة فى $D(f)$ من R^p إلى R فنعرف القيمة المطلقة $|f|$ للدالة f بأنها الدالة التى مداها فى الأعداد الحقيقية R والتى قيمتها عند x فى $D(f)$ هى $|f(x)|$.

٢٠ – ٧ نظرية . إذا كانت f دالة متصلة عند نقطة ، فإن $|f|$ تكون أيضا متصلة هناك

البرهان . من المتباينة المثلثية ، نجد أن

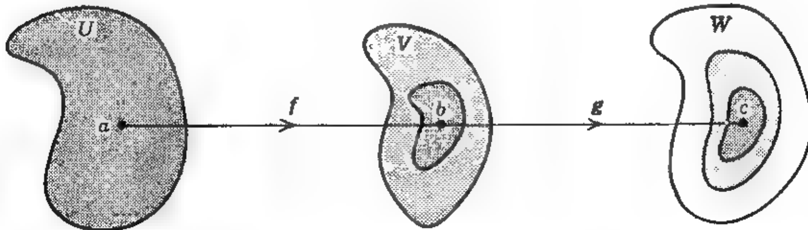
$$\big|\,|f(x)|-|f(a)|\,\big| \leq |f(x)-f(a)|$$

التى تنتج منها النتيجة المطلوبة فى الحال وهو المطلوب إثباته .

نتذكر مفهوم تحصيل دالتين . نفرض أن f لها نطاق $D(f)$ فى R^p ومداها فى R^q ونفرض أن g لها نطاق $D(g)$ فى R^q ومداها فى R . عرفنا فى تعريف ٢ – ٢ تركيب $h = g\circ f$ بنطاق $D(h)=\{x\in D(f): f(x)\in D(g)\}$ وعند x فى $D(h)$ وضعنا $h(x)=g[f(x)]$. أى أن $h=g\circ f$ هى دالة ترسم $D(h)$ ، الذى هو فئة جزئية من $D(f)\subseteq R^p$ إلى R^r . الآن سنثبت الاتصال لهذه الدالة .

٢٠ – ٨ نظرية . إذا كانت f دالة متصلة عند a وكانت g متصلة عند $b=f(a)$ فإن التحصيل $g\circ f$ يكون متصلا عند a .

البرهان . نفرض W هى جوار النقطة $c=g(b)$. بما أن g متصلة عند b ، فيوجد جوار V عند b بحيث أنه إذا كانت y تنتمى إلى $V\cap D(g)$ فإن $g(y)\in W$. بما أن f متصلة عند a ، فيوجد جوار U للنقطة a بحيث أنه إذا كانت x تنتمى إلى $U\cap D(f)$ فإن $f(x)$ تكون فى V لذلك ، إذا كانت x تنتمى إلى $U\cap D(g\circ f)$ فإن $f(x)$ تكون فى $V\cap D(g)$ و $g[f(x)]$ تنتمى إلى W . (انظر شكل ٢٠–٤) . هذا يثبت أن $h=g\circ f$ متصلة عند a . وهو المطلوب إثباته .



(شكل ٢٠ – ٤)

تمرينـــات :

٢٠ – (أ) اثبت أنه إذا كانت f معرفة عند $x \geq 0$ بأنها $f(x)=\sqrt{x}$ ، فإن f تكون متصلة عند كل نقطة من نطاقها .

٢٠ –(ب) وضح أن « دالة كثيرة الحدود » أى دالة f على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{عند} \quad x \in \boldsymbol{R}$$

تكون متصلة عند كل نقطة من الفراغ $\boldsymbol{R}$

٢٠ –(ج) وضح أن « دالة قياسية » (أى خارج قسمة دالتين كثيرتى الحدود) تكون متصلة عند كل نقطة من القطعة المعرفة عندها

٢٠ –(د) استخدم متباينة شفارتز لتوضح أنه يمكن أخذ $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/\sqrt{15}$ فى مثال ٢٠ – ٥ (ط) .

٢٠ – (هـ) بفرض أن f هى دالة فى $\boldsymbol{R}$ إلى $\boldsymbol{R}$ ومعرفة بالتعريف

$$f(x) = x \text{ ، } x \text{ غير قياسية}$$

$$f(x) = 1 - x, \text{ ، } x \text{ قياسية}$$

وضح أن f تكون متصلة عند $x = \frac{1}{2}$ وغير متصلة عند أى قيمة أخرى .

٢٠ – (و) بفرض أن f متصلة فى $\boldsymbol{R}$ إلى $\boldsymbol{R}$. وضح أنه إذا كانت $f(x) = 0$ عندما تكون x قياسية فإن $f(x) = 0$ لكل x فى $\boldsymbol{R}$

٢٠ – (ز) بفرض أن f ، g دالتان متصلتان فى $\boldsymbol{R}$ إلى $\boldsymbol{R}$. هو صحيح أن $f(x) = g(x)$ عند $x \in \boldsymbol{R}$ إذا وإذا فقط كانت $f(x)=g(x)$ عند جميع الأعداد القياسية y فى $\boldsymbol{R}$ ؟

٢٠ – (ح) استخدم المتباينة $|\sin x| \leq |x|$ عند $x \in \boldsymbol{R}$ لتوضح أن دالة الجيب تكون متصلة عند $x = 0$ استخدم هذه الحقيقة مع المتطابقة

$$\sin x - \sin u = 2 \sin \tfrac{1}{2}(x-u) \cos \tfrac{1}{2}(x+u)$$

لبرهنة أن دالة الجيب متصلة عند أى نقطة فى الفراغ $\boldsymbol{R}$

٢٠ –(ط) باستخدام النتيجة فى التمرين السابق ، وضح أن الدالة g المعرفة فى $\boldsymbol{R}$ إلى $\boldsymbol{R}$ بالتعريف

$$\begin{aligned} g(x) &= x \sin(1/x), & x \neq 0, \\ &= 0, & x = 0 \end{aligned}$$

متصلة عند كل نقطة . ارسم شكلا تخطيطياً لهذه الدالة .

٢٠ – (ى) بفرض أن h معرفة عند $x \neq 0, x \in \boldsymbol{R}$ بأنها

$$h(x) = \sin(1/x), \qquad x \neq 0$$

اثبت أنه كيفما تكون h معرفة عند $x = 0$ ، فإن الدالة ستكون غير متصلة عند $x = 0$.

٢٠ – (ك) بفرض أن $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ معرفة بأنها

$$F(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{إذا كانت } x, y \in \boldsymbol{Q}$$
$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

عين النقط التي عندها F تكون متصلة .

٢٠ – (ل) نقول أن دالة f فى $\boldsymbol{R}$ إلى $\boldsymbol{R}$ جمعية إذا كانت تحقق

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

عند كل $x, y \in \boldsymbol{R}$. وضح أن الدالة الجمعية المتصلة عند $x = 0$ تكون متصلة عند أى نقطة للفراغ $\boldsymbol{R}$. اثبت أن دالة جمعية باطراد متصلة عند أى نقطة .

٢٠ – (م) بفرض أنه إذا كانت f دالة جمعية متصلة فى $\boldsymbol{R}$. وإذا كانت $c = f(1)$ ، أثبت أن $f(x) = cx$ عند كل x فى $\boldsymbol{R}$ (إرشاد : أولا وضح أنه إذا كانت r عدداً قياسياً ، فإن $f(r) = cr$) .

٢٠ – (ن) بفرض $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ تحقق العلاقة

$$g(x + y) = g(x)g(y) \quad \text{عند } x, y \in \boldsymbol{R}$$

وضح أنه إذا كانت g متصلة عند $x = 0$ ، فإن g تكون متصلة عند كل نقطة . أيضا ، إذا كانت $g(a) = 0$ عند نقطة ما a حيث $a \in \boldsymbol{R}$ ، فإن $g(x) = 0$ لكل $x \in \boldsymbol{R}$.

٢٠ – (س) إذا كانت $|f|$ متصلة عند نقطة ، فهل صحيح أن f تكون أيضاً متصلة عند هذه النقطة ؟

٢٠ – (ع) بفرض $f, g : \boldsymbol{R}^p \to \boldsymbol{R}$ متصلة عند نقطة $a \in \boldsymbol{R}^p$ وبفرض k و h معرفتان فى $\boldsymbol{R}^p$ إلى $\boldsymbol{R}$ بالتعريف

$$h(x) = \sup\{f(x), g(x)\}, \qquad k(x) = \inf\{f(x), g(x)\}$$

وضح أن h و k متصلتان عند a (إرشاد : لاحظ أن

$$\inf\{b, c\} = \tfrac{1}{2}(b + c - |b - c|) \quad ، \quad \sup\{b, c\} = \tfrac{1}{2}(b + c + |b - c|) \;)$$

٢٠ – (ف) إذا كانت $x \in \boldsymbol{R}$ ، فنعرف غالباً $[x]$ بأنه أكبر عدد صحيح $n \in \boldsymbol{Z}$ بحيث أن

$n \le x$ الراسم $x \mapsto [x]$ يسمى دالة أكبر عدد صحيح . ارسم شكلا تخطيطياً وعين نقط الاتصال للدوال المعرفة عند $x \in R$ بما يلي

(أ) $f(x) = [x]$ (ب) $g(x) = x - [x]$

(ج) $h(x) = [2 \sin x]$ (د) $k(x) = \sin \frac{1}{2}\pi [x]$

٢٠ – (ص) دالة f معرفة فى فترة $I \subseteq R$ إلى R يقال إنها متزايدة فى I إذا كانت $x \le x', x, x' \in I$ تضمن $f(x) \le f(x')$. يقال إنها متزايدة بالضبط فى I إذا كانت $x < x', x, x' \in I$ تدل على أن $f(x) < f(x')$. يمكن إعطاء تعريفات مشابهة لدوال متناقصة ودوال متناقصة بالضبط . دالة إما متزايدة أو متناقصة فى فترة يقال إنها مطردة فى هذه الفترة .

(أ) إذا كانت f متزايدة I ، فإن f تكون متصلة عند نقطة داخلية $c \in I$ إذا وإذا فقط كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ نقط $x_1, x_2 \in I, x_1 < c < x_2$ بحيث أن $f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon$

(ب) إذا كانت f متزايدة فى I ، فإن f تكون متصلة عند نقطة داخلية $c \in I$ إذا وإذا فقط كان

$$\sup \{f(x) : x < c\} = f(c) = \inf \{f(x) : x > c\}$$

٢٠ – (ق) بفرض أن f متزايدة فى $I = [a, b]$ بمعنى التمرين السابق وبفرض

$$j_c = \inf \{f(x) : x > c\} - \sup \{f(x) : x < c\}$$

إذا كانت $j_c > 0$ ، نقول أن f لها وثبة j_c عند النقطة c .

(أ) إذا كانت $n \in N$ وضح أنه يمكن أن توجد فئة محدودة من نقط فى I التى عندها f يكون لها وثبة تزيد عن $1/n$.

(ب) وضح أن الدالة المتزايدة يمكن أن يكون لها على الأكثر فئة محسوبة من نقط عدم الاتصال .

مشروعــات :

٢٠ – a نفرض أن g دالة فى R إلى R وليست مساوية للصفر تطابقياً وتحقق المعادلة الدالية

$$g(x + y) = g(x)g(y) \quad \text{عند} \quad x, y \in R \qquad (*)$$

الغرض من هذا المشروع هو توضيح أن g يجب أن تكون « دالة أسية » :

(أ) اثبت أن g دالة متصلة عند كل نقطة من R إذا وإذا فقط كانت متصلة عند النقطة $x = 0$.

(ب) وضح أن $g(x)>0$ لكل $x \in \boldsymbol{R}$.

(ج) أثبت أن $g(0)=1$. إذا كانت $a=g(1)$ ، فإن $a>0$ و $g(r)=a^r$ بجميع $r \in \boldsymbol{Q}$.

(د) الدالة g تكون متزايدة بالضبط ، أو ثابتة ، أو متناقصة بالضبط على حسب كون $g(1)>1, g(1)=1$ ، أو $0<g(1)<1$. عندما تكون g متصلة .

(هـ) إذا كانت $g(x)>1$ عند x فى فترة ما $(0, \delta), \delta>0$ فإن g متزايدة بالضبط ومتصلة فى $\boldsymbol{R}$.

(و) إذا كانت $a>0$ ، فإنه يوجد على الأكثر دالة متصلة واحدة g تحقق (*) بحيث أن $g(1)=a$.

(ز) نفرض أن $a>1$. بالرجوع إلى مشروع ٦ — β وضح أنه توجد دالة متصلة وحيدة تحقق (*) بحيث أن $g(1)=a$.

٢٠ — β نفرض $P=\{x \in \boldsymbol{R}: x>0\}$ ونفرض أن $h: P \rightarrow \boldsymbol{R}$ دالة لا تساوى الصفر تطابقياً وتحقق المعادلة الدالية

$$h(xy)=h(x)+h(y) \quad \text{عند} \quad x, y \in P \qquad (\dagger)$$

الغرض من هذا المشروع هو توضيح أن h يجب أن تكون « دالة لوغاريتمية » .

(أ) وضح أن h متصلة عند كل نقطة من P إذا وإذا فقط كانت دالة متصلة عند النقطة $x=1$.

(ب) وضح أن h لا يمكن تعريفها عند $x=0$ لتحقق $(\dagger)$ عند $\{x \in R: x \geq 0\}$

(ج) وضح أن $h(1)=0$. إذا كانت $x>0$ ، $r \in \boldsymbol{Q}$ ، فإن $h(x^r)=rh(x)$

(د) وضح أنه إذا كانت $h(x) \geq 0$ فى فترة ما $\{x \in R: x \geq 1\}$ فإن h تكون متزايدة بالضبط ومتصلة فى P .

(هـ) إذا كانت h متصلة ، وضح أن $h(x) \neq 0$ عند $x \neq 1$. أيضا ، أما $h(x)>0$ عند $x>1$ ، أو $h(x)<0$ عند $x>1$.

(و) إذا كانت $b>1$ ، وضح أنه توجد على الأكثر دالة متصلة واحدة فى P وتحقق $(\dagger)$ وبحيث أن $h(b)=1$.

(ز) بفرض أن $b>1$. بالرجوع إلى مشروع ٦ — γ . وضح أنه توجد دالة متصلة وحيدة تحقق $(\dagger)$ بحيث أن $h(b)=1$.

الباب الواحد والعشرون — دوال خطية :

اختصت المناقشة السابقة بدوال اختيارية معرفة فى جزء من الفراغ R^p إلى R^q . قبل الاستمرار فى المناقشة نريد أن نقدم صنفاً من دوال بسيطة نسبياً ولكنها هامة جداً بدرجة كبيرة ، وتسمى « الدوال الخطية » والتى تظهر فى تطبيقات كثيرة جداً .

٢١ – ١ تعريف . يقال لدالة f نطاقها R^p ومداها فى R^q أنها خطية فى حالة

$$f(ax+by)=af(x)+bf(y) \tag{21.1}$$

لجميع b و a فى R ، y و x فى R^p .

ينتج بالاستنتاج من (٢١ – ١) أنه إذا كانت $a, b \dots, c$ تكون $n \in N$ أعداداً حقيقية ، $x, y, \dots, z$ ، هى n عنصرا من R^p ، فإن

$$f(ax+by+\cdots+cz)=af(x)+bf(y)+\cdots+cf(z)$$

وقد لوحظ حالا أن الدوال فى مثال ٢٠ – ٦ (ب) ، ٢٦ – ٦ (ط) هى دوال خطية فى الحالة $p=q=1$ ، $p=q=2$ ، على الترتيب . وفى الحقيقة ليس من الصعب تمييز الدالة الخطية فى الحالة العامة من R^p إلى R^q .

٢١ – ٢ نظرية . إذا كانت f دالة خطية نطاقها R^p ومداها فى R^q ، فيوجد pq أعداد حقيقية $(c_{ij}),\ 1 \le i \le q,\ 1 \le j \le p$ بحيث أنه إذا كانت $x=(x_1, x_2, \dots, x_p)$ أى نقطة فى R^p وكانت $y=(y_1, y_2, \dots, y_q)=f(x)$ هى صورتها تحت f ، فنجد أن :

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1p}x_p, \\ y_2 &= c_{21}x_1+c_{22}x_2+\cdots+c_{2p}x_p, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_q &= c_{q1}x_1+c_{q2}x_2+\cdots+c_{qp}x_p \end{aligned} \tag{21.2}$$

وبالعكس ، إذا كانت (c_{ij}) مجموعة من pq من الأعداد الحقيقية ، فإن الدالة التى تنقل العنصر x فى R^p إلى العنصر y فى R^q طبقاً للمعادلات (٢١ – ٢) هى دالة خطية نطاقها R^p ومداها فى R^q .

البرهان . بفرض أن $e_1, e_2, \dots, e_p$ عناصر للفراغ R^p ومعطاة بواسطة

$(1, 0, \dots, 0),\ e_2=(0, 1, \dots, 0), \dots,\ e_p=(0, 0, \dots, 1)$

نفحص الصور لهذه المتجهات تحت الدالة الخطية f . نفرض أن

$$f(e_1) = (c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{q1}),$$
$$f(e_2) = (c_{12}, c_{22}, \ldots, c_{q2}), \qquad (21.3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(e_p) = (c_{1p}, c_{2p}, \ldots, c_{qp})$$

أى أن العدد الحقيقى c_{ij} هو الاحداثى الذى ترتيبه i للنقطة $f(e_j)$.

عنصر اختيارى $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ من الفراغ R^p يمكن التعبير عنه ببساطة بدلالة المتجهات $e_1, e_2, \ldots, e_p$ فى الحقيقة

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_p e_p$$

بما أن f خطية ، فينتج أن

$$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_p f(e_p)$$

إذا استخدمنا المعادلات (٢١ – ٣) ، نحصل على

$$f(x) = x_1(c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{q1}) + x_2(c_{12}, c_{22}, \ldots, c_{q2}) + \cdots + x_p(c_{1p}, c_{2p}, \ldots, c_{qp})$$
$$= (c_{11}x_1, c_{21}x_1, \ldots, c_{q1}x_1) + (c_{12}x_2, c_{22}x_2, \ldots, c_{q2}x_2) + \cdots + (c_{1p}x_p, c_{2p}x_p, \ldots, c_{qp}x_p)$$
$$= (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1p}x_p, c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2p}x_p, \ldots, c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \cdots + c_{qp}x_p)$$

هذا يوضح أن الاحداثيات الدالة $f(x)$ تعطى بالعلاقات (٢١ – ٢) كالمطلوب .

وبالعكس ، من السهل تحقيق بحسابات مباشرة ، أنه إذا استخدمت العلاقات (٢١–٢) لحصول على إحداثيات y_i للدالة y من الاحداثيات x_j للعنصر x فإن الدالة الناتجة تحقق العلاقة (٢١–١) وإذن فهى خطية . سنحذف هذا الحساب حيث أنه سهل .

وهو المطلوب إثباته

يجب الإشارة إلى أن المجموعة المنتظمة المستطيلة للأعداد

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qp} \end{bmatrix} \qquad (21.4)$$

التى تتكون من q صف ، p عمود ، تسمى غالباً المصفوفة المناظرة إلى الدالة الخطية f .
يوجد تناظر أحادى بين الدوال الخطية للفراغ R^p إلى R^q ، $p \times q$ مصفوفات لأعداد

حقيقية . كما لاحظنا أنه يمكن وصف مفعول الدالة f بدلالة مصفوفتها . سوف لا يكون من الضرورى تطوير أى من النظرية الشاملة للمصفوفات ، كيفما ، لكن سنعتبر المصفوفة (٢١ - ٤) كاختزال لوصف مفصل للدالة الخطية f .

الآن سنبرهن أن الدالة الخطية من $\boldsymbol{R}^p$ إلى $\boldsymbol{R}^q$ تكون أوتوماتيكياً (ذاتياً أو تلقائيا) متصلة لإجراء هذا ، أولا يفيد ذكر متباينة شفارتز فى الصورة

$$|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_pb_p|^2 \le \{a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_p{}^2\}\{b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_p{}^2\}$$

نستخدم هذه المتباينة لكل مقدار فى المعادلة (٢١ - ٢) لنحصل على ، عند $1 \le i \le q$ ، التقدير

$$|y_i|^2 \le (|c_{i1}|^2+|c_{i2}|^2+\cdots+|c_{ip}|^2)\,\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{p} |c_{ij}|^2\,\|x\|^2$$

بجمع هذه المتباينات ، نحصل على

$$\|y\|^2 \le \left\{\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} |c_{ij}|^2\right\}\|x\|^2$$

التى منها نستنتج أن

$$\|y\| = \|f(x)\| \le \left\{\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} |c_{ij}|^2\right\}^{1/2}\|x\| \tag{21.5}$$

٢١ - ٣ نظرية . إذا كانت f دالة خطية نطاقها $\boldsymbol{R}^p$ ومداها فى $\boldsymbol{R}^q$ ، فإنه يوجد مقدار ثابت موجب A بحيث أنه إذا كانت v و u أى متجهين فى $\boldsymbol{R}^p$. فإن

$$\|f(u)-f(v)\| \le A\,\|u-v\| \tag{21.6}$$

لذلك ، تكون دالة خطية $\boldsymbol{R}^p$ إلى $\boldsymbol{R}^q$ متصلة عند كل نقطة .

البرهان . قد رأينا ، فى استنتاج قانون (٢١ - ٥) أنه يوجد مقدار ثابت A بحيث أنه إذا كانت x أى عنصر الفراغ $\boldsymbol{R}^p$ فإن $\|f(x)\| \le A\,\|x\|$. الآن نفرض $x = u - v$ ونستخدم خاصية الخطية للدالة f لنحصل على $f(x)=f(u-v)=f(u)-f(v)$. وإذن ، ينتج القانون (٢١ - ٦) من الواضح أن هذه العلاقة تضمن الاتصال للدالة f ، لأننا يمكننا جعل $\|f(u)-f(v)\|<\varepsilon$ بأخذ $\|u-v\|<\varepsilon/A$ إذا كانت $A>0$.

ويمكن كتمرين توضيح أنه إذا كانت f و g دالتين خطيتين فى $\boldsymbol{R}^p$ إلى $\boldsymbol{R}^q$ ، فإن $f+g$ هى دالة خطية فى $\boldsymbol{R}^p$ إلى $\boldsymbol{R}^q$. بالمثل ، إذا كانت $c \in \boldsymbol{R}$ ، فإن cf تكون دالة خطية . نترك للقارئ توضيح أن المجموعة $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^p, \boldsymbol{R}^q)$ لكل الدوال الخطية فى $\boldsymbol{R}^p$

إلى R^q هى فراغ متجه تحت هذه العمليات المتجهة . وسنبين فى التمرينات كيفية تعريف عمود على هذا الفراغ المتجه .

تمرينــات :

٢١ – (أ) وضح أن $f: R^p \to R^q$ دالة خطية إذا وإذا فقط $f(ax) = af(x)$ ، $f(x+y) = f(x) + f(y)$ لكل $a \in R$ ولكل $x, y \in R^p$.

٢١ – (ب) إذا كانت f دالة خطية للفراغ R^p إلى R^q ، وضح أن الأعمدة للمصفوفة الممثلة (٢١ – ٤) للدالة f تحدد العناصر فى R^q التى ترسم إليها العناصر

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_p = (0, 0, \dots, 1)$$

من الفراغ R^p بالدالة f .

٢١ –(ج) بفرض f دالة خطية للفراغ R^2 إلى الفراغ R^3 والتى تنقل العناصر $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ للفراغ R^2 إلى المتجهات $f(e_1) = (2, 1, 0), f(e_2) = (1, 0, -1)$ للفراغ R^3 . اعط تمثيلا بالمصفوفة للدالة f . ما هى المتجهات فى R^3 التى تكون الصور تحت f للعناصر $(1, 3)$ و $(1, 1)$ و $(2, 0)$ ؟

٢١ – (د) إذا كانت f تدل على الدالة الخطية فى تمرين ٢١ – ج ، اثبت أنه ليس كل متجه فى R^3 يكون صورة تحت الدالة f لمتجه فى R^2 .

٢١ – (هـ) بفرض أن g أى دالة خطية من R^2 إلى R^3 . وضح أنه ليس كل عنصر من R^3 هى الصورة تحت g لمتجه فى R^2 .

٢١ – (و) بفرض h أى دالة خطية من R^3 إلى R^2 . وضح أنه يوجد متجهات ليست أصفاراً فى R^3 التى ترسم إلى متجه صفر فى R^2 بواسطة h .

٢١ – (ز) بفرض أن f دالة خطية من R^2 إلى R^2 وبفرض أن التمثيل بمصفوفة للدالة f هو

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

وضح أن $f(x) \neq 0$ عند $x \neq 0$ إذا وإذا فقط $\Delta = ad - bc \neq 0$

٢١ – (ح) بفرض أن الدالة f هى نفسها فى تمرين ٢١ – ز السابق . وضح أن f ترسم R^2 إلى R^2 إذا وإذا فقط $\Delta = ad - bc \neq 0$. وضح أنه إذا كانت $\Delta \neq 0$ فإن الدالة العكسية f^{-1} تكون خطية وتمثل بالمصفوفة

$$\begin{bmatrix} d/\Delta & -b/\Delta \\ -c/\Delta & a/\Delta \end{bmatrix}$$

٢١ – (ط) بفرض g دالة خطية من R^p إلى R^q . وضح أن g تكون تناظراً أحادياً إذا وإذا فقط كانت $g(x)=0$ تضمن أن $x = 0$.

٢١ – (ى) إذا كانت h دالة خطية وكانت تناظراً أحاديا من R^p إلى R^p . وضح أن الدالة المكسية h^{-1} دالة خطية فوقية من R^p إلى R^p .

٢١ – (ك) وضح أن حاصل جمع وتحصيل دالتين خطيتين يكونان دالتين خطيتين .

٢١ – (ل) إذا كانت f راسماً خطياً من R^p إلى R^q ، وعرف

$$\|f\|_{pq} = \sup\{\|f(x)\| : x \in R^p, \|x\| \le 1\}$$

وضح أن الراسم $f \mapsto \|f\|_{pq}$ يعرف عموداً فى فراغ المتجه $\mathscr{L}(R^p, R^q)$ لكل الدوال الخطية فى R^p إلى R^q . وضح أن $\|f(x)\| \le \|f\|_{pq}\,\|x\|$ لكل $x \in R^p$

٢١ – (م) إذا كانت f راسماً خطياً من R^p إلى R^q ، عرف

$$M(f) = \inf\{M > 0 : \|f(x)\| \le M\,\|x\|, x \in R^p\}$$

وضح أن $M(f) = \|f\|_{pq}$

٢١ – (ن) إذا كانت f ، g فى $\mathscr{L}(R^p, R^p)$ وضح أن $f \circ g$ تكون أيضاً فى $\mathscr{L}(R^p, R^p)$ وأن $\|f\circ g\|_{pp} \le \|f\|_{pp}\,\|g\|_{pp}$. وضح أن المتباينة يمكن أن تكون صحيحة ودقيقة لدوال معينة من f ، g .

٢١ – (س) اعط مثالا لراسم خطى F فى $\mathscr{L}(R^p, R^q)$ ممثلا بمصفوفة $[\,c_{ij}\,]$ حيث نجد

$$\|f\|_{pq} < \left\{\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} c_{ij}^2\right\}^{1/2}$$

٢١ – (ع) إذا كانت (٢١ – ٤) تعطى المصفوفة الممثلة للدالة f . وضح أن $|c_{ij}| \le \|f\|_{pq}$ لكل i, j

الباب الثانى والعشرون — خواص كروية لدوال متصلة :

اعتبرنا فى باب ٢٠ الاتصال « المحلى » ، أو بمعنى آخر كنا مهتمين بالاتصال عند نقطة . فى هذا الباب سوف نهتم بإيجاد بعض خواص عميقة للدوال المتصلة . هنا سوف تختص بالاتصال « الكروى » بمعنى أننا سوف نفترض أن الدوال متصلة عند كل نقطة من نطاقها .

مالم توجد إشارة خاصة خلاف ذلك ، ستدل f إلى دالة نطاقها $D(f)$ محتوية فى R^p ومداها فى R^q . تتذكر أنه إذا كانت B فئة جزئية المدى فى الفراغ R^q ، فإن الصورة المكسية للفئة الجزئية B تحت f هى الفئة

$$f^{-1}(B)=\{x\in D(f):f(x)\in B\}$$

لاحظ أن $f^{-1}(B)$ تكون تلقائياً فئة جزئية من النطاق $D(f)$ حتى إذا كانت B ليست بالضرورة فئة جزئية من مدى الدالة f .

فى مناهج التوبولوجيا ، حيث أحدها يكون أكثر اختصاصاً بالاتصال الكروى عن الاتصال المحلى تستخدم النتيجة الآتية غالباً كتعريف لاتصال كروى ويتضح أهميتها حالا .

٢٢ – ١ نظرية الاتصال الكروى . النصوص الآتية تكون متكافئة .

(أ) f تكون متصلة فى نطاقها $D(f)$.

(ب) إذا كانت G أى فئة مفتوحة فى R^q ، حينئذ توجد فئة مفتوحة G_1 فى R^p بحيث أن $G_1\cap D(f)=f^{-1}(G)$.

(جـ) إذا كانت H أى فئة مغلقة فى R^q ، حينئذ توجد فئة مغلقة H_1 فى R^p بحيث أن $H_1\cap D(f)=f^{-1}(H)$

البرهان . أولا ، سنفترض أن (أ) تظل قائمة ونفرض أن G فئة جزئية مفتوحة فى الفراغ R^q . إذا كانت a تنتمى إلى $f^{-1}(G)$ ، حينئذ بما أن G جوار الدالة $f(a)$ فينتج من اتصال الدالة f عند a أنه يوجد فئة مفتوحة $U(a)$ بحيث أنه إذا كانت $x\in D(f)\cap U(a)$ فإن $f(x)\in G$. نختار $U(a)$ لـكل a فى $f^{-1}(G)$ ونفرض أن G_1 هى الاتحاد للفئات $U(a)$. من نظرية ٩ – ٣ (ج) ، نجد أن الفئة G_1 مفتوحة ومن الواضح أن $G_1\cap D(f)=f^{-1}(G)$. إذن (أ) تدل على (ب) .

الآن سنوضح أن (ب) تدل على (أ) . إذا كانت a نقطة اختيارية فى النطاق $D(f)$ ، وكانت G جواراً مفتوحاً للدالة $f(a)$ ، فإن شرط (ب) يدل على أنه يوجد فئة مفتوحة G_1 فى R^p بحيث أن $G_1\cap D(f)=f^{-1}(G)$ بما أن $f(a)\in G$ فينتج أن $a\in G_1$ وإذن G_1 جوار النقطة a . إذا كانت $x\in G_1\cap D(f)$ فإن $f(x)\in G$ وإذن f تكون متصلة عند النقطة a هذا يبرهن أن شرط (ب) يدل على (أ) .

الآن نبرهن على تكافؤ الشرطين (ب) ، (ج) . أولا نلاحظ أنه إذا كانت B أى فئة جزئية من الفراغ R^q وإذا كانت $C=R^q\setminus B$ ، فنجد أن $f^{-1}(B)\cap f^{-1}(C)=\emptyset$

$$D(f)=f^{-1}(B)\cup f^{-1}(C) \tag{22.1}$$

إذا كانت B_1 فئة جزئية من الفراغ R^p بحيث أن $B_1\cap D(f)=f^{-1}(B)$ ، $C_1=R^p\setminus B_1$ فإن $C_1\cap f^{-1}(B)=\emptyset$ ،

$$(22.2) \quad D(f) = (B_1 \cap D(f)) \cup (C_1 \cap D(f)) = f^{-1}(B) \cup (C_1 \cap D(f))$$

القانونين (٢٢-١) ، (٢٢-٢) يكونان تمثيلين للنطاق $D(f)$ كالاتحاد للدالة العكسية $f^{-1}(B)$ مع فئة أخرى التي لاتوجد فقط مشتركة معها . وإذن نحصل على $C_1 \cap D(f) = f^{-1}(C)$

نفرض أن (ب) تظل قائمة وأن H مغلقة فى R^q استخدم البرهان المنتهى حالا فى الحالة التى عندها $B = R^q \setminus H$ ، $C = H$. وإذن B ، B_1 فئتان مفتوحتان فى R^q ، R^p ، على الترتيب ، لذلك تكون $C_1 = R^p \setminus B_1$ مغلقة فى R^p . هذا يوضح أن (ب) تدل على (ج) .

لتوضيح أن (ج) تدل على (ب) ، استخدم المناقشة السابقة عند $B = R^q \setminus G$ حيث G فئة مفتوحة فى R^q .

فى الحالة التى فيها $D(f) = R^p$ ، تصير النتيجة السابقة بسيطة لدرجة ما .

٢٢ - ٢ نتيجة . نفرض أن f معرفة فى كل الفراغ R^p ومداها فى R^q . فإن النصوص الآتية تكون متكافئة :

(أ) f تكون متصلة فى R^p .

(ب) إذا كانت G مفتوحة فى R^q ، فإن $f^{-1}(G)$ تكون مفتوحة فى R^p

(ج) إذا كانت H مغلقة فى R^q ، فإن $f^{-1}(H)$ تكون مغلقة فى R^p .

يجب أن نؤكد أن نظرية الاتصال الكروى (٢٢ - ١) لم تذكر أنه إذا كانت الدالة f متصلة وإذا كانت G فئة مفتوحة فى R^p ، فإن الصورة المباشرة $f(G) = \{f(x) : x \in G\}$ تكون مفتوحة فى R^q . فى الحالة العامة ، لا تحتاج دالة متصلة إلى إرسال فئات مفتوحة إلى فئات مفتوحة أو فئات مغلقة إلى فئات مغلقة . مثال ذلك ، الدالة f فى R إلى R ، المعرفة بأنها

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

دالة متصلة فى R [فى الحقيقة ، قد لوحظ فى مثالى ٢٠-٥ (أ) ، (ج) أن الدالتين $f_1(x) = 1$ ، $f_2(x) = x^2$ عند $x \in R$ متصلتان عند كل نقطة .

وينتج من نظرية ١٥ - ٦ ، أن

$$f_3(x) = 1 + x^2, \qquad x \in R$$

تكون متصلة عند كل نقطة وبما أن f_3 لا تتلاشى أبدا ، فإن النظرية نفسها تدل على أن الدالة f المعطاة أعلاه تكون متصلة فى R]. إذا كانت G فئة مفتوحة $G = (-1, 1)$ ، فإن $f(G) = (\frac{1}{2}, 1]$ ، وهى ليست مفتوحة فى R . بالمثل ، إذا كانت H هى الفئة المغلقة

$H=\{x \in \boldsymbol{R} : x \geq 1\}$ فإن $f(H)=(0,\frac{1}{2}]$ ، وهى ليست مغلقة فى $\boldsymbol{R}$. بالمثل ، الدالة f ترسم الفئة $\boldsymbol{R}$ ، التى تكون إما مفتوحة أو مغلقة فى $\boldsymbol{R}$ ، إلى الفئة $f(\boldsymbol{R})=(0,1]$ ، التى ليست مفتوحة وليست مغلقة فى $\boldsymbol{R}$.

المغزى للملاحظات السابقة هو أن خاصية الفئة من حيث كونها مفتوحة أو مغلقة لا تظل قائمة ضرورياً تحت راسم لدالة متصلة . لكن ، توجد خواص هامة لفئة تحتفظ بها الفئة تحت راسم متصل . مثال ذلك ، سنوضح الآن أن خواص الارتباط والدمج للفئات لها هذه الميزة .

حفظ الاتصال او الارتباط :

نتذكر من تعريف ١٢ - ١ أن الفئة H فى $\boldsymbol{R}^p$ تكون غير مرتبطة إذا كان يوجد فئتان مفتوحتان B و A فى الفراغ $\boldsymbol{R}^p$ بحيث أن $A \cap H$ ، $B \cap H$ فئتان غير متصلتين وغير خاليتين واتحادهما هو H . فئة تكون مرتبطة إذا لم تكن غير متصلة .

٢٢ - ٣ حفظ الارتباط . إذا كانت $H \subseteq D(f)$ مرتبطة فى $\boldsymbol{R}^p$ وكانت الدالة f متصلة فى H فإن $f(H)$ تكون مرتبطة فى $\boldsymbol{R}^q$.

البرهان . نفرض أن h هى تقييد الدالة f إلى الفئة H بحيث أن $D(h)=H$ و $h(x)=f(x)$ لكل $x \in H$. نلاحظ أن $f(H)=h(H)$ وأن h متصلة فى H .

إذا كانت $f(H)=h(H)$ ليست مرتبطة فى $\boldsymbol{R}^q$ ، فإنه يوجد فئتان مفتوحتان B و A فى $\boldsymbol{R}^q$ بحيث أن $A \cap h(H)$ ، $B \cap h(H)$ فئتان غير متصلتين وغير خاليتين واتحادهما هو $h(H)$. ومن نظرية الاتصال الكروى ٢٢ - ١ ، نجد أنه يوجد فئتان مفتوحتان B_1 و A_1 فى $\boldsymbol{R}^p$ بحيث أن

$$A_1 \cap H = h^{-1}(A), \qquad B_1 \cap H = h^{-1}(B)$$

هذه التقاطعات ليست خالية وعدم اتصالها ينتج من عدم اتصال الفئات $A \cap h(H)$ ، $B \cap h(H)$. الفرض بأن اتحاد الفئات $A \cap h(H)$ ، $B \cap h(H)$ هو $h(H)$ يدل على أن اتحاد $A_1 \cap H$ ، $B_1 \cap H$ هو H . لذلك ، يدل عدم ارتباط $f(H)=h(H)$ على عدم ارتباط H . وهو المطلوب إثباته

الكلمة الفعلية « متصلة » تقترح أنه لا يوجد « انفصالات » مفاجئة فى الرسم التخطيطى للدالة ، ومن ثم لا تكون النتيجة الآتية بأى طريقة غير متوقعة ، لكن ، مطلوب من القارئ أن يحاول إيجاد برهان مختلف لهذه النظرية وسوف يصل إلى تقدير عمقها .

٢٢ – ٤ نظرية القيمة المتوسطة لبولتزانو . نفرض أن $H \subseteq D(f)$ فئة جزئية مرتبطة من الفراغ R^p وبفرض أن f متصلة فى H وأن لها قيما فى الفراغ R . إذا كانت k أى عدد حقيق يحق

$$\inf\{f(x) : x \in H\} < k < \sup\{f(x) : x \in H\}$$

فإنه توجد على الأقل نقطة واحدة من H ، حيث تأخذ f عندها القيمة k .

البرهان . إذا كانت $k \notin f(H)$ ، فإن الفئتين $A = \{t \in R : t < k\}$ ، $B = \{t \in R : t > k\}$ تكونان قطعاً للدالة $f(H)$ مما يخالف النظرية السابقة وهو المطلوب إثباته

حفظ الادماج (الدموج) :

سنعرض الآن أن الخاصية الهامة للإدماج يمكن حفظها تحت راسم متصل . سنتذكر أنه نتيجة لنظرية هاين – بوريل الهامة ١١ – ٣ تكون فئة جزئية K من الفراغ R^p مدمجة .

إذا وإذا فقط كانت مغلقة ومحدودة فى R^p . أى أن النتيجة الآتية يمكن أن تكون صياغتها بقولنا أنه إذا كانت K مغلقة ومحدودة فى R^p وإذا كانت f متصلة فى K ومداها فى R^q ، فان $f(K)$ تكون مغلقة ومحدودة فى R^q .

٢٢ – ٥ حفظ الإدماج (الدموج) . إذا كانت $K \subseteq D(f)$ مدمجة و f متصلة فى K ، فإن $f(K)$ تكون مدمجة .

البرهان الأول . نفرض أن K متغلقة ومحدودة فى الفراغ R^p وسنوضح أن $f(K)$ مغلقة ومحدودة فى الفراغ R^q. إذا كانت $f(K)$ ليست محدودة ، لكل $n \in N$ فإنه توجد نقطة x_n فى K حيث $\|f(x_n)\| \geq n$. بما أن K محدودة فإن المتتابعة $X = (x_n)$ محدودة ، ومن ثم ينتج من نظرية بولتزانو فيرشتراس ١٦ ـ ٤ أنه يوجد متتابعة جزئية من X وتتقارب إلى عنصر x . وبما أن $x_n \in K$ حيث $n \in N$ فان النقطة x تنتمى إلى الفئة المغلقة K . ومن ثم تكون f متصلة عند x ، وإذن f تكون محدودة بالمقدار $\|f(x)\| + 1$ فى جوار x . بما أن هذا يخالف الفرض بأن $\|f(x_n)\| \geq n$ فإذن الفئة $f(K)$ محدودة .

سنبرهن أن $f(K)$ مغلقة بتوضيح أن أى نقطة تجميع y من $f(K)$ يجب أن تكون محتوية فى هذه الفئة . فى الحقيقة ، إذا كانت n عددا طبيعياً ، فإنه توجد نقطة z_n فى K بحيث أن $\|f(z_n) - y\| < 1/n$. ومن نظرية بولتزانو فيرشتراس ١٦ ـ ٤ ، نجد أن المتتابعة

$Z=(z_n)$ لها متابعة جزئية $Z'=(z_{n(k)})$ بحيث تتقارب إلى عنصر z . بما أن K مغلقة . فينتج أن $z \in K$ وتكون الدالة f متصلة عند z لذلك

$$f(z) = \lim_k (f(z_{n(k)})) = y$$

مما يثبت أن y تنتمى إلى $f(K)$. ومن ثم $f(K)$ مغلقة .

البرهان الثانى . بتقييد f إلى K يمكننا فرض أن $D(f) = K$. نفترض الآن أن $\mathscr{G} = \{G_\alpha\}$ هى عائلة من فئات مفتوحة فى R^q التى اتحادها يحتوى $f(K)$. ومن نظرية الاتصال الكروى ٢٢ - ١ نجد أنه يوجد لكل فئة G_α فى $\mathscr{G}$ فئة جزئية مفتوحة C_α من R^p بحيث أن $C_\alpha \cap D = f^{-1}(G_\alpha)$. العائلة $\mathscr{C} = \{C_\alpha\}$ تتكون من فئات جزئية مفتوحة من R^p ، نحن نطالب بأن الاتحاد لهذه الفئات يحتوى K . لأنه ، إذا كانت $x \in K$ ، فإن $f(x)$ تكون محتوية فى $f(K)$ ، ومن ثم تنتمى $f(x)$ إلى فئة ما G_α ومن التركيب تنتمى x إلى الفئة المناظرة C_α . بما أن K مدمجة ، فتكون محتوية فى الاتحاد لعدد محدود من الفئات فى $\mathscr{L}$ وتكون صورتها $f(K)$ محتوية فى الاتحاد لعدد محدود من الفئات المناظرة فى $\mathscr{C}$. وبما أن هذا صحيح لعائلة اختيارية $\mathscr{G}$ من فئات مفتوحة تغطى $f(K)$ فتكون الفئة $f(K)$ مدمجة فى R^q .

إذا كان المدى للدالة هو R فإنه يمكن أحيانا إعادة صياغة النظرية الآتية بقولنا إن دالة متصلة ذات قيم حقيقية فى فئة مدمجة تدرك قيمتها العظمى وقيمتها الصغرى .

٢٢ - ٦ نظرية القيمة العظمى والصغرى . نفرض أن $K \subseteq D(f)$ مدمجة فى R^p ونفرض أن f دالة متصلة ذات قيمة حقيقية . إذن يوجد نقط x^* ، x_* فى K بحيث أن

$$f(x^*) = \sup\{f(x) : x \in K\}, \qquad f(x_*) = \inf\{f(x) : x \in K\}$$

البرهان الأول . بما أن K مدمجة فى R^p ، فينتج من النظرية السابقة أن $f(K)$ محدودة فى R . نفرض أن $M = \sup f(K)$ ونفرض أن (x_n) متابعة فى K بحيث أن

$$f(x_n) \geq M - 1/n, \qquad n \in N$$

ينتج من نظرية بولزانو فيرشتراس ١٦ - ٤ ، أن تقترب متابعة جزئية ما $(x_{n(k)})$ إلى نهاية $x^* \in K$. بما أن f متصلة عند x^* ، فيجب أن يكون $f(x^*) = \lim(f(x_{n(k)})) = M$ برهان وجود x_* مشابه تماما .

البرهان الثانى . بتقييد f إلى K ، يمكننا فرض أن $D(f) = K$. نضع $M = \sup f(K)$. إذن لكل $n \in N$ ، نفرض $G_n = \{u \in R : u < M - 1/n\}$ بما أن

G_n مفتوحة ، فينتج من نظرية الاتصال الكروى ٢٢ – ١ أنه يوجد فئة مفتوحة C_n فى R^p بحيث أن

$$C_n \cap K = \{x \in K : f(x) < M - 1/n\}$$

الآن إذا لم نصل إلى القيمة M ، فان اتحاد العائلة $\mathscr{C} = \{C_n\}$ لفئات مفتوحة تحتوى جميع الفئة K . حيث أن K مدمجة والعائلة $\{C_n \cap K\}$ متزايدة ، فإنه يوجد $r \in N$ بحيث أن $K \subseteq C_r$. لكن حينئذ نحصل على $f(x) < M - 1/r$ لكل $x \in K$ ، ما يخالف الحقيقة التى تقول أن $M = \sup f(K)$ وهو المطلوب إثباته

إذا كانت f لها مدى فى R^q حيث $q > 1$ ، فإن النتيجة الآتية تكون أحيانا مفيدة .

٢٢ – ٧ نتيجة . نفرض أن f دالة فى $D(f) \subseteq R^p$ إلى R^q ونفرض أن $K \subseteq D(f)$ مدمجة . إذا كانت f متصلة فى K ، حينئذ توجد فقط x^* ، x_* فى K بحيث أن

$$\|f(x^*)\| = \sup\{\|f(x)\| : x \in K\}, \qquad \|f(x_*)\| = \inf\{\|f(x)\| : x \in K\}$$

ينتج من نظرية ٢١ – ٢ أنه إذا كانت $f : R^p \to R^q$ خطية ، فإنه يوجد مقدار ثابت $M > 0$ بحيث أن $\|f(x)\| \leq M\,\|x\|$ لجميع $x \in R^p$. لكن ليس صحيحاً دائماً أنه يوجد مقدار ثابت $m > 0$ بحيث أن $\|f(x)\| \geq m\,\|x\|$ لكل $x \in R^p$. الآن سنوضح أن هذه هى الحالة فقط وإذا فقط كانت f دالة خطية ادخالية .

٢٢ – ٨ نتيجة . نفرض أن $f : R^p \to R^q$ دالة خطية . إذن f تكون دالة إدخالية أو دالة ولوجية إذا وإذا فقط كان يوجد $m > 0$ بحيث أن $\|f(x)\| \geq m\,\|x\|$ لكل $x \in R^p$.

البرهان . نفرض أن x دالة إدخالية ، ونفرض أن $S = \{x \in R^p : \|x\| = 1\}$ وحدة الكرة المدمجة فى R^p .

يوجد من نتيجة ٢٢–٧ $x_* \in S$ بحيث أن $\|f(x_*)\| = m = \inf\{\|f(x)\| : x \in S\}$ بما أن f ولوجية فان $m = \|f(x_*)\| > 0$. ومن ثم $\|f(x)\| \geq m > 0$ لكل $x \in S$. الآن ، إذا كانت $u \in R^p,\ u \neq 0$ ، فإن $u/\|u\|$ تنتمى إلى S وينتج من كون f خطية أن

$$\frac{1}{\|u\|}\|f(u)\| = \left\|f\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\right\| \geq m$$

ومنها ينتج أن $\|f(u)\| \geq m\|u\|$ لجميع $u \in R^p$ (لأن النتيجة بسيطة عند $u = 0$) .

وبالعكس ، نفرض أن $\|f(x)\| \geq m\,\|x\|$ لكل $x \in R^p$. إذا كانت $f(x_1) = f(x_2)$ ، فنجد أن

$$0=\|f(x_1)-f(x_2)\|=\|f(x_1-x_2)\|\geq m\,\|x_1-x_2\|$$

التى تدل على أن $x_1 = x_2$. لذلك تكون الدالة f ادخالية وهو المطلوب إثباته .

إحدى النتائج المدهشة لنظرية ٢٢ – ٥ هى أنه إذا كانت f دالة متصلة وإدخالية فى نطاق مدمج فإن الدالة العكسية f^{-1} تكون متصلة تلقائيا .

٢٢ – ٩ اتصال الدالة العكسية . نفرض أن K فئة جزئية مدمجة من R^p .

ونفرض أن f دالة متصلة إدخالية بنطاق K وبمدى $f(K)$ فى R^q . حينئذ تكون الدالة العكسية متصلة بنطاق $f(K)$ ومدى K .

البرهان . نلاحظ أنه حيث K مدمجة ، فإن نظرية ٢٢ – ٥ تدل على أن $f(K)$ مدمجة ومن ثم مغلقة . بما أن f إدخالية من الفرض ، فإن الدالة العكسية $g = f^{-1}$ تكون معرفة . افرض أن H أى فئة مغلقة فى R^p واعتبر $H \cap K$ ، حيث أن هذه الفئة محدودة ومغلقة فتؤكد نظرية ٩ – ٦ (ج) ، ونظرية بوريل هاين أن $H \cap K$ فئة جزئية مدمجة من R^p . فستنتج من نظرية ٢٢ – ٥ ، أن $H_1 = f(H \cap K)$ مدمجة ومن ثم فهى مغلقة فى R^q . الآن إذا كانت $g = f^{-1}$ ، فإن

$$H_1 = f(H \cap K) = g^{-1}(H)$$

بما أن H_1 فئة جزئية من $f(K) = D(g)$ ، فيمكننا كتابة المعادلة الأخيرة فى الصورة

$$H_1 \cap D(g) = g^{-1}(H)$$

من نظرية الاتصال الكروى ٢٢ – ١ (ج) ، نستنتج أن $g = f^{-1}$ تكون متصلة .
وهو المطلوب إثباته.

سنختم هذا الباب بتقديم بعض المدلولات التى ستكون مناسبة .

٢٢ – ١٠ تعريف . إذا كانت $D \subseteq R^p$ ، فإن المجموعة لكل الدوال المتصلة فى D إلى R^q يرمز لها بالرمز $C_{pq}(D)$. المجموعة لكل الدوال المحدودة المتصلة فى D إلى R^q يرمز لها بالرمز $BC_{pq}(D)$. إذا كانت p ، q معروفتين بالفهم ، فسنرمز لهاتين المجموعتين فقط بالرمزين $C(D)$ ، $BC(D)$.

الجزء الأول من النتيجة الآتية هى نتيجة من نظرية ٢٠ – ٦ . والجزء الثانى يبرهن بنفس طريقة برهان مفترض ١٧ – ٨ .

٢٢ – ١١ نظرية . (أ) الفراغات $C_{pq}(D)$ ، $BC_{pq}(D)$ هى فراغات متجهة تحت العمليات المتجهة .

$$(cf)(x)=cf(x) \qquad (f+g)(x)=f(x)+g(x),$$ عند $x \in D$.

(أ) الفراغ $BC_{pq}(D)$ هو فراغ عمودى تحت العمود .

$$\|f\|_D = \sup \{\|f(x)\| : x \in D\}$$

بالطبع ، فى الحالة الخاصة التى فيها D فئة جزئية مدمجة من R^p ، فإن $C_{pq}(D)=BC_{pq}(D)$

تمرينـــات :

٢٢ – (أ) فسر نظرية الاتصال الكروى ٢٢–١ للدالتين ذات القيمة الحقيقية $f(x)=x^2$ ، $g(x)=1/x, \ x\neq 0$. خذ فئات مختلفة مفتوحة ومغلقة وحدد صورها المكسية تحت f و g.

٢٢ – (ب) إذا كانت $H: R \to R$ معرفة بأنها

$$h(x)=1, \qquad 0 \le x \le 1,$$
$$=0, \qquad \text{خلاف ذلك}$$

أعرض فئة مفتوحة G بحيث أن $h^{-1}(G)$ ليست مفتوحة فى R ، واعرض فئة مغلقة F بحيث أن $h^{-1}(F)$ ليست مغلقة فى R .

٢٢ – (ج) إذا كانت f محدودة ومتصلة فى R^p إلى R وإذا كانت $f(x_0)>0$ ، وضح أن f موجبة مضبوطة فى جوار ما النقطة x_0 . هل نفس الاستنتاج يظل قائماً إذا كانت f متصلة فقط عند x_0 ؟

٢٢ – (د) إذا كانت $p: R^2 \to R$ كثيرة الحدود ، وكانت $c \in R$ ، وضح أن الفئة $\{(x, y) : p(x, y) < c\}$ تكون مفتوحة فى R^2 .

٢٢ – (هـ) إذا كانت $f: R^p \to R$ متصلة فى R^p ، $\alpha < \beta$ ، أثبت أن الفئة $\{x \in R^p : \alpha \le f(x) \le \beta\}$ تكون مغلقة فى R^p .

٢٢ – (و) تكون فئة جزئية $D \subseteq R^p$ غير مرتبطة إذا وإذا فقط كان يوجد دالة متصلة $f: D \to R$ بحيث أن $f(D)=\{0, 1\}$.

٢٢ – (ز) بفرض f متصلة فى R^2 إلى R^q . عرف الدالتين g_2 و g_1 فى R إلى R^q بالآتى.

$$g_1(t)=f(t, 0), \qquad g_2(t)=f(0, t)$$

أثبت أن g_2 و g_1 متصلتان .

٢٢ – (ح) بفرض أن g_2 و g_1 و f مرتبطة بالقوانين المذكورة فى التمرين السابق . أثبت أنه من خاصية اتصال g_1 ، g_2 عند $t=0$ ، لا يمكن البرهنة على اتصال f عند $(0, 0)$.

٢٢ – (ط) اعط مثالا لدالة فى $I = [0, 1]$ إلى R بحيث تكون غير محدودة .

٢٢ – (ى) اعط مثالا لدالة محدودة f فى I إلى R والتى لا تتناول أى العددين $\sup\{f(x) : x \in I\}$ أو $\inf\{f(x) : x \in I\}$.

٢٢ (ك) اعط مثالا لدالة g متصلة ومحدودة فى R إلى R والتى لا تستطيع أن تقبل أى العددين $\sup\{g(x):x \in R\}$ أو $\inf\{g(x):x \in R\}$.

٢٢ – (ل) وضح أن لكل كثيرة الحدود ذات درجة فردية ومعاملات حقيقية جذرا حقيقيا . وضح أن كثيرة الحدود $p(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ لها على الأقل جذران حقيقيان .

٢٢ – (م) إذا كانت $c > 0$ و n عددا طبيعياً ، فإنه يوجد عدد موجب وحيد b بحيث أن $b^n = c$

٢٢ – (ن) نفرض أن f دالة متصلة فى I إلى R حيث $f(0) < 1$ ، $f(1) > 0$ إذا كانت $N = \{x \in I : f(x) < 0\}$ وإذا كانت $c = \sup N$ ، فأثبت أن $f(c) = 0$

٢٢ – (س) نفرض أن f دالة متصلة فى R إلى R والتى تتزايد بدقة (بمعنى أنه إذا كانت $x' < x''$ فإن $(f(x') < f(x''))$. أثبت أن f دالة إدخالية وأن دالتها العكسية f^{-1} تكون متصلة ومتزايدة مضبوطة .

٢٢ – (ع) بفرض f دالة متصلة فى R إلى R والتى لاتستطيع أخذ أى من قيمتها مرتين ، فهل صحيح أن f يجب أن تكون متزايدة بدقة أو متناقصة مضبوطة .

٢٢ – (ف) بفرض g هى دالة فى I إلى R ، أثبت أنه إذا كانت g تستطيع أخذ كل من قيمها بالضبط مرتين ، فإن g لا يمكن أن تكون متصلة عند كل نقطة من I .

٢٢ – (ص) بفرض f دالة متصلة فى الفترة $[0, 2\pi]$ إلى R وبحيث أن $f(0) = f(2\pi)$. أثبت أنه يوجد نقطة c فى هذه الفترة بحيث أن $f(c) = f(c + \pi)$ (ارشاد : اعتبر $g(x) = f(x) - f(x + \pi)$) . استنتج أنه يوجد ، عند أى وقت ، نقط فى الجهة المقابلة من الكرة الأرضية على خط الاستواء التى لها نفس درجة الحرارة .

٢٢ – (ق) إذا كانت $\varphi : [0, 2\pi) \to R^2$ معرفة بأنها $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ عند $t \in [0, 2\pi)$. حينئذ φ تكون راسما متصلا إدخاليا فى الفترة $[0, 2\pi)$ إلى دائرة الوحدة $S = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. أثبت أن $\varphi^{-1} : S \to [0, 2\pi)$ لا يمكن أن تكون متصلة (نستنتج أن نظرية ٢٢ – ٩ ربما تفشل إذا كان النطاق ليس مدمجا) .

مشروع :

٢٢ – α الغرض من هذا المشروع هو توضيح أن كثيرا من النتائج فى باب ٢٢ تظل صحيحة للدوال المتصلة التى نطاقها ومداها تكون محتوية فى فراغات مترية . (لإثبات هذه النتائج

ربما نلاحظ أنه إما أن التعاريف السابقة يمكن تطبيقها فى الفراغات المترية أو يمكن صياغتها ثانيا لعمل هذا) .

(أ) وضح أن نظرية ٢٠ — ٢ يمكن صياغتها لدالة من فراغ واحد مترى إلى آخر .

(ب) وضح أن نظرية الاتصال الكروى ٢٢ — ١ تظل صحيحة بدون تغيير .

(ج) أثبت أن خاصية حفظ الارتباط أى نظرية ٢٢ — ٣ تظل صحيحة .

(د) أثبت أن حفظ الإدماج أى نظرية ٢٢ — ٥ تظل قائمة .

الباب الثالث والعشرون — اتصال منتظم ونقط ثابتة :

بفرض أن f معرفة فى فئة جزئية $D(f)$ من R^p إلى R^q . فقد لوحظ سابقاً أن النصين الآتيين متكافئان :

(i) f تكون متصلة عند كل نقطة فى $D(f)$.

(ii) بأخذ $\varepsilon > 0$ ، $u \in D(f)$ ، فإنه يوجد $\delta(\varepsilon, u) > 0$ بحيث أنه إذا كانت x تنتمى إلى $D(f)$ ، $\|x - u\| \leq \delta$ فإن $\|f(x) - f(u)\| \leq \varepsilon$.

الشىء الملاحظ هنا هو أن δ تعتمد ، بوجه عام ، على كلا من ε ، u أى أن توقف δ على u هو انعكاس الحقيقة التى تقول إن الدالة ربما تغير قيمتها بسرعة بالقرب من نقط معينة وببطء بالقرب من نقط أخرى .

الآن يمكن أن يحدث أن دالة تكون بحيث أن العدد δ يمكن اختياره بحيث لا يعتمد على النقطة u فى $D(f)$ ويعتمد فقط على ε . مثال ذلك ، إذا كانت $f(x) = 2x$ ، فإن

$$|f(x) - f(u)| = 2\,|x - u|$$

وبذلك يمكننا اختيار $\delta(\varepsilon, u) = \varepsilon/2$ لجميع قيم u .

ومن ناحية أخرى ، إذا كانت $g(x) = 1/x$ عند $x > 0$ ، حينئذ .

$$g(x) - g(u) = \frac{u - x}{ux}$$

إذا كانت $0 < \delta < u$ ، $|x - u| \leq \delta$ فسنترك للقارىء توضيح أن

$$|g(x) - g(u)| \leq \frac{\delta}{u(u - \delta)}$$

وأن هذه المتباينة لا يمكن تحسينها ، حيث التساوى فى الحقيقة يظل قائماً عند $x = u - \delta$. إذا أردنا جعل $|g(x) - g(u)| \leq \varepsilon$ فإن أكبر قيمة للعدد δ التى يمكننا اختيارها هى

$$\delta(\varepsilon, u)-\frac{\varepsilon u^2}{1+\varepsilon u}$$

أى أنه إذا كان $u > 0$ ، فإن g تكون متصلة عند u لأننا يمكننا اختيار $\delta(\varepsilon, u)=\varepsilon u^2/(1+\varepsilon u)$ وهذه تكون أكبر قيمة يمكننا اختيارها . بما أن

$$\inf\left\{\frac{\varepsilon u^2}{1+\varepsilon u}: u>0\right\}=0$$

فإنه لا يمكننا الحصول على $\delta(\varepsilon, u) > 0$ التى لا تتوقف على اختيار u لجميع النقط $u > 0$.

الآن سوف نقيد g لنطاق أصغر . فى الحقيقة ، نفرض أن $a>0$ ونعرف $h(x)=1/x$ عند $x \geq a$. إذن يوضح التحليل الذى أجريناه حالا . أنه يمكننا استخدام نفس قيمة $\delta(\varepsilon, u)$. لكن ، هذه المرة يكون النطاق أصغر وأن

$$\inf\left\{\frac{\varepsilon u^2}{1+\varepsilon u}: u \geq a\right\}=\frac{\varepsilon a^2}{1+\varepsilon a}>0$$

وإذن إذا عرفنا $\delta(\varepsilon)=\varepsilon a^2/(1+\varepsilon a)$ ، فإنه يمكننا استخدام هذا العدد لجميع النقط $u \geq a$. لكى نساعد فى تثبيت هذه الأفكار ، يجب على القارىء أن يتصفح بسرعة الأمثلة ٢٠ – ٥ وأن يحدد فى أى الأمثلة اختيرت δ بحيث تعتمد على السؤال وفى أى الأمثلة اختيرت δ مستقلة عن النقطة .

بهذه التمهيدات نقدم الآن التعريف الأساسى .

٢٣ – ١ تعريف . نفرض أن f لها نطاق $D(f)$ فى R^p ومدى فى R^q . نقول إن f متصلة بانتظام فى فئة $A \subseteq D(f)$ إذا كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ ، $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث أنه إذا كانت x ، u تنتميان إلى A ، $\|x-u\| \leq \delta(\varepsilon)$ ، فإن

$$\|f(x)-f(u)\| \leq \varepsilon .$$

من الواضح أنه إذا كانت الدالة f متصلة بانتظام فى A ، فإنها تكون متصلة عند كل نقطة من A . لكن ، فى الحالة العامة العكس ليس صحيحاً . من المفيد أن نتذكر ما المقصود بقولنا إن دالة ليست متصلة بانتظام ، لذلك نقرر معيارا مثل هذا تاركين برهانه للقارىء .

٢٣ – ٢ مفترض . شرط ضرورى وكاف لأن تكون الدالة f غير متصلة بانتظام فى $A \subseteq D(f)$ هو أنه يوجد $\varepsilon_0 > 0$ ، ومتتابعتان $X=(x_n), Y=(y_n)$ فى A بحيث أنه إذا كانت $n \in N$ فإن $\|x_n - y_n\| \leq 1/n$ ، $\|f(x_n)-f(y_n)\| > \varepsilon_0$

كتمرين يجب على القارىء أن يستخدم هذا المعيـــار لتوضيح أن $g(x)=1/x$ ليست متصلة بانتظام فى $D(g)=\{x : x>0\}$.

الآن سنقدم نتيجة هامة تؤكد أن أى دالة متصلة تكون تلقائيا متصلة بانتظام فى أى فئة مدمجة فى نطاقها .

٢٣ – ٣ نظرية الاتصال المنتظم . نفرض أن f دالة متصلة بنطاق $D(f)$ فى R^p ومدى فى R^q . إذا كانت $K \subseteq D(f)$ مدمجة ، فإن f تكون متصلة بانتظام فى K .

برهان أول . نفرض أن f ليست متصلة بانتظام فى K حسب مفترض ٢٣ – ٢ ، يوجد $\varepsilon_0 > 0$ ومتتابعتان (x_n) ، (y_n) فى K بحيث أنه إذا كانت $n \in N$ ، فإن

$$\|x_n - y_n\| \leq 1/n, \qquad \|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon_0 \tag{23.1}$$

بما أن K مدمجة فى R^p ، المتتابعة X محدودة ، فينتج من نظرية بولتزانو فيرشتراس ١٦–٤ ، أنه يوجد متتابعة جزئية $(y_{n(k)})$ من (x_n) بحيث تتقارب إلى عنصر z . بما أن K مغلقة ، فإن النهاية z تنتمى لى K ، فتكون الدالة f متصلة عند z . من الواضح أن المتتابعة الجزئية المناظرة $(x_{n(k)})$ من Y تتقارب أيضاً إلى z .

ينتج من نظرية ٢٠ – ٢ (ج) أن كلا المتتابعتين $(f(y_{n(k)}))$ و $(f(x_{n(k)}))$ تتقارب إلى f (g) . لذلك ، إذا كانت k كبيرة كبرا كافياً ، فإننا نحصل على $\|f(x_{n(k)}) - f(y_{n(k)})\| < \varepsilon_0$ لكن هذا يخالف العلاقة الثانيــة فى (٢٣ – ١) .

برهان ثان . (يمكن عطاء برهان قصير بحيث يتوقف على نظرية غطاء لبسيج ١١ – ٥ ، لكن نفضل استخدام تعريف الإدماج) . نفرض أن f دالة متصلة عند كل نقطة للفئة المدمجة K . طبقا لنظرية ٢٠ – ٢ (ب) ، بأخذ $\varepsilon > 0$ و u فى K نجد أنه يوجد عدد $\delta(\frac{1}{2}\varepsilon, u) > 0$ بحيث أنه إذا كانت $x \in K$ و $\|x - u\| < \delta(\frac{1}{2}\varepsilon, u)$ فإن $\|f(x) - f(u)\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ لكل u فى K ، كون الكرة المفتوحة $G(u) = \{x \in R^p : \|x - u\| < \frac{1}{2}\delta(\frac{1}{2}\varepsilon, u)\}$ ، حينئذ الفئة K تكون محتوية بالتأكيد فى اتحاد العائلة $\mathcal{G} = \{G(u) : u \in K\}$ ، وإذن توجد لكل نقطة u فى K كرة مفتوحة $G(u)$ بحيث تحتويها . بما أن K مدمجة ، فتكون محتوية فى الاتحاد لعدد محدود من فئات فى العائلة $\mathcal{G}$ ، مثلا ، $G(u_1), \ldots, G(u_N)$. نعرف الآن .

$$\delta(\varepsilon) = \tfrac{1}{2} \inf \{\delta(\tfrac{1}{2}\varepsilon, u_1), \ldots, \delta(\tfrac{1}{2}\varepsilon, u_N)\}$$

وسوف نوضح أن $\delta(\varepsilon)$ لها الخاصية المطلوبة . لأنه ، بفرض أن u و x تنتميان إلى K وبفرض $\|x - u\| \leq \delta(\varepsilon)$. فنجد أنه يوجد عدد طبيعى k يحقق $1 \leq k \leq N$ وبحيث أن x تنتمى إلى الفئة $G(u_k)$ ، أى أن $\|x - u_k\| < \frac{1}{2}\delta(\frac{1}{2}\varepsilon, u_k)$. بما أن $\delta(\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\delta(\frac{1}{2}\varepsilon, u_k)$ فينتج أن

$$\|u - u_k\| \leq \|u - x\| + \|x - u_k\| < \delta(\tfrac{1}{2}\varepsilon, u_k)$$

لذلك ، نحصل على العلاقات .

$$\|f(x)-f(u_k)\|<\tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad \|f(u)-f(u_k)\|<\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

ومن ثم $\|f(x)-f(u)\| < \varepsilon$. قد وضحنا أنه إذا كانت u و x أى نقطتين من K حيث $\|x-u\| \le \delta(\varepsilon)$ فان $\|f(x)-f(u)\| < \varepsilon$.

فى أبواب قادمة سوف نستفيد من فكرة الاتصال المنتظم فى مناسبات كثيرة ، لذلك لا نعطى أى تطبيقات هنا . لكن ، سنقدم هنا خاصية أخرى هى غالبا متاحة وكافية لضمان اتصال منتظم .

٢٣ - ٤ **تعريف .** إذا كانت الدالة f لها نطاق $D(f)$ محتوى فى R^p ومدى فى R^q ، فنقول إن f تحقق شرط ليبشتز (*) إذا كان يوجد ثابت $A > 0$ بحيث أن

$$\|f(x)-f(u)\| \le A\,\|x-u\| \tag{23.2}$$

لجميع النقط u و x فى $D(f)$. إذا تحققت المتباينة (٢٣ - ٢) بمقدار ثابت $A < 1$ ، فإن الدالة تسمى تقلص أو انكماش .

من الواضح أنه إذا كانت العلاقة (٢٣-٢) ، متحققة ، حينئذ بوضع $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/A$ فيمكن لشخص إثبات الاتصال المنتظم للدالة f فى $D(f)$. لذلك ، إذا كانت الدالة f تحقق شرط ليبشتز ، فإن الدالة تكون متصلة بانتظام . لكن ، العكس ليس صحيحا ، والذى يمكن أن يتضح باعتبار الدالة المعرفة عند $D(f) = I$ بأنها $f(x) = \sqrt{x}$. إذا ظلت (٢٣-٢) قائمة، فينتج أنه ، بوضع $u = 0$ أن فردا يجب أن يحصل على $|f(x)| \le A|x|$ لثابت ما A ، لكن لوحظ حالا أن المتباينة الأخيرة لا تظل صحيحة .

وبتذكر نظرية ٢١ - ٣ ، نرى أن دالة خطية بنطاق R^p ومدى فى R^q تحقق شرط ليبشتز ، وبالإضافة إلى ذلك ، سيلاحظ فى باب ٢٧ أن أى دالة حقيقية بمشتقة محدودة تحقق أيضاً شرط ليبشتز .

نظرية نقطة ثابتة :

إذا كانت f دالة بنطاق $D(f)$ ومدى فى نفس الفراغ R^p ، فيقال لنقطة u فى $D(f)$ أنها نقطة ثابتة للدالة f فى حالة $f(u) = u$. عدد من النتائج الهامة يمكن برهنتها على أساس وجود النقط الثابتة للدوال لذلك يكون من الأهمية وجود بعض معايير إيجابية فى هذا الاتجاه .

(*) رودلف ليبشتز (١٨٣٢ - ١٩٠٣) كان أستاذا فى بون . له مساهمات فى الجبر ، نظرية العدد ، الهندسية التفاضلية والتحليل .

النظرية الأولى التي نذكرها أولية الصفة ولكنها غالبا مفيدة ولها الميزة الهامة وهي أنها تمدنا بتكوين النقطة الثابتة ، وللتبسيط سنقرر أولا النتيجة عندما يكون نطاق الدالة هو الفراغ بأكمله .

٢٣ – ٥ نظرية النقطة الثابتة للانكماشات . نفرض أن f انكماش بنطاق R^p ومدى محتوى في R^p . فتكون f لها نقطة ثابتة وحيدة .

البرهان . سنفترض أنه يوجد مقدار ثابت C حيث $0 < C < 1$ بحيث أن $\| f(x) - f(y) \| \leq C \| x - y \|$ لجميع x, y في R^p . نفرض أن x_1 نقطة اختيارية في R^p وضع $x_2 = f(x_1)$ ، واستنتاجياً ضع

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n \in N \tag{23.3}$$

سنوضح أن المتتابعة (x_n) تقترب إلى نقطة ثابتة وحيدة u من f ونقدر سرعة التقارب .

لإجراء هذا ، نلاحظ أن

$$\|x_3 - x_2\| = \|f(x_2) - f(x_1)\| \leq C \|x_2 - x_1\|$$

واستنتاجياً ، أن

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq C \|x_n - x_{n-1}\| \leq C^{n-1} \|x_2 - x_1\| \tag{23.4}$$

إذا كانت $m \geq n$ ، فإن تكرار استخدام (٢٣ – ٤) يعطي

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\|$$
$$\leq \{C^{m-2} + C^{m-3} + \cdots + C^{n-1}\} \|x_2 - x_1\|$$

ومن ثم ينتج أنه ، عند $m \geq n$ ، فإن

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{C^{n-1}}{1 - C} \|x_2 - x_1\| \tag{23.5}$$

بما أن $0 < C < 1$ ، فإن المتتابعة (C^{n-1}) تقترب إلى صفر . وإذن (x_n) هي متتابعة كوشي . إذا كانت $u = \lim (x_n)$ ، فن الواضح من (٢٣–٣) أن u نقطة ثابتة للدالة f . من (٢٣ – ٥) ونفترض ١٥ – ٨ ، نحصل على التقييم

$$\|u - x_n\| \leq \frac{C^{n-1}}{1 - C} \|x_2 - x_1\| \tag{23.6}$$

لسرعة التقارب

أخيراً ، سنوضح أنه يوجد فقط نقطة ثابتة واحدة للدالة f . وفي الحقيقة ، إذا كانت v و u نقطتين منفصلتين ثابتتين للدالة f ، حينئذ

$$\|u - v\| = \|f(u) - f(v)\| \leq C \|u - v\|$$

بما أن $u \neq v$ ، فينتج $\|u-v\| \neq 0$ ، وإذن هذه العلاقة تدل على أن $1 \leq C$ ، مما يخالف الفرض بأن $C > 1$.

وسيلاحظ أننا فى الحقيقة قد أثبتنا النتيجة الآتية .

٢٣ – ٦ نتيجة . إذا كانت الدالة f انكماشاً بثابت $C < 1$ ، إذا كانت x_1 نقطة اختيارية فى R^p ، وإذا كانت المتتابعة $X = (x_n)$ معرفة بالمعادلة (٢٣ – ٣) فإن X تقترب إلى نقطة ثابتة وحيدة u للدالة f بسرعة تقارب تتحدد من (٢٣ – ٦) .

فى حالة كون الدالة f غير معرفة فى كل من R^p ، فإننا نحتاج لممارسة عناية أكثر بنوع مالكى نضمن أن التعريف المكرر (٢٣ – ٣) للمتتابعة يمكن تنفيذه وإن النقط تظل فى نطاق الدالة f . بالرغم من وجود بعض قوانين أخرى فسنكتفى بالنظرية الآتية :

٢٣ – ٧ نظرية . بفرض أنه إذا كانت f انكماشاً بالثابت C المعرف $D(f) = \{x \in R^p : \|x\| \leq B\}$ وأن $\| f(0) \| \leq B(1-C)$ فإن المتتابعة

$$x_1 = 0, x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$$

تتقارب إلى نقطة ثابتة وحيدة للانكماش f والتى تقع فى الفئة $D(f)$.

البرهان . فى الحقيقة ، إذا كان $x \in D = D(f)$ فإن $\|f(x) - f(0)\| \leq C\|x - 0\| \leq CB$ ، ومن ثم ينتج أن

$$\|f(x)\| \leq \|f(0)\| + CB \leq (1-C)B + CB = B$$

لذلك $f(D) \subseteq D$. أى أن المتتابعة (x_n) يمكن تعريفها وتظل فى D . لذلك يستخدم البرهان السابق .

وهو المطلوب إثباته

لنظرية التقلص أو الانكماش المثبتة فى أعلى مزايا معينة : هى إنشائية ، الخطأ فى التقريب يمكن تقييمه ، وتضمن النظرية نقطة ثابتة وحيدة . لكن ، لها عيب وهو أن لزوم كون الدالة انكماشاً هو شرط صارم . حقيقة هامة وعميقة ، وقد برهنت لأول مرة عام ١٩١٠ بواسطة ل. أ. ج. براوور (*) وهى أن أى دالة متصلة بنطاق $D = \{x \in R^p : \|x\| \leq B\}$ ومدى محتوى فى D يجب أن يكون لها على الأقل نقطة واحدة ثابتة .

٢٣ – ٨ نظرية نقطة ثابتة لبراوور . نفرض $B > 0$ ، وبفرض $D = \{x \in R^p : \|x\| \leq B\}$ فإذن أى دالة متصلة نطاقها D ومدى محتوى فى D لها على الأقل نقطة واحدة ثابتة .

(*) ل. أ. ج براوور (١٨٨١ – ١٩٦٦) كان أستاذا فى أمستردام وعميداً للمدرسة الهولندية للرياضيات. وبالاضافة إلى إسهاماته فى التوبولوجى ، فهو معروف بعمله فى الأساسيات الرياضية .

برهان هذه النتيجة عند $p = 1$ سيعطى كتمرين . لكن فى الحالة $p > 1$ سيأخذنا البرهان بعيداً جداً عن المنزل أى فى الحقل . ولبرهان مؤسس على معلومات أولية فقط . أنظر كتاب دنفورد – شفارتز صفحات ٤٦٧ – ٤٧٠ . وللحصول على بيان أكثر ترتيباً لنقطة ثابتة ونظريات مرتبطة بها ننصح باستشارة كتاب لفشتز

تمرينـــات :

٢٣ – (أ) افحص كل من الدوال فى مثال ٢٠–٥ ووضح إما أن الدالة تكون متصلة بانتظام فى نطاقها أو أنها لاتكون .

٢٣ – (ب) اعط برهاناً لنظرية الاتصال المنتظم (٢٣–٣) باستخدام نظرية غطاء لبسيج (١١ – ٥) .

٢٣ – (ج) إذا كانت B محدودة فى R^p ، $f : B \to R^q$ دالة متصلة بانتظام ، وضح أن f محدودة فى B . أثبت أن هذه النتيجة تفشل إذا كانت B ليست محدودة فى R^p .

٢٣ – (د) أثبت أن الدوال ، المعرفة عند $x \in R$ بأنها

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad g(x) = \sin x$$

تكون متصلة بانتظام فى R .

٢٣ – (ه) أثبت أن الدوال ، المعرفة عند $D = \{x \in R : x \geq 0\}$ بأنها

$$h(x) = x, \qquad k(x) = e^{-x}$$

تكون متصلة بانتظام فى D .

٢٣ (و) أثبت أن الدوال الآتية ليست متصلة بانتظام فى نطاقهم

(أ) $f(x) = 1/x^2, \qquad D(f) = \{x \in R : x > 0\}$

(ب) $g(x) = \tan x, \qquad D(g) = \{x \in R : 0 \leq x < \pi/2\}$

(جـ) $h(x) = e^x, \qquad D(h) = R$

(د) $k(x) = \sin(1/x), \qquad D(k) = \{x \in R : x > 0\}$

٢٣ – (ز) تسمى دالة $g : R \to R^q$ دورية ، إذا كان يوجد عدد $p > 0$ بحيث أن $g(x+p) = g(x)$ لجميع $x \in R$. أثبت أن دالة دورية متصلة تكون محدودة ومتصلة بانتظام ، فى R .

٢٣ – (ح) نفرض أن f معرفة فى $D \subseteq R^p$ إلى R^q ، ونفرض أن f متصلة بانتظام فى D . إذا كانت (x_n) هى متتابعة كوشى فى D ، أثبت أن $(f(x_n))$ هى متتابعة كوشى فى R^q .

٢٣ – (ط) بفرض أن $f:(0,1)\to \mathbf{R}$ تكون متصلة بانتظام فى $(0,1)$ ، اثبت أن f يمكن تعريفها عند $x=0$ ، $x=1$ بطريقة بحيث تصبح متصلة فى $[0,1]$.

٢٣ – (ى) بفرض أن $D=\{x\in \mathbf{R}^p:\|x\|<1\}$ اثبت أن $f:D\to \mathbf{R}^q$ يمكن امتدادها إلى دالة متصلة فى $D_1=\{x\in \mathbf{R}^p:\|x\|\le 1\}$ إلى $\mathbf{R}^q$ إذا وإذاً فقط كانت متصلة بانتظام فى D.

٢٣ – (ك) إذا كانت f ، g دالتين متصلتين بانتظام فى $\mathbf{R}$ إلى $\mathbf{R}$ ، وضح أن $f+g$ تكون متصلة بانتظام فى $\mathbf{R}$ ، لكن fg لاتحتاج إلى كونها متصلة بانتظام فى $\mathbf{R}$ حتى إذا كانت إحدى f ، g محدودة .

٢٣ – (ل) إذا كانت $f:I\to I$ متصلة،وضح أن f لها نقطة ثابتة فى I (ارشاد : اعتبر $g(x)=f(x)-x$) .

٢٣ – (م) اعط مثالا لدالة $f:\mathbf{R}^p\to \mathbf{R}^p$ بحيث أن $\|f(x)-f(u)\|\le\|x-u\|$ لجميع $x,u\in \mathbf{R}^p$ والتى ليس لهانقطة ثابتة (لماذا لايناقض هذا المثال نظرية ٢٣ – ٥ ؟)

٢٣ – (ن) بفرض f،g دالتان متصلتان فى $[a,b]$ بحيث أن المدى $R(f)\subseteq R(g)=[0,1]$ أثبت أنه توجد نقطة $c\in[a,b]$ بحيث أن $f(c)=g(c)$

مشروع :

٢٣ – α هذا المشروع يعطى تصوراً لمدلول « تذبذب » دالة فى فئة وعند نقطة . بفرض $I=[a,b]\subseteq \mathbf{R}$ ونفرض أن $f:I\to \mathbf{R}$ محدودة وإذا كانت $A\subseteq I$ فنعرف التذبذب للدالة f فى A بأنه هو العدد

$$\Omega_f(A)=\sup\{f(x)-f(y):x,y\in A\}$$

(أ) أثبت أن $0\le\Omega_f(A)\le 2\sup\{|f(x)|:x\in A\}$ إذا كانت $A\subseteq B\subseteq I$ فإن $\Omega_f(A)\le\Omega_f(B)$

(ب) إذا كانت $c\in I$ فنعرف التذبذب للدالة f عند c بأنه العدد

$$\omega_f(c)=\inf_{\delta}\Omega_f(N_\delta)$$

. حيث $N_\delta=\{x\in I:|x-x_0|<\delta\}$ ، أثبت أن (انظر باب ٢٥) .

$$\omega_f(c)=\lim_{\delta\to 0}\Omega_f(N_\delta)$$

أيضاً ، إذا كانت $\omega_f(c)<\alpha$ فتوجد $\delta>0$ بحيث أن $\Omega_f(N_\delta)<\alpha$.

(ج) اثبت أن f دالة متصلة عند $c\in I$ إذا وإذا فقط $\omega_f(c)=0$.

(د) إذا كانت $\alpha>0$ وإذا كانت $\omega_f(x)<\alpha$ لكل $x\in I$ ، فإنه يوجد $\delta>0$

بحيث أنه إذا كانت $A \subseteq I$ بحيث يكون قطرها $d(A) = \sup\{|x-y| : x, y \in A\}$ أقل من δ ، فإن $\Omega_f(A) < \alpha$.

(ه) إذا كانت $\alpha > 0$ ، فإن الفئة $D_\alpha = \{x \in I : \omega_f(x) \geq \alpha\}$ فئة مغلقة فى R اثبت أن

$$D = \bigcup_{\alpha > 0} D_\alpha = \bigcup_{n \in N} D_{1/n}$$

هى فئة من نقط التى عندها f تكون غير متصلة . ومن ثم تكون الفئة لنقط عدم الاتصال لدالة هى الاتحاد لعائلة معدودة من فئات مغلقة . (مثل هذه الفئة تسمى فئة F_σ-)

(و) اعط امتداداً لهذه التعاريف والنتائج لدالة معرفة فى خلية مغلقة فى R^p .

الباب الرابع والعشرون ــ متتابعات دوال متصلة :

توجد حالات عديدة التى فيها يحتاج شخص متتابعة الدوال المنتظمة . سنقدم فى هذا الباب نظريات مشوقة وهامة عن مثل هذه المتتابعات . سنستخدم نظرية ٢٤ – ١ فيما يلى كثيراً جداً وتكون نتيجة رئيسية النظريات الباقية سوف لاتستعمل مراراً ، لكن يجب أن يعتاد القارىء على نصوصها على الأقل .

فى هذا الباب أهمية التقارب المنتظم ستصبح أوضح . نتذكر أنه يقال للمتتابعة (f_n) لدوال فى فئة جزئية D من R^p إلى R^q إنها تقترب بانتظام فى D إلى f إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $n \geq N(\varepsilon)$ و $x \in D$ ، فإن $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$. نتذكر من نظرية (١٧ – ٩) أن هذا صحيح إذا وإذا فقط $\|f_n - f\|_D \to 0$ عندما تكون (f_n) متتابعة محدودة .

تبادل نهاية واتصــال :

نلاحظ أن النهاية لمتتابعة لدوال متصلة ربما لاتكون متصلة . من السهل ملاحظة ذلك ، لأنه إذا كانت $n \in N$ و $x \in I$ ، نفرض $f_n(x) = x^n$. قد رأينا فى مثال ١٧ – ٢ (ب) ، أن المتتابعة (f_n) تقترب فى I إلى الدالة f المعرفة بأنها

$$f(x) = 0, \qquad 0 \leq x < 1,$$
$$= 1, \qquad x = 1$$

أى أنه ، بالرغم من الميزة البسيطة للدوال المتصلة f_n ، فإن دالة النهاية ليست متصلة عند النقطة $x = 1$.

ومع أن امتداد عدم الاتصال الدالة النهائية فى المثال المعطى حالا ليس كبيراً جداً ، فن الواضح أنه يمكن تركيب أمثلة أكثر تعقيداً والتى ستنتج عدم اتصال أكثر امتداداً . ومن الممتع فحص تماماً كيف يمكن أن يكون عدم الاتصال لنهاية متتابعة لدوال متصلة ، ولكن هذا الفحص

سيأخذ بعيداً جداً من المنزل إلى الحقل وبالإضافة إلى ذلك يكون من المهم ، لتطبيقات أكثر ، إيجاد شروط إضافية التي سوف تتضمن أن دالة النهاية متصلة .

الآن سنثبت الحقيقة الهامة التي تقول إن التقارب المنتظم لمتتابعة دوال متصلة يكون كافياً لضمان اتصال الدالة النهائية .

٢٤ – ١ نظرية . نفرض أن $F = (f_n)$ متتابعة لدوال متصلة نطاقها D فى R^p ومداها فى R^q ونفرض أن هذه المتتابعة تقترب بانتظام فى D إلى دالة f . حينئذ تكون f متصلة فى D .

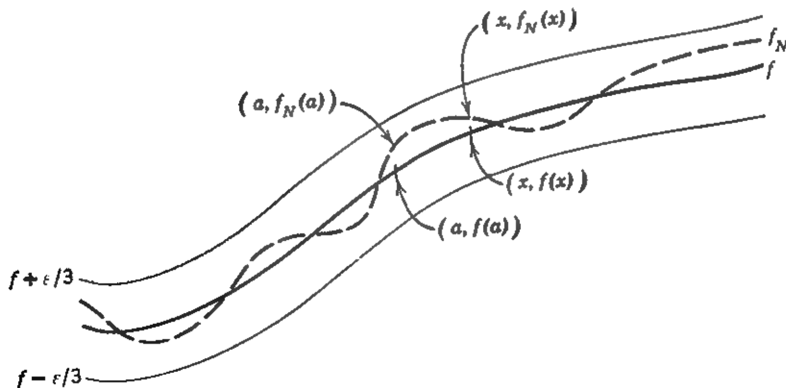
البرهان . حيث أن (f_n) تتقارب بانتظام فى D إلى f ، فبأخذ $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعى $N = N(\varepsilon/3)$ بحيث أن $\|f_N(x) - f(x)\| < \varepsilon/3$ لكل x فى D . لنوضح أن f متصلة عند نقطة a فى D ، نلاحظ أن

$$(24.1) \quad \|f(x)-f(a)\| \le \|f(x)-f_N(x)\| + \|f_N(x)-f_N(a)\| + \|f_N(a)-f(a)\| \le \varepsilon/3 + \|f_N(x)-f_N(a)\| + \varepsilon/3$$

بما أن f_N متصلة ، فيوجد عدد $\delta = \delta(\varepsilon/3, a, f_N) > 0$ بحيث أنه إذا كانت $\|x-a\| < \delta$ و $x \in D$ فإن $\|f_N(x) - f_N(a)\| < \varepsilon/3$. (أنظر شكل ٢٤ – ١). لذلك ، نجد لمثل x $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. هذا يثبت الاتصال للدالة النهائية f عند نقطة اختيارية a فى D . وهو المطلوب إثباته

نلاحظ أنه بالرغم من أن التقارب المنتظم للمتتابعة لدوال متصلة هو كاف لاتصال دالة النهاية فهو ليس ضرورياً .

أى أنه إذا كانت (f_n) متتابعة لدوال متصلة متقاربة إلى دالة متصلة f ، فإنه لاينتج أن التقارب يكون منتظماً (أنظر تمرين ٢٤ – أ) .



(شكل ٢٤ – ١)

كما رأينا فى نظرية ١٧ – ٩ ، أن تقارباً منتظماً على فئة D من متتابعة لدوال يعنى ضمنياً التقارب فى العمود المنتظم على D . ومن ثم يكون النظرية ٢٤ – ١ الصيغة الآتية .

٢٤ – ٢ نظرية . إذا كانت (f_n) متتابعة لدوال فى $BC_{pq}(D)$ بحيث أن $\|f - f\|_D \to 0$ فإن $f \in BC_{pq}(D)$.

نظريات تقريب :

يكون من المناسب لتطبيقات كثيرة أن « نقرب » دوال متصلة بدوال ذات طبيعة أولية . مع أنه يوجد تعريفات معقولة عديدة بحيث يمكن استعمالها لجعل كلمة « تقريبى » أكثر دقة ، فإن أحد التعريفات الأكثر طبيعة وفى نفس الوقت الأكثر أهمية أن الدالة الصفرية عند كل نقطة من النطاق المعلوم سوف لاتختلف عن الدالة المعطاة بأكثر من الخطأ المحدد . يشار إلى هذا المعنى أحياناً بأنه « التقريب المنتظم » وهو وثيق الارتباط بالتقارب المنتظم .

نفرض أن f دالة معطاة نطاقها $D = D(f)$ ومحتوية فى R^p ومداها فى R^q . نقول أن دالة g هى تقريب دالة f بانتظام فى D إلى داخل $\varepsilon > 0$ إذا كان

$$\|g(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \qquad \text{لكل all } x \in D;$$

أو ما يساوى نفس الشيء ، إذا كان

$$\|g - f\|_D = \sup\{\|g(x) - f(x)\| : x \in D\} \leq \varepsilon$$

هنا قد استخدمنا العمود الذى عرفناه فى معادلة (١٧–٥) . نقول إن الدالة f يمكن تقريبها بانتظام فى D بدوال فى فصيلة $\mathscr{G}$. إذا ، كان يوجد لكل عدد $\varepsilon > 0$ دالة g_ε فى $\mathscr{G}$ بحيث أن $\|g_\varepsilon - f\|_D < \varepsilon$ ، أو ، ما يكافئه ، إذا كانت توجد متتابعة لدوال فى $\mathscr{G}$ بحيث تقترب بانتظام فى D إلى f .

٢٤ – ٣ تعريف . دالة g نطاقها R^p ومداها فى R^q تسمى دالة خطوة إذا كانت تأخذ عدداً محدوداً فقط لقيم مختلفة فى R^q ، كل قيمة غير صفرية أخذت فى فترة فى R^p .

مثال ذلك ، إذا كانت $p = q = 1$ ، فإن الدالة g المعرفة بصراحة بأنها

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, & x &\leq -2, \\ &= 1, & -2 < x &\leq 0, \\ &= 3, & 0 < x &< 1, \\ &= -5, & 1 \leq x &\leq 3, \\ &= 0, & x &> 3. \end{aligned}$$

هى دالة خطوة

الآن سنوضح أن دالة متصلة نطاقها هو خلية مدمجة يمكن أن تقرب بانتظام بواسطة دوال خطوية .

۲٤ – ٤ نظرية . نفرض أن f دالة متصلة التي نطاقها D هو خلية مدمجة فى R^p وقيمها تنتمى إلى R^q . حينئذ يمكن للدالة f أن تقرب بانتظام فى D بواسطة دوال خطوية .

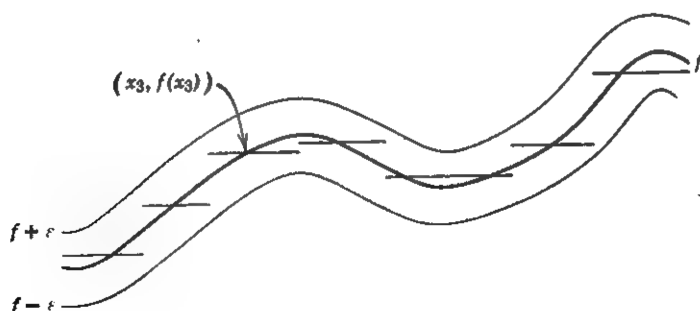
البرهان . بفرض $0 < \varepsilon$ معطاة ؛ بما أن f متصلة بانتظام (نظرية ۲۳ – ۳) فيوجد عدد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث أنه إذا كانت x, y تنتمى إلى D و $\|x - y\| < \delta(\varepsilon)$ فإن $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. قسم النطاق D للدالة f إلى خلايا غير متصلة $I_1, \ldots, I_n$ بحيث أنه إذا كانت x, y تنتمى إلى I_k ، فينتج $\|x - y\| < \delta(\varepsilon)$. (كيف ؟) نفرض أن x_k أى نقطة تنتمى إلى الخلية $I_k, k = 1, \ldots, n$ ونعرف $g_\varepsilon(x) = f(x_k)$ عند $x \in I_k$ ، $g_\varepsilon(x) = 0$ عند $x \notin D$. إذن من الواضح أن $\|g_\varepsilon(x) - f(x)\| < \varepsilon$ عند $x \in D$ بحيث أن g_ε تقريب الدالة f بانتظام فى D إلى داخل ε . (أنظر شكل ۲٤ – ۲) . وهو المطلوب إثباته

من الطبيعى أن نتوقع أن دالة متصلة يمكن أن تقرب بانتظام بدوال بسيطة التى تكون أيضاً متصلة (بخلاف الدول الخطوية) . للتبسيط ، سوف يثبت النتيجة الآتية فقط فى الحالة التى فيها $p = q = 1$ بالرغم من وجود على مايظهر حالات عامة لإبعاد أعلى .

نقول أن دالة g معرفة فى خلية مدمجة $J = [a, b]$ من R بقيم قطعية فى R خطية إذا كان يوجد عدد محدود من نقط c_k حيث $a = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n = b$ وإعداد حقيقية مناظرة $A_k, B_k, k = 0, 1, \ldots, n$ بحيث أنه عندما تحقق x العلاقة $c_{k-1} < x < c_k$ تأخذ الدالة g الصورة

$$g(x) = A_k x + B_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

إذا كانت g متصلة فى J ، فإن الثوابت A_k, B_k يجب أن تحقق بالطبع علاقات معينة



(شكل ۲٤ – ۲ – تقريب بدالة خطوة)

٢٤ – ٥ نظرية . نفرض أن f دالة متصلة نطاقها هو خلية مدمجة J فى R . إذن الدالة f يمكن أن تقرب بانتظام فى J بدوال خطية قطعية متصلة .

البرهان . كما سبق ، تكون f دالة متصلة بانتظام فى الفئة المدمجة J . لذلك ، بأخذ $\varepsilon > 0$ ، نقسم $J = [a, b]$ إلى خلايا بإضافة نقط متوسطة $c_k, k = 0, 1, \ldots, n$ حيث $a = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n = b$ بحيث أن $c_k - c_{k-1} < \delta(\varepsilon)$. صل النقط $[c_k, f(c_k)]$ بخط متكسر ، وعرف الدالة g_ε الناتجة المتصلة القطعية الخطية . من الواضح أن g_ε تقرب f بانتظام فى J داخل ε .

وهو المطلوب إثباته

تقريب بكثيرات الحدود :

الآن سنبرهن نتيجة عميقة أكثر فائدة وأكثر متعة بخصوص التقريب بواسطة كثيرة الحدود . نبرهن أولا نظرية تقريب فيراشتراس عند $p = q = 1$ باستخدام كثيرات الحدود لعالم الرياضيات سرج برنشتين (*)

٢٤ – ٦ تعريف . نفرض أن f دالة نطاقها $I = [0, 1]$ ومداها فى R . تعرف كثيرة الحدود النونية للدالة f لبرنشتين بأنها

$$B_n(x) = B_n(x; f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \tag{24.2}$$

هذه كثيرات الحدود لبرنشتين ليست مخيفة كما تبدو من أول لمحة .

القارىء الذى عنده بعض الخبرة بالاحتمالات يجب أن يلاحظ توزيع ذات الحدين الكامن فى الخلفية . وحتى بدون مثل هذه الخبرة يمكن للقارىء ملاحظة أن القيمة $B_n(x;f)$ لكثيرة الحدود عند النقطة x تحسب من القيم $f(0), f(1/n), f(2/n), \ldots, f(1)$ بمعاملات ترجيح غير سالبة معينة $\varphi_k(x) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ التى يمكن ملاحظة أنها صغيرة جداً عند هذه القيم للعدد k حيث k/n تكون بعيدة عن x . فى الحقيقة ، الدالة φ_k ليست سالبة على I وتأخذ قيمتها العظمى عند النقطة k/n . وبالإضافة إلى ذلك ، كما سنرى أسفل ، يكون حاصل الجمع لكل $\varphi_k(x), k = 0, \ldots, n$ هو واحد صحيح لكل x فى I .

نتذكر أن نظرية ذات الحدين تؤكد أن

(*) سرج ن . برنشتين (١٨٨٠ – ١٩٦٨) قام بإسهامات عميقة فى التحليل ، نظرية التقريب والاحتمالات ولد فى أودسا وكان أستاذاً فى لينجراد وموسكو .

$$(s+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k t^{n-k} \tag{24.3}$$

حيث $\binom{n}{k}$ هى معامل ذات الحدين

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

نفحص مباشر نلاحظ أن

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{k}{n}\binom{n}{k} \tag{24.4}$$

$$\binom{n-2}{k-2} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}\binom{n}{k} \tag{24.5}$$

الآن نفرض $x = s$ و $t = 1 - x$ فى (٢٤ - ٣) ، نحصل على

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{24.6}$$

بكتابة $n - 1$ بدلا من n ، j بدلا من k فى (٢٤ - ٦) نحصل على

$$1 = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j}$$

اضرب هذه العلاقة الأخيرة فى x واستخدم المطابقة (٢٤ - ٤) لتحصل على

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j+1}{n} \binom{n}{j+1} x^{j+1} (1-x)^{n-(j+1)}$$

الآن نفرض $k = j+1$ ، ومن ثم

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

أيضاً نلاحظ أن الحد المناظر إلى $k = 0$ يمكن احتواؤه ، لأنه يتلاشى . ومن ثم يكون لدينا

$$x = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{24.7}$$

حساب مماثل ، معتمد على (٢٤ - ٦) بكتابة $n - 2$ بدلا من n ومطابقة (٢٤ - ٥) يعطيان

$$(n^2-n)x^2 = \sum_{k=0}^{n} (k^2-k) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

لذلك نستنتج أن

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{n}x = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{24.8}$$

بضرب (٢٤ — ٦) فى x^2 ، (٢٤ — ٧) فى $2x$ — وجمعهماإلى (٢٤ — ٨) نحصل على

$$(1/n)x(1-x)=\sum_{k=0}^{n}(x-k/n)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \tag{24.9}$$

الذى هو تقدير سوف نحتاج إليه فيما بعد .

بفحص تعريف ٢٤ — ٦ ، يقول قانون (٢٤ — ٦) أن كثيرة الحدود النونية لبرنشتين للدالة الثابتة $f_0(x) = 1$ تطابق f_0 . قانون (٢٤—٧) أقول نفس الشيء للدالة $f_1(x) = x$. قانون (٢٤ — ٨) يؤكد أن كثيرة الحدود النونية لبرنشتين للدالة $f_2(x) = x^2$ هى

$$B_n(x;f_2)=(1-1/n)x^2+(1/n)x$$

التى تتقارب بانتظام على I إلى f_2 ، سنبرهن الآن إنه إذا كانت f أى دالة متصلة فى I إلى R ، حينئذ يكون المتتابعة كثيرة الحدود لبرنشتين الخاصية بأنها تتقارب بانتظام فى I إلى f . هذا سيعطينا برهانا استدلاليا لنظرية التقريب لفيرشتراس سنحتاج لقانون ٢٤ — ٩ عند برهان هذه النظرية .

٢٤ — ٧ نظرية تقريب برنشتين . نفرض أن f دالة متصلة فى I بقيم فى R. حينئذ المتتابعة لكثيرة الحدود برنشتين للدالة f ، المعرفة فى معادلة (٢٤ — ٢) تتقارب بانتظام فى I إلى f .

البرهان : بضرب المعادلة (٢٤ — ٦) فى $f(x)$ ، نحصل على

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

لذلك ، نحصل على العلاقة

$$f(x)-B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\{f(x)-f(k/n)\}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

التى منها ينتج أن

$$|f(x)-B_n(x)|\le\sum_{k=0}^{n}|f(x)-f(k/n)|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \tag{24.10}$$

الآن f محدودة ، مثلا بالمقدار M ، وهى أيضاً متصلة بانتظام . لاحظ أنه إذا كانت k بحيث أن k/n قريبة من x ، فإن الحد المناظر فى حاصل الجمع (٢٤ — ١٠) يكون صغيراً بسبب اتصال f عند x ، ومن جهة أخرى ، إذا كانت k/n بعيدة عن x ، فإن العامل المتضمن f يمكن أن يقال فقط أنه أقل من $2M$ وأن أى صفر يجب أن يظهر من معاملات أخرى . لذلك ،

يقودنا هذا إلى جعل (٢٤ — ١٠) جزأين : قيم k التى تجعل $x - k/n$ صغيراً ، والتى تجعل $x - k/n$ كبيراً .

نفرض أن $\varepsilon > 0$ ونفرض أن $\delta(\varepsilon)$ هى كما فى تعريف الاتصال المنتظم للدالة f . نجد أنه من المناسب أن نختار n كبيرة بحيث أن

$$n \geq \sup\{(\delta(\varepsilon))^{-4}, M^2/\varepsilon^2\} \tag{24.11}$$

ونقسم (٢٤ — ١٠) إلى حاصل جمعين . حاصل الجمع المأخوذ على k حيث $|x - k/n| < n^{-1/4} \leq \delta(\varepsilon)$ ينتج التقدير

$$\sum_k \varepsilon\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \varepsilon\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \varepsilon$$

حاصل الجمع المأخوذ على k حيث $|x - k/n| \geq n^{-1/4}$ ، أى أن ، $(x - k/m)^2 \geq n^{-1/2}$ يمكن تقديره باستخدام القانون (٢٤ — ٩) لهذا الجزء من حاصل الجمع فى (٢٤ — ١٠) نحصل على الحد الأعلى

$$\begin{aligned}\sum_k 2M\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= 2M\sum_k \frac{(x-k/n)^2}{(x-k/n)^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\leq 2M\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}(x-k/n)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\leq 2M\sqrt{n}\left\{\frac{1}{n}x(1-x)\right\} \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}\end{aligned}$$

لأن $x(1-x) \leq {}^1/_4$ فى الفترة I . باستمادة التحديد (٢٤ — ١١) للعدد n ، نستنتج أن كلا هذين الجزأين من (٢٤ — ١٠) محدودة من أعلى المقدار ε . ومن ثم ، باختيار n كما فى (٢٤ — ١١) نحصل على

$$|f(x) - B_n(x)| < 2\varepsilon$$

مستقلة عن قيمة x . هذا يوضح أن المتتابعة (B_n) تتقارب بانتظام فى I إلى f .

وهو المطلوب إثباته

كنتيجة مباشرة لنظرية برنشتين ، نحصل على النتيجة الهامة الآتية .

٢٤ — ٨ نظرية تقريب فيرشتراس . بفرض أن f دالة متصلة فى فترة مدمجة من R وبقيم فى R فإن f يمكن أن تكون مقربة بانتظام بكثيرات الحدود

البرهان . إذا كانت f معرفة فى $[a, b]$ ، فإن الدالة g المعرفة فى $I = [0, 1]$ بأنها

$$g(t) = f((b-a)t + a), \qquad t \in I$$

متصلة . ومن ثم g يمكن أن تكون مقربة بانتظام بكثيرات الحدود لبرنشتين وتغيير بسيط للمتغير ينتج تقريب كثيرة الحدود للدالة f .

قد اخترنا التعمق فى تفاصيل نظرية برنشتين (٢٤ – ٧) لأنها تعطى طريقة بنائية لإيجاد متتابعة لكثيرات الحدود التى تتقارب بانتظام فى I إلى الدالة المتصلة المعطاة وبالإضافة إلى ذلك ، تتميز طريقة برهان نظرية ٢٤ – ٦ بمناقشات تحليلية كثيرة وهى مهمة لنمو فهم مثل هذه المناقشات . أخيراً ، ومع أننا سوف نثبت نتائج تقريبية أكثر عموماً فى باب ٢٦ ، لإجراء ذلك سنحتاج إلى معرفة أن دالة القيمة المطلقة يمكن تقريبها بانتظام فى فترة مدمجة بكثيرات الحدود . مع أنه من الممكن توضيح هذه الحالة الخاصة مباشرة ، الإثبات ليس بسيطاً كذلك . ولمناقشة أكثر تماماً للتقريب يرجع القارىء إلى كتاب (E. Cheney) المدون فى المراجع .

تمرينـــات :

٢٤ – (أ) اعط مثالا لمتتابعة لدوال متصلة والتى تتقارب إلى دالة متصلة لكن التقارب إليها ليس منتظماً .

٢٤ – (ب) اعط مثالا لمتتابعة لدوال غير متصلة فى كل مكان وبحيث تقترب بانتظام إلى دالة متصلة .

٢٤ – (ج) اعط مثالا لمتتابعة لدوال متصلة التى تتقارب فى فئة مدمجة إلى دالة لها عدد لانهائى من مواقع عدم الاتصال .

٢٤ – (د) بفرض (f_n) متتابعة لدوال متصلة فى $D \subseteq R^p$ إلى R^q بحيث أن (f_n) تتقارب بانتظام إلى f فى D ، وبفرض أن (x_n) متتابعة لعناصر فى D حيث تتقارب إلى $x \in D$ هل ينتج أن $[f_n(x_n)]$ تتقارب إلى $f(x)$.

٢٤ – (هـ) اعتبر المتتابعات (f_n) المعرفة فى $D = \{x \in R : x \geq 0\}$ إلى R بالقوانين الآتية :

(أ) $\dfrac{x^n}{n}$ (ب) $\dfrac{x^n}{1+x^n}$ (ج) $\dfrac{x^n}{n+x^n}$

(د) $\dfrac{x^{2n}}{1+x^n}$ (هـ) $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ (و) $\dfrac{x}{n}e^{-x/n}$

ناقش التقارب والتقارب المنتظم لهذه المتتابعات واتصال نهايات الدوال . فى حالة كون التقارب ليس منتظماً فى D ، اعتبر فترات مناسبة فى D .

٢٤ – (و) بفرض أن (f_n) متتابعة فى $D \subseteq R^p$ إلى R^q والتى تتقارب فى D إلى f . وبفرض أن كل f_n متصلة عند c وأن المتتابعة تتقارب بانتظام فى جوار V للعنصر c . أثبت أن f متصلة عند c .

٢٤ – (ز) بفرض أن (f_n) متتابعة لدوال متصلة فى $D \subseteq R^p$ إلى R ومتناقصة باطراد بمعنى أنه إذا كانت $x \in D$ ، فإن

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots \geq f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq \cdots$$

إذا كانت $\lim (f_n(c)) = 0$ لقيمة $c \in D$ ، $\varepsilon > 0$ ، وضح أنه يوجد $m \in N$ وجوار U للعنصر c بحيث أنه إذا كانت $n \geq m$ ، $x \in U \cap D$ ، فإن $f_n(x) < \varepsilon$.

٢٤ – (ح) استخدم التمرين السابق لبرهنة النتيجة الآتية لأليس دينى(*). إذا كانت (f_n) متتابعة مطردة لدوال متصلة والتى تتقارب عند كل نقطة لفئة مدمجة K فى R^p إلى دالة متصلة f فى K ، فإن التقارب يكون منتظماً فى K .

٢٤ – (ط) وضح ، بمثال ، أن نظرية دينى تفشل إذا حذفنا من الفرض أما أن K مدمجة أو أن f متصلة .

٢٤ – (ى) أثبت النظرية الآتية لجورج بوليا(**) إذا كانت الدالة f_n فى I إلى R متزايدة باطراد لكل $n \in N$ وإذا كانت $f(x) = \lim [f_n(x)]$ متصلة فى I ، فإن التقارب يكون منتظماً فى I . (لاحظ عدم فرض كون f_n متصلة) .

٢٤ – (ك) إذا كانت (f_n) متتابعة لدوال متصلة فى $D \subseteq R^p$ إلى R^q وبفرض $f(x) = \lim [f_n(x)]$ عند $x \in D$. أثبت أن f متصلة عند نقطة $c \in D$ إذا وإذا فقط لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $m \in N$ وجوار U للنقطة c بحيث أنه إذا كانت $x \in D \cap U$ فإن $\| f_m(x) - f(x) \| < \varepsilon$.

٢٤ – (ل) بفرض أن $f: R \to R$ متصلة بانتظام فى R وعند $n \in N$ ، وبفرض $f_n(x) = f(x + 1/n)$ عند $x \in R$. أثبت أن (f_n) تتقارب بانتظام فى R إلى f .

٢٤ – (م) إذا كانت $f_2(x) = x^2$ عند $x \in I$ ، كم من الكبر يجب أن تكون n بحيث أن كثيرة الحدود النونية لبرنشتين B_n للدالة f_2 تحقق $| f_2(x) - B_n(x) | \leq 1/1000$ لكل $x \in I$ ؟ .

٢٤ – (ن) إذا كانت $f_3(x) = x^3$ عند $x \in I$ ، احسب كثيرة الحدود النونية لبرنشتين للدالة f_3 . وضح مباشرة أن هذه المتتابعة لكثيرات الحدود تقترب بانتظام إلى f_3 فى I .

٢٤ – (س) فاضل معادلة (٢٤ – ٣) مرة واحدة بالنسبة إلى x وبالتعويض $x = s$ ، $t = 1 - x$ اشتقاقاً آخر لدالة (٢٤ – ٧) .

(*) أليس دينى (١٨٤٥ – ١٩١٨) تعلم ودرس فى بيزا . وقام بأبحاث فى الهندسة والتحليل وخاصة متسلسلة فورييه .

(**) جورج بوليا (١٨٨٧ –) ولد فى بودابست ودرس فى زيورخ وستانفورد هو مشهور بعمله فى التحليل المركب ، الاحتمالات ، نظرية العدد ونظرية الاستدلال .

٢٤ – (ع) فاضل معـــادلة (٢٤ – ٣) مرتين بالنسبة إلى s لتعطى اشتقاقاً آخر لمعادلة (٢٤ – ٨) .

٢٤ – (ف) (أ) بفرض J فترة مدمجة فى R ، وبفرض أن $a \in R, c \in J$. ارسم شكلا تخطيطياً للدالة $\varphi : J \to R$ المعرفة بأنها $\varphi(x) = a + \frac{1}{2}(|x - c| + x + c)$.

(ب) اثبت أن كل دالة خطية قطعية متصلة يمكن كتابتها كحاصل جمع عدد محدود من دوال $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ فى الصورة المعطاة فى جزء (أ) .

(ج) بفرض أن c فى أى فترة مدمجة ، دالة القيمة المطلقة $A(x) = |x|$ هى النهاية المنتظمة لمتابعة كثيرات الحدود فى x ، استخدم الملاحظة فى جزء (ب) لإعطاء برهاناً آخر لنظرية تقريب : فيرشتراس (ترجع هذه الطريقة من البرهان إلى لبسيج) .

٢٤ – (ص) أثبت أن الدوال $x \to e^x$ فى R ليست نهاية منتظمة فى R لمتابعة كثيرات الحدود . ومن ثم ربما تفشل نظرية تقريب فيرشتراس لفترات لانهائية .

٢٥ – (ق) أثبت أن نظرية تقريب فيرشتراس تفشل لفترات مفتوحة محدودة .

الباب الخامس والعشرون – نهايات دوال :

مع أنه من غير الممكن إعطاء تعريف قيم ، فإن حقل « التحليل الرياضى » يفهم فى الحالة العامة بأنه جسم الرياضيات الذى فيه يصنع استخدام مرتب من تصورات مختلفة نهائية إذا كان هذا نصاً مضبوطاً معقولا ، فربما يبدو شاذ للقارىء أننا انتظرنا هذا الكثير قبل إدخال باب يعالج النهايات . توجد أسباب كثيرة لهذا التأخير ، السبب الرئيسى هو أن التحليل الأولى يعالج أنواعاً مختلفة متعددة من عمليات النهاية .

قد ناقشنا من قبل التقارب لمتابعات والنهاية المذكورة ضمنا فى دراسة الاتصال .

سوف نقدم فى الفصول القادمة ، العمليات النهائية المرتبطة بالمشتقة والتكامل . مع أن جميع هذه التصورات للنهاية حالات خاصة من تصور عام أكثر عمومية ، فالتصور العام يكون نوعاً ما ذات صفة تجريدية : ولهذا السبب ، نفضل أن نقدم ونناقش التصورات منفصلة ، بدلا من أن تكون الفكرة العامة عن النهايات وبعد ذلك تستنتج الحالات الخاصة .

وبمجرد تفهم الحالات الخاصة جيداً نجد أنه ليس صعباً استيعاب المفهوم التجريدى . ولعرض ممتاز لهذه النهاية المجردة ، أنظر المقال العرضى من كتاب ا . ج . مشان المدون بالمراجع .

فى هذا الباب ستكون مختصين بالنهاية لدالة عند نقطة وبعض امتدادات بسيطة لهذه الفكرة . هذه الفكرة درست غالباً قبل الاتصال وفى الحقيقة ، التعريف الفعلى لدالة متصلة أحياناً يعبر عنه بدلالة هذه النهاية بدلا من استخدام التعريف المعطى فى باب ٢٠ . أحد الأسباب لاختيارنا دراسة

الاتصال منفصلا عن دراسة النهاية هو أننا سوف نقدم تعريفين مختلفين قليلا النهاية لدالة عند نقطة. بما أن كلا التعريفين يستعملان بكثرة ، فستقدم كليهما ونحاول أن نربط كلا منهما للآخر .

إذا لم يكن هناك إشارة خاصة للعكس ، سنفترض أن f هي دالة نطاقها D محتوى فى R^p وقيمها فى R^q وسنعتبر الخاصية النهائية للدالة f عند نقطة تجميع c من D . لذلك ، تحتوى كل جوار للنقطة c نقطاً كثيرة عددها لانهائى من D .

٢٥ – ١ تعريف . (i) يقال لعنصر b من R^q إنه النهاية المحذوفة للدالة f عند النقطة c إذا كان يوجد لكل جوار V للعنصر b جوار U للنقطة c بحيث أنه إذا كانت x تنتمى إلى $x \neq c$, و $U \cap D$ ، فإن $f(x)$ تنتمى إلى V . فى هذه الحالة نكتب

$$b = \lim_{c} f \qquad \text{أو} \qquad b = \lim_{x \to c} f(x) \tag{25.1}$$

(ii) يقال لعنصر b من R^q إنه النهاية غير المحذوفة من الدالة f عند النقطة c إذا كان يوجد جوار V للنقطة b جوار U للنقطة c بحيث أنه إذا كانت x تنتمى إلى $U \cap D$ ، فإن $f(x)$ تنتمى إلى V . فى هذه الحالة نكتب

$$b = \operatorname{Lim}_{c} f \qquad \text{أو} \qquad b = \operatorname{Lim}_{x \to c} f(x) \tag{25.2}$$

من المهم ملاحظة أن الفرق بين هذين المفهومين يتمركز فيما إذا كانت ستعتبر القيمة $f(c)$ عند وجودها ، أم لا . لاحظ أيضاً الاختلاف التصورى الدقيق نوعاً ما الذى قد قدمناه فى معادلتى (٢٥ – ١) ، (٢٥ – ٢) . ويجب التأكد من أن معظم المؤلفين يقدمون فقط أحد هذه المدلولات ، وفى هذه الحالة يشيرون إليها فقط بأنها « النهاية » ويستخدمون عامة الرمز فى (٢٥ – ١) بما أن النهاية المحذوفة هى الأكثر اشتهاراً ، فقد اخترنا الاحتفاظ بالرمز التقليدى عند الإشارة إليها .

أثبتنا حالى الانفراد لكل نهاية ، إن وجدت ، سنكتفى بالنص الآتى :

٢٥ – ٢ مفترض . (أ) إذا كانت كل من النهايتين $\lim_c f$ ، $\operatorname{Lim}_c f$ موجودة فإنها تكون محددة وحيدة .

(ب) إذا كانت النهاية غير المحذوفة موجودة ، فتوجد النهاية المحذوفة ويكون

$$\lim_{c} f = \operatorname{Lim}_{c} f$$

(ج) إذا كانت c لاتنتمى إلى النطاق D للدالة f ، فإن النهاية المحذوفة تكون موجودة إذا وإذاً فقط كانت النهاية غير المحذوفة موجودة .

جزء (ب) من المفترض المنصوص حالا يوضح أن مفهوم النهاية غير المحذوفة يكون بنوع ما أكثر تعقيداً من مفهوم النهايات المحذوفة . يوضح جزء (ج) أنهما يمكن أن يكونا مختلفين فقط فى الحالة التى فيها c تنتمى إلى D . لإعطاء مثالا فيه هذان المفهومان مختلفان ، اعتبر الدالة f فى R إلى R ومعرفة بأنها

$$f(x)=0, \qquad x\neq 0, \\ =1, \qquad x=0. \tag{25.3}$$

إذا كانت $c = 0$ ، فإن النهاية المحذوفة للدالة f عند $c = 0$ موجودة وتساوى صفراً ، بينما لاتوجد النهاية غير المحذوفة .

الآن نقرر بعض شروط كافية وضرورية لوجود النهايات ، تاركين برهانها للقارىء يجب التأكيد بأنه فى جزء (ج) لكلتا النتيجتين تشير النهاية إلى النهاية للمتتابعة التى نوقشت فى باب ١٤ .

٢٥ – ٣ نظرية . النصوص الآتية ، المتعلقة بالنهايات المحذوفة ، متكافئة .

(ا) النهاية المحذوفة $b = \lim_c f$ موجودة

(ب) إذا كانت $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث أنه إذا كانت $x \in D$ ، $0 < \|x - c\| < \delta$ ، فإن $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.

(جـ) إذا كانت (x_n) أى متتابعة فى D بحيث أن $x_n \neq c$ ، $c = \lim (x_n)$ فإن $b = \lim [f(x_n)]$.

٢٥ – ٤ نظرية . النصوص الآتية ، المتعلقة بالنهايات غير المحذوفة ، متكافئة

(ا) النهاية غير المحذوفة توجد أى $b = \mathrm{Lim}_c f$.

(ب) إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث أنه إذا كانت $x \in D$ ، $\|x - c\| < \delta$ فإن $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.

(جـ) إذا كانت (x_n) أى متتابعة فى D بحيث أن $c = \lim (x_n)$ فنجد أن $b = \lim [f(x_n)]$.

النتيجة الآتية تنتج علاقة بناءة بين هاتين النهايتين والاتصال للدالة f عند c .

٢٥ – ٥ نظرية . إذا كانت c نقطة تجميع منتمية إلى النطاق D من الدالة f ، فإن النصوص الآتية تكون متكافئة .

(ا) الدالة f متصلة عند c .

(ب) النهاية المحذوفة $\lim_c f$ موجودة وتساوى $f(c)$

(جـ) النهاية غير المحذوفة $\text{Lim}_c f$ موجودة .

البرهان . إذا ظلت (أ) قائمة ، كانت V جواراً للدالة $f(c)$ ، فإنه يوجد جوار U للنقطة c بحيث أنه إذا كانت x تنتمى إلى $U \cap D$ ، فإن $f(x)$ تنتمى إلى V . هذا يدل بوضوح على أن $\text{Lim} f$ تكون موجودة عند c وتساوى $f(c)$ بالمثل ، $f(x)$ تنتمى إلى V لكل $x \neq c$ حيث $x \in U \cap D$ فى هذه الحالة توجد نهاية f وتساوى $f(c)$. بالعكس ، قد لاحظنا حالا أن النصين (ب) ، (جـ) يدلان على (أ) .

إذا كانت f ، g دالتين لهما نهايتان محذوفتان (نسبياً غير محذوفتين) عند نقطة تجميع c من $D(f+g) = D(f) \cap D(g)$ ، فإن حاصل جمعهما $f + g$ له نهاية محذوفة (نسبياً غير محذوفة) عند النقطة c ويكون

$$\lim_c (f+g) = \lim_c f + \lim_c g,$$

$$\left(\quad \text{Lim}_c (f+g) = \text{Lim}_c f + \text{Lim}_c g \quad \text{على الترتيب} \right)$$

نتائج مشابهة تظل قائمة لمجموعات جبرية أخرى من دوال ، كما يلاحظ بسهولة . النتيجة الآتية ، المتعلقة ، بتركيب دالتين ، أعمق بسيطاً وموضح فيه النهاية غير المحذوفة تكون أبسط من النهاية المحذوفة .

٢٥ – ٦ نظرية . نفرض أن الدالة f لها نطاق $D(f)$ فى R^p ومدى فى R^q وأن g لها نطاق $D(g)$ فى R^q ومدى فى R^r . نفرض أن $g^\circ f$ هى تحصيل الدالتين g ، f ونفرض أن c هى نقطة تجميع للنطاق $D(g^\circ f)$.

(ا) إذا كانت كلتا النهايتين المحذوفتين $b = \lim_c f$ ، $a = \lim_b g$ موجودتان وإذا كانت إما g متصلة عند b أو $f(x) \neq b$ عند x فى جوار النقطة c ، فإن النهاية المحذوفة للمحصلة $g^\circ f$ تكون موجودة عند النقطة c وأن $a = \lim_c g^\circ f$.

(ب) إذا كانت كلتا النهايتين غير المحذوفتين $b = \text{Lim}_c f$ ، $a = \text{Lim}_b g$ موجودتان فإن النهاية غير المحذوفة للمحصلة $g^\circ f$ تكون موجودة عند c ويكون

$$a = \text{Lim}_c\, g \circ f$$

البرهان . (أ) نفرض أن W هى جوار النهاية a فى R^r ، بما أن $a = \lim g$ عند b ، فيوجد جوار V النهاية b بحيث أنه إذا كانت y تنتمى إلى $V \cap D(g)$ ، $y \neq b$ فإن $g(y) \in W$

بما أن $b = \lim f$ عند c ، فيوجد جوار U للنقطة c بحيث أنه إذا كانت x تنتمى إلى $U \cap D(f)$ ، $x \neq c$ ، فإن $f(x) \in V$. ومن ثم ، إذا كانت x تنتمى إلى الفئة الصغرى الممكنة $U \cap D(g \circ f)$ ، $x \neq c$ ، فإن $f(x) \in V \cap D(g)$. إذا كانت $f(x) \neq b$ فى جوار ما U_1 من c ، فينتج أنه عند $x \neq c$ فى $(U_1 \cap U) \cap D(g \circ f)$ فإن $(g \circ f)(x) \in W$ ، أى أن a هى النهاية المحذوفة للمجموعة $g^\circ f$ عند c . إذا كانت g متصلة عند b ، فإن $(g \circ f)(x) \in W$ عند x فى $U \cap D(g \circ f)$ وحيث $x \neq c$.

لبرهنة جزء (ب) ، نلاحظ أن الاستثناءات التى أجريت فى برهان جزء (أ) ليست ضرورية . ومن ثم إذا كانت x تنتمى إلى $U \cap D(g \circ f)$ ، فإن $f(x) \in V \cap D(g)$ ويكون تبعاً لذلك ، $(g \circ f)(x) \in W$.

الاستنتاج فى جزء (أ) للنظرية السابقة ربما يفشل إذا أسقطنا الشرط المذكور وهو أن g متصلة عند b أو أن $f(x) \neq b$ فى جوار النقطة c لبرهنة هذه الملاحظة ، نفرض أن f هى الدالة فى R إلى R المعرفة . بالصيغة (٢٥ - ٣) وبفرض أن $g = f$ ، $c = 0$ فإن $g^\circ f$ تعطى من

$$(g \circ f)(x) = 1, \qquad x \neq 0,$$
$$= 0, \qquad x = 0$$

فضلا عن ذلك ، نجد أن $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ ، $\lim_{y \to 0} g(y) = 0$ حيث من الواضح أن $\lim_{x \to 0} (g \circ f)(x) = 1$ (لاحظ أن النهايتين المحذوفتين لهذه الدوال غير موجودتين) .

نهايات أعلى عند نقطة :

فى الباقى من هذا الباب الحالى ، سنعتبر الحالة عند $q = 1$. أى أن f هى دالة نطاقها D فى R^p وقيمها فى R والنقطة c فى R^p هى نقطة تجميع للنطاق D . سنعرف النهاية الأعلى أو الحد العلوى للدالة f عند النقطة c . مرة ثانية ، توجد إمكانيتان تعتمدان على اعتبار اما جيرات محذوفة أو جيرات غير محذوفة وسوف نناقش كلتا الإمكانيتين . من الواضح أنه يمكننا تعريف النهاية الأدنى بطريقة مشابهة . يلاحظ شيء واحد هنا هو أنه ، مع أن وجود النهاية فى R (محذوفة أو غير محذوفة) هو مسألة دقيقة نسبياً ، فإن للنهايات الأعلى التى تعرف فاعلية أنه إذا كانت f محدودة ، فإن وجودها مضمون .

الأفكار فى هذا الجزء توازى المدلول النهاية الأعلى المتتابعة فى R^p والذى قدم فى باب ١٩ لكن ، سوف لا نفترض معرفتنا بالذى قد تم هناك ، باستثناء بعض التمارين .

٢٥ – ٧ تعريف . نفرض أن f محدودة فى جوار النقطة c . إذا كانت $r > 0$ ، نعرف $\varphi(r)$ ، $\Phi(r)$ بالتعاريف

$$\varphi(r) = \sup\{f(x) : 0 < \|x - c\| < r,\ x \in D\}, \tag{a}$$

$$\Phi(r) = \sup\{f(x) : \|x - c\| < r,\ x \in D\} \tag{b}$$

وضع

$$\limsup_{x \to c} f = \inf\{\varphi(r) : r > 0\}, \tag{c}$$

$$\operatorname{Lim\,sup}_{x \to c} f = \inf\{\Phi(r) : r > 0\} \tag{d}$$

هذه الكميات تسمى النهاية الأعلى المحذوفة ، والنهاية الأعلى غير المحذوفة للدالة f عند c ، على الترتيب .

بما أن هذه الكميات قد عرفت مثل الأدنى للصورة تحت الدالة f لجوار متناقص دائماً للنقطة c ، فمن المحتمل عدم وضوح أنهم يستحقون المصطلحات « نهاية أعلى » المفترض الآتى يدل على تبرير للاصطلاحات .

٢٥ – ٨ مفترض . إذا كانت φ, Φ معرفة كأعلى ، فإن

$$\limsup_{x \to c} f = \lim_{r \to 0} \varphi(r), \tag{a}$$

$$\operatorname{Lim\,sup}_{x \to c} f = \lim_{r \to 0} \Phi(r) \tag{b}$$

البرهان . نلاحظ أنه إذا كانت $0 < r < s$ ، فإن

$$\limsup_{x \to c} f \le \varphi(r) \le \varphi(s)$$

فضلا عن ذلك ، نجد من ٢٥ – ٧ (جـ) ، أنه إذا كانت $\varepsilon > 0$ فيوجد $r_\varepsilon > 0$ بحيث أن

$$\varphi(r_\varepsilon) < \limsup_{x \to c} f + \varepsilon$$

وإذن ، إذا كانت r تحقق $0 < r < r_\varepsilon$ ، نحصل على $|\varphi(r) - \limsup_{x \to c} f| < \varepsilon$ ، التى تثبت (أ) . سيحذف برهان جزء (ب) لأنه مشابه وهو المطلوب اثباته

٢٥ – ٩ مفترض . (أ) إذا كانت $M > \limsup_{x \to c} f$ ، فيوجد جوار U للنقطة c بحيث أن

$$f(x) < M \quad \text{عند} \quad c \neq x \in D \cap U\ .$$

(ب) إذا كانت $M > \operatorname{Lim\,sup}_{x \to c} f$ ، فيوجد جوار U للنقطة c بحيث أن

$$f(x) < M \quad \text{عند} \quad x \in D \cap U$$

البرهان . (أ) من ٢٥ – ٧ (ج) ، نجد أن $M < \inf\{\varphi(r): r>0\}$. ومن ثم يوجد عدد حقيق $r_1 > 0$ بحيث أن $\varphi(r_1) < M$. وإذن يمكننا أخذ $U = \{x \in R^p : \|x - c\| r < r_1\}$ برهان آخر الجزء (ب) يكون مشابهاً .
وهو المطلوب إثباته

٢٥ – ١٠ مفترض . نفرض أن f ، g دالتين محدودتين فى جوار النقطة c ونفرض أن c هى نقطة تجميع النطاق $D(f+g)$ ، فيكون

$$\limsup_{x\to c} (f+g) \le \limsup_{x\to c} f + \limsup_{x\to c} g \qquad (أ)$$

$$\operatorname{Lim}\sup_{x\to c} (f+g) \le \operatorname{Lim}\sup_{x\to c} f + \operatorname{Lim}\sup_{x\to c} g \qquad (ب)$$

البرهان . من العلاقة

$$\sup\{f(x)+g(x) : x \in A\} \le \sup\{f(x) : x \in A\} + \sup\{g(x) : x \in A\}$$

نجد أنه من الواضح ، باستخدام الرمز كما فى تعريف ٢٥ – ٧ ، أن

$$\varphi_{f+g}(r) \le \varphi_f(r) + \varphi_g(r)$$

الآن نستخدم مفترض ٢٥ – ٨ ونجعل $r \to 0$ فنحصل على برهان (أ) .
وهو المطلوب إثباته

ستوجد نتائج مختصة بمجموعات جبرية أخرى فى تمرين ٢٥ – ف .

مع أنه سوف لا نجد فرصة لتتبع هذه الأشياء ، فى بعض قطاعات التحليل فن المفيد أن يكون لدينا التعميم الآتى لمفهوم الاتصال .

٢٥ – ١١ تعريف . يقال لدالة f فى D إلى R أنها نصف متصلة من أعلى عند نقطة c فى D فى حالة

$$f(c) = \operatorname{Lim}\sup_{x\to c} f \qquad (25.4)$$

يقال أنها تكون نصف متصلة من أعلى فى D إذا كانت نصف متصلة من أعلى عند كل نقطة من النطاق D .

بدلا من تعريف نصف الاتصال العلوى بواسطة معادلة (٢٥ – ٤) يمكننا أن نحتاج الشرط المكافىء والأقل شياكة الآتى

$$f(c) \ge \limsup_{x\to c} f \qquad (25.5)$$

يقترح أحد مفاتيح الأهمية والمنفعة للدوال نصف المتصلة من أعلى بالمفترض الآتى ، الذى يمكن مقارنته بنظرية الاتصال الكروى ٢٢ – ١ .

٢٥ – ١٢ مفترض . نفرض أن f دالة نصف متصلة من أعلى بنطاق D فى الفراغ R^p ونفرض أن k عدد حقيق اختيارى . حينئذ يوجد فئة مفتوحة G وفئة مغلقة F بحيث أن

$$(25.6) \quad G\cap D=\{x\in D: f(x)<k\}, \qquad F\cap D=\{x\in D: f(x)\geq k\}$$

البرهان . نفرض أن c هى نقطة فى D بحيث أن $f(c)<k$. يوجد حسب تعريف ٢٥ – ١١ ومفترض ٢٥ – ٩ (ب) ، جوار $U(c)$ للنقطة c بحيث أن $f(x)<k$ لجميع x فى $D\cap U(c)$. يمكننا ، بدون فقد التعميم ، اختيار $U(c)$ بحيث تكون جواراً مفتوحاً ، بوضع

$$G=\bigcup\{U(c): c\in D\}$$

نحصل على فئة مفتوحة بالخاصة المنصوصة فى (٢٥ – ٦) . إذا كانت F متممة G ، فإن F تكون مغلقة فى R^p وتحقق الشرط المنصوص عليه وهو المطلوب إثباته

من الممكن ، باستخدام المفترض المبرهن حالياً ، (تمرين ٢٥ – م) توضيح أنه إذا كانت K فئة جزئية مدمجة من R^p وكانت الدالة f نصف متصلة من أعلى فى K، فإن f تكون محدودة من أعلى فى K وتوجد نقطة فى K حيث f تصل إلى النهاية الأعلى لها . أى أن الدوال نصف المتصلة العليا فى فئات مدمجة لها بعض الخواص التى أثبتناها للدوال المتصلة ، حتى بالرغم من أن دالة نصف متصلة من أعلى يمكن أن يكون لها نقط عدم اتصال .

سيجد القارىء أنه من الممكن امتداد التصور لنهاية أعلى عند نقطة إلى الحالة التى فيها تكون الدالة ليست محدودة وذلك باستخدام أفكار موجودة على طول السطور المعطاة فى نهاية باب ١٨ – بالمثل

يمكن تعريف النهاية الأعلى عندما $x\to\pm\infty$. هذه الأفكار مفيدة ، لكن سنتركها كتمارين

تمرينـــات :

٢٥ – (أ) ناقش وجود كل من النهايات المخنوقة وغير المخنوقة للدوال الآتية عند النقطة $x=0$

(أ) $f(x)=|x|$ (ب) $f(x)=1/x, \quad x\neq 0$

(جـ) $f(x)=x\sin(1/x), \quad x\neq 0$ (د) $f(x)=\sin(1/x), \quad x\neq 0$

(هـ) $f(x)=\begin{cases} x\sin(1/x), & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ (و) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\leq 0\\ 1, & x>0\end{cases}$

٢٥ – (ب) اثبت مفترض ٢٥ – ٢

٢٥ – (ج) إذا كانت f تدل على الدالة المعرفة فى معادلة (٢٥ – ٣) وضح أن النهاية

المحذوفة عند $x = 0$ تساوى صفراً وأن النهاية غير المحذوفة عند $x = 0$ غير موجودة . ناقش وجود هاتين النهايتين المحصلة $f \circ f$.

٢٥ – (د) اثبت مفترض ٢٥ – ٤ .

٢٥ – (هـ) وضح أن النصوص ٢٥ – ٥ (ب)، ٢٥ – ٥ (ج) تدل على نص ٢٥ – ٥ (أ) .

٢٥ – (و) وضح أنه إذا كانت f ، g لهما نهايات محذوفة عند نقطة تجميع c من القيمة $D(f) \cap D(g)$ ، فإن حاصل جمع $f + g$ له نهاية محذوفة عند c وأنه

$$\lim_c (f+g) = \lim_c f + \lim_c g$$

تحت نفس الفرض ، يكون حاصل الضرب النقطى (الداخلى) $f \cdot g$ له نهاية محذوفة عند c وأن

$$\lim_c (f \cdot g) = \left(\lim_c f\right) \cdot \left(\lim_c g\right)$$

٢٥ – (ز) نفرض أن f معرفة فى فئة جزئية $D(f)$ للفراغ R إلى R^q . إذا كانت c أى نقطة تجميع من الفئة $V = \{x \in R : x \in D(f), x > c\}$ وإذا كانت f_1 هى تقييد f إلى V ، فنعرف النهاية المحذوفة اليمنى للدالة f عند النقطة c بأن تكون $\lim_c f_1$ ، طالما كانت هذه النهاية موجودة . أحياناً يرمز لهذه النهاية بالرمز $\lim_{c} f$ أو بالرمز $f(c+0)$. صغ وكون نتيجة مماثلة لنظرية ٢٥ – ٣ للنهاية المحذوفة اليمنى (تعريف مشابه يمكن إعطاؤه النهاية غير المحذوفة اليمنى وكلتى نهايتى الطرف الأيسر عند c) .

٢٥ – (ح) بفرض f معرفة فى $D = \{x \in R : x \geq 0\}$ إلى R . نقول إن عدد L هو النهاية للدالة f عند $+\infty$ إذا كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد حقيقى $m(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $x \geq m(\varepsilon)$ ، فإن $|f(x) - L| < \varepsilon$. فى هذه الحالة نكتب $L = \lim_{x \to +\infty} f$ اكتب فى صورة قانون نتيجة مماثلة لنظرية ٢٥ – ٣ لهذه النهاية وبرهن عليها .

٢٥ – (ط) إذا كانت f معرفة فى فئة $D(f)$ فى R إلى R وإذا كانت c نقطة تجميع من $D(f)$ فنقول إن $f(x) \to +\infty$ عند $x \to c$ ، أو إن

$$\lim_{x \to c} f = +\infty$$

فى حالة وجود، لكل عدد موجب M جوار U للنقطة c بحيث أنه إذا كانت $x \in U \cap D(f),\ x \neq c$ فإن $f(x) > M$. صغ وبرهن نتيجة مماثلة لنظرية ٢٥ – ٣ لهذه النهاية .

٢٥ – (ى) فى ضوء تمرينى ٢٥ – ح ، ٢٥ – ط ، اعط تعريفاً المقصود بالتعبيرين

$$\lim_{x \to +\infty} f = +\infty, \qquad \lim_{x \to c} f = -\infty$$

٢٥ – (ك) كون مفترض ٢٥ – ٨ للنهاية الأعلى غير المحذوفة . اعط البرهان لمفترض ٢٥ – ٩ (ب) .

٢٥ – (ل) عرف ماذا يقصد بالآتى $\limsup_{x\to+\infty} f = L$ ، $\liminf_{x\to+\infty} f = -\infty$.

٢٥ – (م) وضح أنه إذا كانت f دالة نصف متصلة من أعلى فى فئة جزئية مدمجة K ، للفراغ R^p بقيم فى R ، فإن f محدودة من أعلى وتصل إلى النهاية الأعلى الخاصة بها فى K .

٢٥ – (ن) وضح أن دالة نصف متصلة من أعلى فى فئة مدمجة ربما لاتكون محدودة من أسفل وربما لا تصل إلى النهاية الأدنى الخاصة بها .

٢٥ – (س) وضح أنه إذا كانت A فئة جزئية مفتوحة من R^p وإذا كانت f معرفة فى R^p إلى R بأنها $f(x) = 1$ عند $x \in A$ ، $f(x) = 0$ عند $x \notin A$ ، فإن f هى دالة نصف متصلة من أسفل . إذا كانت A فئة جزئية مغلقة فى R^p ، وضح أن f هى نصف متصلة من أعلى .

٢٥ – (ع) اعط مثالا لدالة نصف متصلة من أعلى والتى لها عدد لا نهائى من نقط عدم الاتصال .

٢٥ – (ف) هل صحيح أن دالة فى R^p إلى R تكون متصلة عند نقطة إذا وإذا فقط كانت نصف متصلة من أعلى ومن أسفل عند هذه النقطة ؟

٢٥ – (ص) إذا كانت (f_n) متتابعة محدودة لدوال متصلة فى R^p إلى R وإذا كانت f^* معرفة فى R^p بأنها $f^*(x) = \sup\{f_n(x) : n \in N\}$ عند $x \in R^p$ ، فهل صحيح أن f^* تكون نصف متصلة من أعلى فى R^p ؟

٢٥ – (ق) إذا كانت (f_n) متتابعة محدودة لدوال متصلة فى R^p إلى R وإذا كانت f_* معرفة فى R^p بأنها $f_*(x) = \inf\{f_n(x) : n \in N\}$ عند $x \in R^p$ ، فهل صحيح أن f_* تكون نصف متصلة من أعلى فى R^p ؟

٢٥ – (ر) نفرض أن f معرفة فى فئة جزئية D من $R^p \times R^q$ ويقيم فى R^r . نفرض أن (a, b) نقطة تجميع فى D . مثل تعريف ١٩ – ٤ ، عرف النهاية المزدوجة والنهايتين المكررتين للدالة f عند (a, b) . وضح أن وجود النهايات المزدوجة والمكررة يدل على تساويها . وضح أن النهاية المزدوجة يمكن وجودها بدون وجود أى نهاية مكررة وأن كلتا النهايتين المكررتين يمكن وجودهما متساويتين بدون وجود النهاية المزدوجة .

٢٥ – (ش) نفرض أن f هى مثل التمرين السابق . مثل تعريفى ١٧ – ٤ ، ١٩ – ٨ ، عرف ماذا نقصد بقولنا أن

$$g(y) = \lim_{x\to a} f(x, y)$$

بانتظام عند y فى فئة . صغ و برهن نتيجة مماثلة لنظرية ١٩ — ١٠ .

٢٥ — (ت) نفرض أن f كما فى تعريف ٢٥ — ١ ونفرض أن النهاية المحذوفة عند c موجودة وأنه لعنصر ما A فى R^q ، $r > 0$ المتباينة $\|f(x) - A\| < r$ تظل قائمة فى جوار ما للنقطة c . اثبت أن $\|\lim_c f - A\| \le r$ هى نفس الاستنتاج يظل قائما لنهاية غير محذوفة ؟

٢٥ — (ث) افحص نصف الاتصال الأعلى والأسفل للدوال فى جزئ (ز) ، (ح) لمثال ٢٠ — ٥ .

٢٥ — (خ) إذا كانت $f: [0, +\infty) \to R$ متصلة فى $[0, +\infty)$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. اثبت أن f متصلة بانتظام فى $[0, +\infty)$

الباب السادس والعشرون — بعض نتائج أبعد :

سنقدم بعض نظريات فى هذا الباب والتى سوف لا تستخدم فيما بعد فى هذا الكتاب ، لكنها غالباً مفيدة فى التوبولوجى والتحليل .

النتائج الأولى تكون امتدادات بعيدة الأثر لنظرية تقريب ڤيرشتراس ، وبعد ذلك توجد نظرية تعطى شروط تكون دالة متصلة لها امتداد متصل ، والنتيجة النهائية تكون مماثلة لنتيجة بولتزانو — ڤيرشتراس فى الفراغ $C_{pq}(K)$ لدوال متصلة فئة مدمجة K .

نظرية ستون — ڤيرشتراس :

لتبسيط مناقشتنا ، ندخل المصطلحات الآتية : إذا كانت f ، g دالتين بنطاق D فى R^p وقيم فى R ، فإن الدالتين h ، k المعرفتين عند x فى D بأنهما

$$h(x) = \sup\{f(x), g(x)\}, \qquad k(x) = \inf\{f(x), g(x)\}$$

يسميان الأعلى والأدنى ، للدالتين f ، g . على الترتيب . إذا كانت f ، g متصلتان فى D ، فإن كلا من h ، k متصلتان . هذا ينتج من نظرية ٢٠ — ٧ وملاحظة أنه إذا كانت b و a عددين حقيقين ، فإن

$$\sup\{a, b\} = \tfrac{1}{2}\{a + b + |a - b|\},$$
$$\inf\{a, b\} = \tfrac{1}{2}\{a + b - |a - b|\}$$

الآن نكتب صورة واحدة من تعميم ستون (*) لنظرية تقريب ڤيرشتراس . بالرغم من

(*) مارشال . ستون (١٩٠٣ —) تعلم فى هارفارد ودرس فى هارفارد وجامعتى شيكاغو وماساشوستس . كان ابن رئيس للعدل . وله مساهمات بناءة فى التحليل العددى ، خاصة فى نظريات فراغ هيلبرت والجبر البولياني .

اكتشافها حديثاً فقد أصبحت من قبل « مأثورية أو كلاسيكية » ويجب أن تكون جزءاً من خلفية كل طالب فى الرياضيات . يجب على القارئ الرجوع إلى مقالة ستون المدونة فى المراجع لزيادة المعلومات والتطبيقات حيث المناقشات والأبحاث أكثر اكتمالا من المعروضة هنا .

٢٦ – ١ نظرية تقريب ستون . نفرض أن K فئة جزئية مدمجة من $\boldsymbol{R}^p$ ونفرض أن $\mathscr{L}$ مجموعة دوال متصلة فى K إلى $\boldsymbol{R}$ ذات الخواص :

(أ) إذا كانت g و f تنتمى إلى $\mathscr{L}$ ، فإن $\inf\{f, g\}$، $\sup\{f, g\}$ تنتمى إلى $\mathscr{L}$

(ب) إذا كانت $a, b \in \boldsymbol{R}$ ، $x \neq y \in K$ ، فإنه توجد دالة f فى $\mathscr{L}$ بحيث أن $f(x) = a, f(y) = b$.

ومن ثم أى دالة متصلة فى K إلى $\boldsymbol{R}$ يمكن تقريبها بانتظام فى K بدوال فى $\mathscr{L}$.

البرهان . نفرض أن F دالة متصلة فى K إلى $\boldsymbol{R}$. إذا كانت y و x تنتميان إلى K ، فنفرض أن $g_{xy} \in \mathscr{L}$ بحيث أن $g_{xy}(x) = F(x)$ و $g_{xy}(y) = F(y)$ بما أن الدوال F, g_{xy} متصلة ولها نفس القيمة عند y ، بأخذ $\varepsilon > 0$ ، فيوجد جوار مفتوح $U(y)$ عند y بحيث أنه إذا كانت z تنتمى إلى $K \cap U(y)$ فإن

$$g_{xy}(z) > F(z) - \varepsilon \tag{26.1}$$

بجعل x ثابتة وباختيار لكل $y \in K$ ، جوارا مفتوحاً $U(y)$ له هذه الخاصية من الإدماج للفئة الجزئية K ، ينتج أن K تكون محتوية فى عدد محدود من مثل هذه الجيرات : $U(y_1), \ldots, U(y_n)$. إذا كانت $h_x = \sup\{g_{xy_1}, \ldots, g_{xy_n}\}$ ، فإنه ينتج من علاقة (٢٦ – ١) أن

$$h_x(z) > F(z) - \varepsilon \quad \text{عند} \quad z \in K \tag{26.2}$$

بما أن $g_{xy}(x) = F(x)$ ، فيلاحظ أن $h_x(x) = F(x)$ ومن ثم يوجد جوار مفتوح $V(x)$ عند x بحيث أنه إذا كانت z تنتمى إلى $K \cap V(x)$ ، فإن

$$h_x(z) < F(z) + \varepsilon \tag{26.3}$$

وبجعل K مدمجة مرة أخرى نحصل على عدد محدود من المتاخمات $V(x_1), \ldots, V(x_m)$ وبوضع $h = \inf\{h_{x_1}, \ldots, h_{x_m}\}$. نجد أن h تنتمى إلى $\mathscr{L}$ وينتج من (٢٦ – ٢) أن

$$h(z) > F(z) - \varepsilon \quad \text{عند} \quad z \in K$$

ومن (٢٦ – ٣) ينتج أن

$$h(z) < F(z) + \varepsilon \quad \text{عند} \quad z \in K$$

وباتحاد هذه النتائج ، نحصل على $|h(z)-F(z)|<\varepsilon,\ z\in K$ التى تعطى التقريب المطلوب وهو المطلوب إثباته .

سيلاحظ القارىء أن النتيجة السابقة لم تستخدم نظرية تقريب ڤيرشتراس فى النتيجة الآتية ، سنستعيض عن شرط (أ) السابق بثلاثة شروط جبرية لفئة الدوام سنستخدم هنا نظرية ڤيرشتراس المأثورية (الكلاسيكية) ٢٤ - ٨ فى الحالة الخاصة للقيمة المطلقة لدالة φ المعرفة عند t فى R بأنها $\varphi(t)=|t|$ ، لاستنتاج أن φ يمكن تقريبها بكثيرات الحدود فى كل فئة مدمجة لأعداد حقيقية .

٢٦ - ٢ نظرية ستون - ڤيرشتراس . نفرض أن K فئة جزئية مدمجة من R^p ونفرض أن $\mathscr{A}$ مجموعة من دوال متصلة فى K إلى R ذات الخواص :

(أ) الدالة الثابتة $e(x)=1,\ x\in K$ تنتمى إلى $\mathscr{A}$.

(ب) إذا كانت g و f تنتميان إلى $\mathscr{A}$ ، فإن $\alpha f+\beta g$ تنتمى إلى $\mathscr{A}$ لكل β و α فى R .

(جـ) إذا كانت g و f تنتمى إلى $\mathscr{A}$ ، فإن fg تنتمى إلى $\mathscr{A}$

(د) إذا كانت $x\neq y$ نقطتين من K ، فإنه توجد دالة f فى $\mathscr{A}$ بحيث أن $f(x)\neq f(y)$

إذن أى دالة متصلة فى K إلى R يمكن تقريبها بانتظام فى K بدوال فى $\mathscr{A}$

البرهان . نفرض أن $a, b\in R$ ، $x\neq y$ تنتمى إلى K . حسب (د) ، توجد دالة f فى $\mathscr{A}$ بحيث أن $f(x)\neq f(y)$. بما أن $e(x)=1=e(y)$ ، فنجد أنه توجد أعداد حقيقية α, β بحيث أن

$$\alpha f(x)+\beta e(x)=a, \qquad \alpha f(y)+\beta e(y)=b$$

لذلك توجد ، من جزء (ب) دالة $g\in\mathscr{A}$ بحيث أن $g(y)=b$ ، $g(x)=a$.

الآن نفرض أن $\mathscr{L}$ هى مجموعة لكل الدوال المتصلة فى K التى يمكن تقريبها بانتظام بدوال فى $\mathscr{A}$. من الواضح أن $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{L}$ ، لذلك $\mathscr{L}$ لها خاصية (ب) من نظرية تقريب ستون ٢٦ - ١ . سنوضح الآن أنه إذا كانت $h\in\mathscr{L}$ ، فإن $|h|\in\mathscr{L}$ بما أن

$$\sup\{f, g\}=\tfrac{1}{2}(f+g+|f-g|),$$
$$\inf\{f, g\}=\tfrac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

وهذا سوف يدل على أن $\mathscr{L}$ لها خاصية ٢٦ - ١ (أ) ومن ثم كل دالة متصلة فى K إلى R تنتمى إلى $\mathscr{L}$.

بما أن h متصلة ، K مدمجة ، فينتج أنه يوجد $M > 0$ بحيث أن $\|h\|_K \le M$. بما أن $h \in \mathscr{S}$ فتوجد متتابعة (h_n) لدوال فى $\mathscr{A}$ بحيث تتقارب بانتظام إلى h فى K ويمكننا فرض أن $\|h_n\|_K \le M+1$ لكل $n \in N$ (لماذا ؟) . إذا أعطينا $\varepsilon > 0$ فنستخدم الآن نظرية تقريب ڤيراشتراس ٢٤ — ٨ لدالة القيمة المطلقة فى الفترة $[-(M+1), M+1]$ لنحصل على كثيرة حدود p_ε ، بحيث أن

$$\big||t| - p_\varepsilon(t)\big| \le \tfrac{1}{2}\varepsilon \qquad \text{عند} \qquad |t| \le M+1$$

لذلك ينتج أن

$$\big||h_n(x)| - p_\varepsilon(h_n(x))\big| \le \tfrac{1}{2}\varepsilon \qquad \text{عند} \qquad x \in K$$

الآن $p_\varepsilon \circ h_n$ تنتميان إلى $\mathscr{A}$ بسبب فرضنا (أ) ، (ب) ، (ج) . بما أن

$$\big||h(x)| - |h_n(x)|\big| \le \|h - h_n\|_K$$

فينتج أنه إذا كانت n كبيرة كبراً كافياً ، فإن

$$\big||h(x)| - p_\varepsilon \circ h(x)\big| \le \varepsilon \qquad \text{عند} \qquad x \in K$$

بما أن $\varepsilon > 0$ اختيارية ، فنستنتج أن $|h| \in \mathscr{L}$ وتنتج النتيجة المطلوبة الآن من النظرية السابقة .

الآن نحصل على صورة أدق من نظرية ٢٤ — ٨ كحالة خاصة من نظرية ڤيرشتراس ، صورة من نظرية ٢٤ — ٨ أقوى ، هذه النتيجة تقوى النتيجة الأخيرة بطريقتين : (i) السماح للنطاق بأن يكون فئة جزئية مدمجة اختيارية من R^p وليست بالضبط خلية مدمجة فى الفراغ R ، (ii) السماح للمدى بأن يقع فى أى فراغ R^q وليس بالضبط R لفهم النص ، سنتذكر أن دالة f بنطاق D فى R^p ومدى فى R^q يمكن اعتبارها مثل دوال عددها q فى D إلى R بواسطة تمثيل الاحداثى :

$$(26.4) \qquad f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x)) \qquad \text{عند} \qquad x \in D$$

إذا كانت كل من دالة الاحداثى f_j كثيرة حدود فى p احداثيات $(x_1, \ldots, x_p)$ فإننا نقول إن f دالة كثيرة الحدود .

٢٦ — ٣ نظرية تقريب كثيرة حدود . إذا كانت f دالة متصلة نطاقها K هو فئة مدمجة للفراغ R^p ومداها ينتمى إلى الفراغ R^q وبفرض $\varepsilon > 0$. فتوجد دالة كثيرة الحدود p فى R^p إلى R^q بحيث أن $\|f(x) - p(x)\| < \varepsilon$ عند $x \in K$

البرهان . تمثل f بدوال الاحداثى q كما فى (٢٦ — ٤) . وبما أن f متصلة فى K ، فإن كلا من دوال الاحداثى f_j تكون متصلة فى K إلى R . من الواضح أن الدوال كثيرة

الحدود المعرفة فى $\mathbf{R}^p$ إلى $\mathbf{R}$ تحقق خواص نظرية ستون – ڤيرشتراس ومن ثم دالة الاحداثى f_j يمكن تقريبها بانتظام فى K داخل $\varepsilon/\sqrt{q}$ بدالة كثيرة الحدود p_j وبفرض p معرفة بأنها

$$p(x) = (p_1(x), \ldots, p_q(x))$$

فنحصل على دالة كثيرة حدود من $\mathbf{R}^p$ إلى $\mathbf{R}^q$ بحيث تعطى التقريب المطلوب فى K إلى الدالة المعطاة f . وهو المطلوب إثباته .

امتداد دوال متصلة :

يكون أحياناً من المرغوب إجراء إمتداد النطاق لدالة متصلة إلى فئة أكبر بدون تغيير قيم النطاق الأصلى . يمكن إجراء هذا دائما بطريق سهل جداً وذلك بتعريف الدالة فإن قيمها صفر خارج النطاق الأصلى ، لكن هذه الطريقة للمد فى الحالة العامة لا تعطى دالة متصلة . بعد بعض التأمل ، سيرى القارىء أنه ليس دائماً ممكناً الحصول على مد متصل . مثال ذلك ، إذا كانت $D = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}$ وإذا كانت f معرفة عند $x \in D$ بالتعريف $f(x) = 1/x$ حينئذ ليس ممكناً إيجاد طريقة لامتداد f بحيث نحصل على دالة متصلة فى جميع الفراغ $\mathbf{R}$. لكن ، من المهم أن نعرف أن الامتداد يكون دائماً ممكناً عندما يكون النطاق فئة مغلقة . وبالإضافة إلى ذلك نجد أنه ، ليس من الضرورى زيادة الحد للدالة (إذا كانت محدودة) .

قبل أن نبرهن نظرية الامتداد هذه نلاحظ أنه إذا كانت B ، و A فئتين جزئيتين غير متصلتين للفراغ $\mathbf{R}^p$ ، فتوجد دالة متصلة φ معرفة فى $\mathbf{R}^p$ بقيم فى $\mathbf{R}$ بحيث أن

$$\varphi(x) = 0, \quad x \in A; \qquad \varphi(x) = 1, \quad x \in B; \qquad 0 \leq \varphi(x) \leq 1, \quad x \in \mathbf{R}^p$$

فى الحقيقة ، إذا كانت $d(x, A) \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$ ، $d(x, B) = \inf\{\|x - y\| : y \in B\}$ فإنه يمكننا تعريف φ عند $x \in \mathbf{R}^p$ بالمعادلة

$$\varphi(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

٢٦ – ٤ نظرية امتداد تيتز (*). بفرض أن f دالة متصلة محدودة ومعرفة فى فئة جزئية مغلقة D للفراغ $\mathbf{R}^p$ وبقيم فى $\mathbf{R}$. حينئذ . توجد دالة متصلة g فى الفراغ $\mathbf{R}^p$ إلى $\mathbf{R}$ بحيث أن $g(x) = f(x)$ عند x فى D وبحيث أن $\sup\{\|g(x)\| : x \in \mathbf{R}^p\} = \sup\{\|f(x)\| : x \in D\}$

البرهان . نفرض أن $M = \sup\{|f(x)| : x \in D\}$ ونعتبر $A_1 = \{x \in D : f(x) \leq -M/3\}$ و $B_1 = \{x \in D : f(x) \geq M/3\}$. من اتصال f وحقيقة

(*) هينريس تيتز (١٨٨٠ – ١٩٦٤) كان أستاذاً فى ميونيخ وساهم فى التوبولوچى والهندسة والجبر . ونظرية الامتداد هذه ترجع إلى عام ١٩١٤

كون أن D مغلقة ، ينتج من نظرية ٢٢ – ١ (ج) أن B_1 و A_1 فئتان جزئيتان مغلقتان فى الفراغ R^p . حسب الملاحظة السابقة لنص النظرية ، توجد دالة متصلة φ_1 فى R^p إلى R بحيث أن

$$\varphi_1(x) = -\tfrac{1}{3}M, \quad x \in A_1; \qquad \varphi_1(x) = \tfrac{1}{3}M, \quad x \in B_1;$$
$$-\tfrac{1}{3}M \le \varphi_1(x) \le \tfrac{1}{3}M, \quad x \in R^p$$

الآن نضع $f_2 = f - \varphi_1$ ونلاحظ أن f_2 متصلة فى D وأن $\sup\{|f_2(x)| : x \in D\} \le \tfrac{2}{3}M$.

بالاستمرار ، تعرف $A_2 = \{x \in D : f_2(x) \le -\tfrac{1}{3}\tfrac{2}{3}M\}$ ، $B_2 = \{x \in D ; f_2(x) \ge \tfrac{1}{3}\tfrac{2}{3}M\}$ ونحصل على دالة متصلة φ_2 فى R^p إلى R بحيث أن

$$\varphi_2(x) = -\tfrac{1}{3}\tfrac{2}{3}M, \quad x \in A_2; \qquad \varphi_2(x) = -\tfrac{1}{3}\tfrac{2}{3}M, \quad x \in B_2;$$
$$-\tfrac{1}{3}\tfrac{2}{3}M \le \varphi_2(x) \le \tfrac{1}{3}\tfrac{2}{3}M, \quad x \in R^p$$

بعد إجراء هذا ، نضع $f_3 = f_2 - \varphi_2$ ونلاحظ أن $f_3 = f - \varphi_1 - \varphi_2$ متصلة فى D وأن $\sup\{|f_3(x)| : x \in D\} \le (\tfrac{2}{3})^2 M$.

بالاستمرار بنفس هذه الطريقة ، نحصل على متتابعة (φ_n) لدوال معرفة فى R^p إلى R بحيث أنه ، لكل n

$$|f(x) - [\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x)]| \le (\tfrac{2}{3})^n M \tag{26.5}$$

لكل x فى D وبحيث أن

$$|\varphi_n(x)| \le (\tfrac{1}{3})(\tfrac{2}{3})^{n-1}M \quad \text{عند} \quad x \in R^p \tag{26.6}$$

نفرض أن g_n معرفة فى R^p الى R بأنها $g_n = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n$ ، ومن ثم ينتج أن g_n متصلة . نستنتج من المتباينة (٢٦ – ٦) أنه اذا كانت $m \ge n$ ، $x \in R^p$ ، فإن

$$|g_m(x) - g_n(x)| = |\varphi_{n+1}(x) + \cdots + \varphi_m(x)| \le (\tfrac{1}{3})(\tfrac{2}{3})^n M[1 + \tfrac{2}{3} + (\tfrac{2}{3})^2 + \cdots] \le (\tfrac{2}{3})^n M$$

التى تثبت أن المتتابعة (g_n) تتقارب بانتظام فى R^p لدالة سوف نرمز لها بالرمز g . بما أن كلا من g_n متصلة فى R^p ، فينتج من نظرية ٢٤ – ١ أن g متصلة عند كل نقطة فى الفراغ R^p يلاحظ أيضاً من المتباينة (٢٥ – ٦) أن $|f(x) - g_n(x)| \le (\tfrac{2}{3})^n M$ عند $x \in D$. لذلك نستنتج ، أن $f(x) = g(x)$ عند x فى D أخيرا تدل متباينة (٢٦ – ٦) على أنه لأى x فى الفراغ R^p يكون

$$|g_n(x)| \le \tfrac{1}{3}M[1 + \tfrac{2}{3} + \cdots + (\tfrac{2}{3})^{n-1}] \le M$$

التي تفرض النص الأخير للنظرية وهو المطلوب إثباته .

٢٦ – ٥ نتيجة . بفرض أن f دالة متصلة محدودة معرفة فى فئة جزئية مغلقة D من R^p ويقيم فى R^q حينئذ يوجد دالة متصلة g فى R^p إلى R^q حيث $g(x) = f(x)$ لأجل x فى D وبحيث أن

$$\sup\{\|g(x)\| : x \in R^p\} \le \sqrt{q}\,\sup\{\|f(x)\| : x \in D\}$$

البرهان . هذه النتيجة قد برهنت حالا عند $q = 1$. فى الحالة العامة ، نلاحظ أن f تعرف q من دوال الأحداثى بقيم موجبة متصلة فى D ، ولتكن

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_q(x))$$

حيث أن كلا من الدوال f_j ، $1 \le j \le q$ امتداد متصل g_j فى R^p إلى R ، فنعرف g فى R^p إلى R^q بأنها $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_q(x))$. يلاحظ أن الدالة g لها الخواص المطلوبة . وهو المطلوب إثباته

تساوى الاتصال :

قد استعملنا تكراراً نظرية بولتزانو – فيرشتراس ١٠ – ٦ للفئات (التى تؤكد أن كل فئة جزئية محدودة لا نهائية للفراغ R^p نقطة تجميع) والنظرية المناظرة ١٦ – ٤ للمتتابعات (التى تؤكد أن كل متتابعة محدودة فى R^p لها متتابعة جزئية تقاربية) . نقدم الآن نظرية مماثلة تماماً لنظرية بولتزانو – فيرشتراس باستثناء كونها تتعلق بفئات دوال متصلة وليست فئات فقط . وللاختصار والتبسيط ، سوف نقدم هنا فقط الصورة التابعة لهذه النظرية .

سنفرض فيما يلى أن K فئة جزئية مدمجة ثابتة من الفراغ R^p ، وسوف نعتبر دوال متصلة فى K ومداها فى R^q . وحسب نظرية ٢٢ – ٥ تكون كل دالة مثل هذه الدالة محدودة ، ومن ثم $C_{pq}(K) = BC_{pq}(K)$. نقول إن فئة $\mathcal{F}$ فى $C_{pq}(K)$ محدودة (أو محدودة بانتظام) فى K إذا كان يوجد مقدار ثابت M بحيث أن $\|f\|_K \le M$ ، لكل f فى $\mathcal{F}$. من الواضح أن أى فئة محدودة $\mathcal{F}$ لمثل هذه الدوال تكون محدودة ، لأنه إذا كان $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ ، فيمكننا أخذ

$$M = \sup\{\|f_1\|_K, \|f_2\|_K, \ldots, \|f_n\|_K\}$$

وفى الحالة العامة ، فئة لا نهائية لدوال متصلة فى K إلى R^q سوف لا تكون محدودة . مع أن متتابعة تقاربية منتظمة لدوال متصلة تكون محدودة (تمرين ٢٦ – م) .

إذا كانت f دالة متصلة فى الفئة المدمجة K للفراغ R^p ، فإن نظرية ٢٣ – ٣

تعنى أنها متصـــلة بانتظام . ومن ثم ، إذا كانت $\varepsilon > 0$ فيوجد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث أنه إذا كانت y و x تنتميان إلى K ، $\|x-y\| < \delta(\varepsilon)$ ، فإن $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$
طبعاً ، يمكن أن تعتمد القيمة δ على الدالة f كما تعتمد أيضاً على ε ولذلك نكتب غالباً $\delta(\varepsilon, f)$ عند تعاملنا مع أكثر من دالة واحدة يكون حسناً الإشارة إلى هذا الاعتماد صراحة .

نلاحظ أنه إذا كانت $\mathscr{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ فئة محدودة فى $C_{pq}(K)$ فإنه بوضع

$$\delta(\varepsilon, \mathscr{F}) = \inf\{\delta(\varepsilon, f_1), \ldots, \delta(\varepsilon, f_n)\}$$

نحصل على δ التى « تعمل » لكل الدوال فى هذه الفئة المحدودة .

٢٦ – ٦ تعريف . يقال لفئة $\mathscr{F}$ للدوال فى K إلى R^q أنها متساوية الاتصال بانتظام فى K إذا كان يوجد لكل عدد حقيقى $\varepsilon > 0$ عدد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث أنه إذا كانت y و x تنتميان إلى K ، $\|x - y\| < \delta(\varepsilon)$ ، f دالة فى $\mathscr{F}$ ، فإن $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

قد اتضح أن فئة محدودة لدوال متصلة فى K متساوية الاتصال . والفرض بأن متتابعة لدوال متصلة والتى تتقارب بانتظام فى K تكون أيضاً متساوية الاتصال صحيح أيضا (تمرين ٢٦ – ن) .

ينتج أنه لكى تكون متتابعة فى $C_{pq}(K)$ تقـــاربية بانتظام فى K ، يكون من الضرورى أن المتتابعة تكون محدودة ومتساوية الاتصال بانتظام فى K . الآن سوف نوضح أن هاتين الخاصيتين ضروريتان وكافيتان لفئة $\mathscr{F}$ فى $C_{pq}(K)$ لها الخاصية التى تقول إن لكل متتابعة لدوال من $\mathscr{F}$ متتابعة جزئية تتقارب بانتظام فى K . هذه يمكن اعتبارها كحالة عامة لنظرية ڤيرشتراس – بولتزانو لفئات دوال متصلة وتلعب دوراً هاماً فى نظرية المعادلات الفاضلية ومعادلات التكامل .

٢٦ – ٧ نظرية أرتزيلا – أسكولى(*) . نفرض أن K فئة جزئية مدمجة للفراغ R^p ونفرض أن $\mathscr{F}$ مجموعة من دوال متصلة فى K ولها قيم فى الفراغ R^q . فإن الخواص الآتية تكون متكافئة :

(أ) العائلة $\mathscr{F}$ محدودة ومتساوية الاتصال بانتظام فى K

(*) سيزار ارتزيلا (١٨٤٧ – ١٩١٢) كان أستاذا فى بولندا . أعطى الشروط الضرورية والكافية لكى تكون نهاية متتابعة لدوال متصلة فى فترة مغلقة متصلة ، ودرس موضوعات مرتبطة بها .

جيوليو أسكولى (١٨٤٣ – ١٨٩٦) ، كان أستاذا فى ميلانو ، صاغ التعريف لتساوى الاتصال فى وضع هندسى . وله إسهام لمتسلسلة فورير .

(ب) لكل متتابعة من $\mathscr{F}$ متتابعة جزئية تقاربية بانتظام فى K .

البرهان . سوف نوضح أولا أنه إذا كان شرط (أ) غير صحيح ، أيضاً فإن الشرط (ب) يكون أيضاً غير صحيح . إذا كانت $\mathscr{F}$ غير محدودة ، فتوجد متتابعة (f_n) فى $\mathscr{F}$ بحيث أن $\|f_n\|_K \geq n$ عند $n \in N$. لكن حينئذ لا يمكن لمتتابعة جزئية للمتابعة (f_n) أن تكون تقاربية منتظمة . أيضاً إذا كانت الفئة $\mathscr{F}$ ليست متساوية الاتصال بانتظام ، فإنه توجد عند بعض $\varepsilon_0 > 0$ (لماذا ؟) متتابعة (f_n) فى $\mathscr{F}$ ومتتابعات (x_n) ، (y_n) فى K عند $\|x_n - y_n\| < 1/n$ لكن بحيث أن $\|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| > \varepsilon_0$. لكن حينئذ لا يمكن لمتتابعة جزئية للمتتابعة (f_n) أن تتقارب بانتظام فى K .

الآن سنوضح أنه ، إذا كانت الفئة $\mathscr{F}$ تحقق (أ) ، فإنه بأخذ أى متتابعة (f_n) فى $\mathscr{F}$ توجد متتابعة جزئية تتقارب بانتظام فى K . لإجراء هذا نلاحظ أنه ينتج من تمرين ١٠ – ح وجود فئة C معدودة . فى K بحيث أنه إذا كانت $y \in K$ ، $\varepsilon > 0$ ، فيوجد عنصر x فى C بحيث أن $\|x - y\| < \varepsilon$ إذا كانت $C = \{x_1, x_2, \ldots\}$ فان المتتابعة $(f_n(x_1))$ محدودة فى R^q وينتج من نظرية بولتزانو – فيرشتراس ١٦ – ٤ أنه توجد متتابعة جزئية تقاربية .

$$(f_1{}^1(x_1), f_2{}^1(x_1), \ldots, f_n{}^1(x_1), \ldots)$$

للمتتابعة $(f_n(x_1))$ بعد ذلك نلاحظ أن المتتابعة $(f_k{}^1(x_2) : k \in N)$ محدودة فى R^q ، ومن ثم يكون لها متتابعة جزئيـة .

$$(f_1{}^2(x_2), f_2{}^2(x_2), \ldots, f_n{}^2(x_2), \ldots)$$

والتى تتقارب . مرة أخرى ، المتتابعة $(f_n{}^2(x_3) : n \in N)$ محدودة فى R^q ، لذلك تكون متتابعة جزئية ما

$$(f_1{}^3(x_3), f_2{}^3(x_3), \ldots, f_n{}^3(x_3), \ldots)$$

تقاربية . نستمر فى هذا الطريق وبعد ذلك نضع $g_n = f_n{}^n$ بحيث أن g_n هى الدالة النونية فى المتتابعة الجزئية النونية . من الواضح أنه من التركيب تكون المتتابعة (g_n) تقاربية عند كل نقطة للفئة C .

سنبرهن الآن أن المتتابعة (g_n) تتقارب عند كل نقطة من K وأن التقارب يكون منتظما . لإجراء هذا ، نفرض أن $\varepsilon > 0$ ، ونفرض أن $\delta(\varepsilon)$ معرفة كما فى ٢٦ – ٦ . نفرض أن $C_1 = \{y_1, \ldots, y_k\}$ فئة جزئية محدودة للفئة C بحيث أن كل نقطة فى K تكون داخل $\delta(\varepsilon)$ لنقطة ما فى C_1 . بما أن المتتابعات

$$(g_n(y_1)), (g_n(y_2)), \ldots, (g_n(y_k))$$

تتقارب ، فيوجد عدد طبيعي M بحيث أنه إذا كانت $m, n \geq M$ فإن

$$\|g_m(y_i) - g_n(y_i)\| < \varepsilon \quad \text{عند} \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

بأخذ $x \in K$ ، يوجد $y_j \in C_1$ بحيث أن $\|x - y_j\| < \delta(\varepsilon)$. ومن ثم نجد من تساوى الاتصال المنتظم أن $\|g_n(x) - g_n(y_j)\| < \varepsilon$ لكل $n \in N$ ، بوجه خاص ، هذه المتباينة تظل قائمة عند $n \geq M$. لذلك ، نجد أن

$$\|g_n(x) - g_m(x)\| \leq \|g_n(x) - g_n(y_j)\| + \|g_n(y_j) - g_m(y_j)\| + \|g_m(y_j) - g_m(x)\| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

على شرط $m, n \geq M$. هذا يوضح أن

$$\|g_n - g_m\|_K \leq 3\varepsilon \quad \text{عند} \quad m, n \geq M$$

وإذن ينتج التقارب المنتظم للمتتابعة (g_n) فى K من معيار كوشى للتقارب المنتظم ، المعطى فى ١٧ – ١١ وهو المطلوب إثباته .

ركبنا فى البرهان لهذه النتيجة ، متتابعة لمتتابعات جزئية لدوال وبعد ذلك اخترنا متتابعة القطر (g_n) ، حيث $g_n = f_n^n$. يسمى غالباً مثل هذا التركيب « عملية قطرية » أو « طريقة كانتور النظرية » وهى مفيدة باستمرار . يجب على القارىء أن يتذكر أنه قد استعمل نموذج مشابه من المجادلة والبحث فى باب ٣ لبرهنة أن الأعداد الحقيقية لا تكون فئة قابلة للعد .

تمرينـــات :

٢٦ – (أ) وضح أن شرط (أ) من نظرية ٢٦ – ١ يكافىء للشرط : (أ) إذا كانت f تنتمى إلى $\mathcal{L}$ فإن $|f|$ تنتمى إلى $\mathcal{L}$.

٢٦ – (ب) أثبت أن كل دالة حقيقية القيمة ومتصلة فى الفترة $[0, \pi]$ تكون النهاية المنتظمة المتتابعة «لكثيرات الحدود فى $\cos x$» (أى أنه ، لدوال (P_n) ، حيث $P_n(x) = p_n(\cos x)$ عند كثيرة حدود ما p_n) .

٢٦ – (ج) وضح أن كل دالة حقيقية القيمة ومتصلة فى $[0, \pi]$ هى النهاية المنتظمة لمتتابعة الدوال على الصورة .

$$x \mapsto a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx$$

٢٦ – (د) وضح لماذا تفشل النتيجة فى تمرين ٢٦ – ب ذا استبدلنا $\cos kx$ بالمقدار $\sin kx$ ، $k \in N$.

٢٦ – (ه) استخدم تمرين ٢٦ – ج لإثبات أن كل دالة حقيقية القيمة متصلة f فى $[0, \pi]$ ، حيث $f(0) = f(\pi)$ تكون النهاية المنتظمة لمتتابعة دوال على الصورة

$$x \mapsto b_0 + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx$$

٢٦ – (و) استخدم تمرينى ٢٦–ج ، ٢٦–هـ لتوضيح أن كل دالة حقيقية القيمة متصلة f فى $[-\pi, \pi]$ ، حيث $f(-\pi) = f(\pi)$ هى النهاية المنتظمة لمتابعة دوال على الصورة .

$$x \mapsto a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

[ارشاد : اقسم f : إلى حاصل الجمع $f = f_e + f_o$ لدالة زوجية $f_e(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ ودالة فردية $f_o(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$].

٢٦ – (ز) اعط برهانا التمرين السابق متوقفا على استخدام نظرية ٢٦–٣ لدائرة الواحدة $T = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ وملاحظة أنه يوجد تناظر أحادى بين دوال متصلة فى T إلى R ودوال متصلة فى $[-\pi, \pi]$ إلى R بحيث تحقق العلاقة $f(-\pi) = f(\pi)$.

٢٦ – (ح) بفرض $J \subseteq R$ فترة مدمجة وبفرض أن $\mathscr{A}$ هى مجموعة من دوال متصلة فى $J \to R$ بحيث تحقق خواص نظرية ستون – فيرشتراس ٢٦ – ٢ . اثبت أن أى دالة متصلة فى $J \times J$ (فى R^2) إلى R يمكن تقريبها بانتظام بدوال على الصورة .

$$f_1(x)g_1(y) + \cdots + f_n(x)g_n(y)$$

حيث f_i, g_i تنتميان إلى $\mathscr{A}$.

٢٦ – (ط) اثبت أن نظرية تيتز ٢٦ – ٤ ربما تفشل إذا كان النطاق ليس مغلقاً .

٢٦ – (ى) استخدم نظرية تيتز ٢٦ – ٤ لتوضح أنه إذا كانت $D \subseteq R^p$ مغلقة وإذا كانت f دالة متصلة غير محدودة فى $D \to R$ ، فإنه يوجد امتداد متصل للدالة f لكل الفراغ R^p
(إرشاد : اعتبر التركيب $\phi \circ f$ ، حيث $\phi(x) = \text{Arc} \tan x$ أو $\phi(x) = x/(1+x)$)

٢٦ – (ك) بفرض $\mathscr{F}$ مجموعة من دوال فى $D \subseteq R^p$ إلى R^q . اعتبر الخاصية عند النقطة : $c \in D$ التى تقول إنه إذا كانت $\varepsilon > 0$ فيوجد $\delta(c, \varepsilon) > 0$ بحيث أنه إذا كانت $x \in D$ ، $\| x - c \| < \delta(c, \varepsilon)$ فإن $\| f(x) - f(c) \| < \varepsilon$ لكل $f \in \mathscr{F}$. وضح أن للمجموعة $\mathscr{F}$ هذه الخاصية عند $c \in D$ إذا وإذا فقط كانت كل متتابعة (x_n) فى D عند $c = \lim (x_n)$ ، تحقق $f(c) = \lim (f(x_n))$ بانتظام عند $f \in \mathscr{F}$. (أحياناً نقول إن $\mathscr{F}$ متساوية الاتصال عند $c \in D$ عندما تتحقق هذه الخاصية) .

٢٦ – (ل) بفرض أن $\mathscr{F}$ كما فى تمرين ٢٦ – ك . وإذا كانت D مدمجة وتحققت الخاصية المذكورة فى تمرين ٢٦ – ك لكل $c \in D$ ، اثبت أن $\mathscr{F}$ متساوية الاتصال بانتظام بمفهوم تعريف ٢٦ – ٦ .

٢٦ – (م) إذا كانت $K \subseteq R^p$ مدمجة ، (f_n) متتابعة لدوال متصلة فى K إلى R^q

ومتقاربة بانتظام فى K ، اثبت أن العائلة $\{f_n\}$ محدودة فى K (بمعنى أنه يوجد $M > 0$ بحيث أن $\|f_n(x)\| \leq M$ لكل $x \in K, n \in N$ أو $\|f_n\|_K \leqq M$ لكل $(n \in N)$) .

٢٦ – (ن) إذا كانت $K \subseteq R^p$ مدمجة ، وكانت (f_n) متتابعة لدوال متصلة فى K إلى R^q ومتقاربة بانتظام فى K ، وضح أن العائلة $\{f_n\}$ متساوية الاتصال فى K بمعنى تعريف ٢٦ – ٦ .

٢٦ – (س) بفرض أن $\mathscr{F}$ مجموعة محدودة متساوية الاتصال بانتظام لدوال فى $D \subseteq R^p$ إلى R وبفرض f^* معرفة فى $D \to R$ بأنها

$$f^*(x) = \sup \{f(x) : f \in \mathscr{F}\}$$

وضح أن f^* متصلة فى D إلى R .

٢٦ – (ع) وضح أن الاستنتاج للتمرين السابق ربما يفشل إذا لم يفترض أن $\mathscr{F}$ متساوية الاتصال بانتظام .

٢٦ – (ف) اعتبر المتتابعات الآتية لدوال التى توضح أن نظرية أرتزيلا أسكولى ٢٦ – ٧ ربما تفشل إذا أسقطت الفروض المختلفة .

(أ) $f_n(x) = x + n$ عند $x \in [0, 1]$

(ب) $f_n(x) = x^n$ عند $x \in [0, 1]$

(ج) $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + (x - n)^2}$ عند $x \in [0, +\infty)$

٢٦ – (ص) بفرض أن (f_n) متتابعة لدوال متصلة فى R إلى R^q بحيث تتقارب عند كل نقطة من الفئة Q لأعداد قياسية وإذا كانت $\{f_n\}$ متساوية الاتصال بانتظام فى R ، وضح أن المتتابعة تتقارب عند كل نقطة للفراغ R وأن التقارب يكون منتظماً عند كل فئة مدمجة من الفراغ R ، لكن ليس ضرورياً أن يكون منتظماً فى R .

الفصل الخامس

دوال لمتغير واحد

سنبدأ الآن بدراسة تفاضل وتكامل الدوال . ولإجراء هذا سيكون من المناسب دراسة الحالة لدوال متغير واحد أولا ، سنعود فى الفصلين السابع والثامن لدراسة دوال لمتغيرات متعددة . وبمقارنة هذين البابين ، سيتضح أن الحالة لدوال المتغيرات المتعددة تشابه تماماً الملخص الذى سنعمله هنا ، لكن تظهر تعقيدات معينة . وبالإضافة إلى ذلك ، حيث أن النظرية العامة تعتمد فى استنتاجها على نتائج حالة المتغير الواحد ، فيكون من المناسب الحصول على دراسة هذه الحالة قبل دراسة الحالة العامة .

أدخلنا فى البابين ٢٧ ، ٢٨ المشتقة لدالة معرفة فى فترة حقيقية ونثبت نظرية القيمة المتوسطة الهامة وبعض نتائجها . فى باب ٢٩ سنقدم التعريف لتكامل ريمان (وريمان – اشتيلجز) لدوال محدودة فى فترة $[a, b]$. سنعطى الخواص الأساسية للتكامل فى هذا الباب وفى بابى ٣٠ ، ٣١ . بينما نناقش فى البابين الأخيرين ، التكاملات « غير المحدودة والتكاملات اللانهائية . بالرغم من أن نتائج هذه الأبواب تستخدم بدرجة قليلة جداً فى الأجزاء الآتية من هذا الكتاب ، فإنها هامة لتطبيقات كثيرة .

الباب السابع والعشرون — نظرية القيمة المتوسطة :

بما أنه من المفروض أن القارئ يكون ملماً من قبل بالعلاقة بين مشتقة دالة فى R إلى R وميل رسمها البيانى ، وبمفهوم معدل التغير اللحظى ، فسنركز اهتمامنا كلية على الوجهات الرياضية للمشتقة ولا نذهب إلى تطبيقاتها فى الفيزياء ، الاقتصاديات إلى آخره . فى هذا الباب والباب الآتى سنعتبر دالة نطاقها D ومداها محتوى فى الفراغ R . وبالرغم من اهتمامنا فى الابتداء بالمشتقة عند نقطة داخلية ، فسوف نعرف المشتقة بتعريف أكثر تعميما قليلا بحيث يمكن اعتبار نقطة نهائية لفترة ، مثلا ، لكن ، نحتاج إلى كون النقطة التى تعرف المشتقة عندها نقطة تجميع للنطاق D وتنتمى إلى D .

٢٧ – ١ تعريف . إذا كانت c نقطة تجميع للنطاق D وتنتمى إلى D ، فنقول أن العدد الحقيقى L هو المشتقة للدالة f عند النقطة c إذا كان يوجد لكل عدد $0 < \varepsilon$ عدد $0 < \delta(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت x تنتمى إلى D وإذا كانت $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$ ، فإن

$$\left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - L \right| < \varepsilon \tag{27.1}$$

فى هذه الحالة نرمز إلى $f'(c)$ بالرمز L .

وتبادلياً ، يمكننا تعريف $f'(c)$ بأنها النهاية

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \qquad (x \in D, x \neq c)$$

من الملاحظ أنه إذا كانت c نقطة داخلية من النطاق D ، فتعتبر فى (٢٧ – ١) النقط x الموجودة فى كل من يسار ويمين النقطة c . ومن الناحية المقابلة ، إذا كانت D فترة ، c هى النقطة الطرفية اليسرى للفترة D ، فإنه يمكننا فى علاقة (٢٧ – ١) أخذ x على يمين النقطة c فقط .

طالما وجدت المشتقة للدالة f عند النقطة c ، فنرمز لقيمتها بالرمز $f'(c)$. نحصل بهذه الطريقة على دالة f' نطاقها فئة جزئية من النطاق للدالة f . نوضح الآن أن اتصال الدالة f عند c هو شرط ضرورى لوجود المشتقة عند c .

٢٧ – ٢ مفترض . إذا كانت الدالة f مشتقة عند c ، فإن f تكون متصلة هناك .

البرهان . نفرض $\varepsilon = 1$ ونأخذ $\delta = \delta(1)$ بحيث أن

$$\left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c) \right| < 1$$

لكل $x \in D$ وتحقق $0 < |x - c| < \delta$. من متباينة المثلث ، نستنتج أنه لهذه القيم للعنصر x يكون

$$|f(x)-f(c)| \leq |x-c| \{|f'(c)|+1\}$$

الطرف الأيسر لهذا التعبير يمكن جعله أقل من ε إذا أخذنا x فى D بحيث :

$$|x-c| < \inf \{\delta, \varepsilon/(|f'(c)|+1)\}$$

وهو المطلوب إثباته

من السهل ملاحظة أن الاتصال عند النقطة c ليس شرطاً كافياً لوجود المشتقة عند c . مثال ذلك ، إذا كانت $D = R$ و $f(x) = |x|$ ، فإن f تكون متصلة عند

كل نقطة الفراغ R لكن يكون لها مشتقة عند نقطة c إذا وإذا فقط كانت $c \neq 0$.
بأخذ توافيق بسيطة جبرية ، يكون من السهل تركيب دوال متصلة ليس لها مشتقة عند عدد محدود من نقط أو حتى عند عدد يمكن حسابه من نقط . فى ١٨٧٢ ، هزڤيرشتراس عالم الرياضيات بإعطائه مثالا لدالة متصلة عند أى نقطة لكن لا توجد مشتقة لها فى أى مكان .
(فى الحقيقة ، الدالة المعرفة بالمتسلسلة

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos(3^n x)$$

يمكن البرهنة على أن لها هذه الخاصية . سوف لا نتعمق فى التفاصيل ، لكن نحيل القارئ إلى كتب تتشارش وبوز لتفاصيل ومراجع أكثر) .

٢٧ – ٣ مفترض . (أ) إذا كانت f لها مشتقة عند c ، $f'(c)>0$ ، فيوجد عدد $\delta>0$ بحيث أنه إذا كانت $x\in D$ ، $c<x<c+\delta$ فإن $f(c)<f(x)$
(ب) إذا كانت $f'(c)<0$ ، فيوجد عدد $\delta>0$ بحيث أنه إذا كانت $x\in D$ و $c-\delta<x<c$ ، فإن $f(c)<f(x)$.

البرهان . (أ) نفرض أن ε_0 مختارة بحيث أن $0<\varepsilon_0<f'(c)$ ونفرض أن $\delta=\delta(\varepsilon_0)$ تناظر (ε_0) كما فى تعريف ٢٧ – ١ . إذا كانت $x\in D$ ، $c<x<c+\delta$ ، فنحصل على

$$-\varepsilon_0<\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)$$

بما أن $x-c>0$ ، فإن هذه العلاقة تدل على أن

$$0<(f'(c)-\varepsilon_0)(x-c)<f(x)-f(c)$$

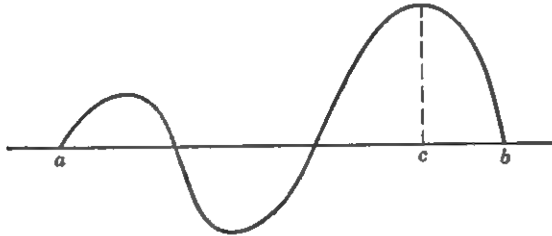
التى تثبت النص الموجود فى (أ) . يكون برهان (ب) مشابها . وهو المطلوب إثباته

نتذكر أن الدالة f يقال إن لها نهاية عظمى نسبية عند نقطة c فى D إذا كانت توجد $\delta>0$ بحيث أن $f(x)\leq f(c)$ عند $x\in D$ تحقق $|x-c|<\delta$. يستخدم تعريف مشابه للمصطلح نهاية صغرى نسبية . تمدنا النتيجة الآتية بتحليل نظرى للطريقة المألوفة لإيجاد نقط عندها يكون للدالة f نهاية عظمى نسبية ونهاية صغرى نسبية وذلك باختيار الأصفار للمشتقة . من الملاحظ أن هذه العملية تستخدم فقط للنقط الداخلية للفترة . وفى الحقيقة ، إذا كانت $f(x)=x$ فى $D=[0,1]$ ، فإن النقطة الطرفية $x=0$ تنتج النهاية الصغرى النسبية الوحيدة والنقطة الطرفية $x=1$ تنتج النهاية العظمى النسبية الوحيدة للدالة f ، لكن أيا منهما ليس جذراً للمشتقة . للتبسيط ، سنثبت هذه النتيجة

فقط عند النهاية العظمى النسبية ، تاركين صياغة النتيجة المناظرة عند النهاية الصغرى النسبية للقارئ .

٢٧ – ٤ **نظرية النهاية العظمى الداخلية** . نفرض أن c هى نقطة داخلية فى D والتى عندها f لها نهاية عظمى نسبية . إذا كانت المشتقة لدالة f عند c موجودة ، فيجب أن تكون مساوية للصفر .

البرهان . إذا كانت $f'(c) > 0$ ، فمن مفترض ٢٧ – ٣ (أ) نجد أنه توجد $\delta > 0$ بحيث أنه إذا كانت $c < x < c + \delta$ ، $x \in D$ ، فإن $f(c) < f(x)$. هذا يخالف الفرض بأن f نهاية عظمى نسبية عند c . إذا كانت $f'(c) < 0$ ، فنستعمل مفترض ٢٧ – ٣ (ب) . وهو المطلوب إثباته



(شكل ٢٧ – ١)

٢٧ – ٥ **نظرية رول(*)** . نفرض أن f دالة متصلة فى فترة مغلقة $J = [a, b]$ ، أن المشتقة f' موجودة فى الفترة المفتوحة (a, b) ، وأن $f(a) = f(b) = 0$ ، إذن توجد نقطة c فى (a, b) بحيث أن $f'(c) = 0$.

البرهان . إذا كانت f تنعدم تطابقياً فى J ، فيمكننا أخذ $c = (a+b)/2$ ومن ثم نفرض أن f لا تنعدم تطابقياً ، فباستبدال f بالمقدار $-f$ ، عند الضرورة ، يمكن الفرض بأن f تأخذ بعض قيم موجبة . حسب نظرية القيمة العظمى ٢٢ – ٧ ، تبلغ الدالة f القيمة $\sup\{f(x) : x \in J\}$ عند نقطة ما c للفترة J . بما أن $f(a) = f(b) = 0$ ، فإن النقطة c تحقق $a < c < b$. وحيث أن $f'(c)$ موجودة من الفرض ولها نقطة نهاية عظمى نسبية عند c ، فإن نظرية النهاية العظمى الداخلية تدل على أن $f'(c) = 0$.

وهو المطلوب إثباته

نحصل على نظرية القيمة المتوسطة الأساسية جداً . كنتيجة لنظرية رول .

(*) تنسب هذه النظرية غالبا لميشيل رول (١٦٥٢ – ١٧١٩) عضو الاكاديمية الفرنسية، وله اسهامات فى الهندسة التحليلية والبحث المبكر المؤدى الى التفاضل والتكامل .

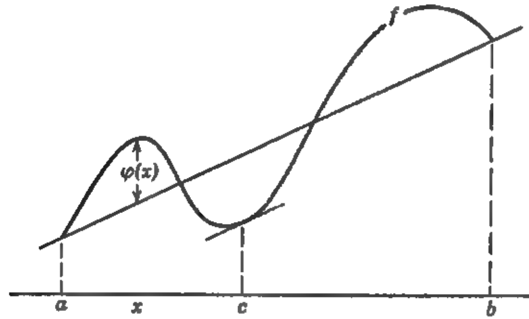
٢٧ – ٦ نظرية القيمة المتوسطة . نفرض أن f متصلة فى فترة مغلقة $J = [a, b]$ ولها مشتقة فى فترة مفتوحة (a, b) . إذن توجد نقطة c فى (a, b) بحيث أن

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

البرهان . نعتبر الدالة φ المعرفة فى J بأنها

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

(من السهل ملاحظة أن φ هى الفرق بين الدالة f والدالة التى رسمها البيانى يتكون من جزء الخط المستقيم المار بالنقطتين $(a, f(a))$ ، $(b, f(b))$ ، انظر شكل ٢٧ – ٢) .
ينتج من الفروض أن φ متصلة فى $J = [a, b]$ ويمكن بسهولة تحقيق أن φ لها مشتقة فى (a, b) وبالإضافة إلى ذلك نجد أن $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. باستخدام نظرية رول .



(شكل ٢٧ – ٢ نظرية القيمة المتوسطة)

توجد نقطة c داخل J بحيث أن

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

تنتج النتيجة منها وهو المطلوب إثباته

٢٧ – ٧ نتيجة . إذا كانت الدالة f مشتقة فى $J = [a, b]$ ، فتوجد نقطة c فى (a, b) بحيث أن

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

يكون من المناسب أحياناً وجود ترجمة أكثر تعميماً لنظرية القيمة المتوسطة التى تشمل دالتين .

٢٧ – ٨ **نظرية كوشى للقيمة المتوسطة** . نفرض أن g و f دالتان متصلتان فى $J = [a, b]$ ولهما مشتقتان فى داخل (a, b) . إذن توجد نقطة c فى (a, b) بحيث أن

$$f'(c)[g(b)-g(a)] = g'(c)[f(b)-f(a)]$$

البرهان . عند $g(b) = g(a)$ تنتج النتيجة فى الحال إذا أخذنا c بحيث أن $g'(c) = 0$.
إذا كانت $g(b) \neq g(a)$ اعتبر الدالة φ المعرفة فى J بأنها

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$$

وتنطبق نظرية رول على φ ، نحصل على النتيجة المطلوبة . وهو المطلوب إثباته

بالرغم أن المشتقة لدالة لا تحتاج إلى كونها متصلة ، فتوجد نظرية أولية لكن مدهشة ترجع إلى داربوكس(*) وتنص على أن المشتقة f' تصل إلى كل قيمة بين $f'(a)$ ، $f'(b)$ فى الفترة $[a, b]$. (انظر تمرين ٢٧ – ح)

من السهل تذكر النص لنظرية القيمة المتوسطة برسم أشكال توضيحية مناسبة . فى الوقت الذى يجب أن يكون هذا مشجعاً فإنه يميل للإيعاز بأن أهميتها هندسية بطبيعتها الأمر الذى يجعلها مضللة تماماً . نظرية القيمة المتوسطة فى الحقيقة ذئب فى ثوب حمل وهى النظرية الأساسية لحساب التفاضل . نختم هذا الباب بنتائج أولية قليلة لهذه النتيجة . وستعطى نتائج أكثر فى الباب القادم ، وستظهر نتائج أخرى فيما بعد .

٢٧ – ٩ **نظرية** . نفرض أن f متصلة فى $J = [a, b]$ وأن مشتقتها موجودة فى (a, b) :

(i) إذا كانت $f'(x) = 0$ عند $a < x < b$ ، لتكون f ثابتة فى J .

(ii) إذا كانت $f'(x) = g'(x)$ عند $a < x < b$ فإن f ، g يختلفان فى J بمقدار ثابت .

(iii) إذا كانت $f'(x) \geq 0$ عند $a < x < b$ وإذا كانت $x_1 \leq x_2$ تنتمى إلى J ، حينئذ $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(iv) إذا كانت $f'(x) > 0$ عند $a < x < b$ وإذا كانت $x_1 < x_2$ تنتمى إلى J ، فإن $f(x_1) < f(x_2)$.

(v) إذا كانت $f'(x) \geq 0$ عند $a < x < a + \delta$ ، فإن a هى نقطة النهاية الصغرى النسبية للدالة f .

(*) جاستن داربوكس (١٨٤٢ – ١٩١٧) كان تلميذا هرميت ، واستاذا بكلية فرنسا . مع أنه معروف فى الابتداء كعالم فى الهندسة ، فقد اعطى مساهمات هامة فى التحليل أيضا .

(vi) إذا كانت $f'(x) \geq 0$ عند $b - \delta < x < b$ ، فإن b هى نقطة النهاية العظمى النسبية للدالة f .

(vii) إذا كانت $|f'(x)| \leq M$ عند $a < x < b$ ، فإن f تحقق شرط ليبشتز : $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M\,|x_1 - x_2|$ عند x_1, x_2 فى J .

نترك البرهان القارئ .

تمرينـــات :

٢٧ – (أ) باستخدام التعريف ، واحسب المشتقة (إن وجدت) للدوال المعطاة بالتعبيرات :

(ا)	$f(x) = x^4$	عند	$x \in \boldsymbol{R}$
(ب)	$g(x) = x^n$	عند	$x \in \boldsymbol{R}$
(جـ)	$h(x) = \sqrt{x}$	عند	$x \geq 0$
(د)	$F(x) = 1/x$	عند	$x \neq 0$
(هـ)	$G(x) = \|x\|$	عند	$x \in \boldsymbol{R}$
(و)	$H(x) = 1/x^2$	عند	$x \neq 0$

٢٧ – (ب) إذا كانت f ، g دالتين قيمتهما حقيقية ومعرفتين فى فترة J ، وإذا كانتا قابلتين للتفاضل عند نقطة c ، اثبت حاصل ضربهما h ، المعرف بأنه $h(x) = f(x)g(x)$ ، عند $x \in J$ ، يكون قابلا للتفاضل عند c وأن

$$h'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

٢٧ – (ج) وضح أن الدالة المعرفة عند $x \neq 0$ بأنها

$$f(x) = \sin(1/x)$$

تكون قابلة للتفاضل عند كل عدد حقيقى غير الصفر . وضح أن مشتقتها ليست محدودة فى جوار $x = 0$. (يمكن استخدام متطابقات مثلثية ، والاتصال لدوال الجيب ودوال جيب التمام ، والعلاقة الأولية للنهاية $(\sin u)/u \to 1$ عندما $u \to 0$) .

٢٧ – (د) وضح أن الدالة المعرفة بأنها

$$g(x) = x^2 \sin(1/x), \qquad x \neq 0$$
$$= 0, \qquad x = 0$$

تكون قابلة للتفاضل لجميع الأعداد الحقيقية ، لكن g' ليست متصلة عند $x = 0$.

٢٧ – (هـ) اثبت أن الدالة $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ المعرفة بأنها $h(x) = x^2$ عند $x \in \boldsymbol{Q}$ ،

$h(x) = 0$ عند $x \notin Q$ متصلة عند نقطة واحدة تماماً . هل هى قابلة التفاضل هناك .

٢٧ - (و) بفرض أن $c \in D$ نقطة تجميع من D وبفرض أن $f: D \to R$.
وضح أن $f'(c)$ موجودة إذا وإذا فقط كانت ككل متتابعة (x_n) فى D حيث $x_n \neq c$
عند $n \in N$ بحيث أن $\lim(x_n) = c$ ، النهاية المتتابعة

$$\left(\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n - c}\right)$$

موجودة فى هذه الحالة النهاية لكل مثل هذه المتتابعات تكون مساوية إلى $f'(c)$.

٢٧ - (ز) إذا كانت $f: D \to R$ قابلة للتفاضل عند $c \in D$ وإذا كانت
$c + 1/n \in D$ لكل $n \in N$ ، وضح أن

$$f'(c) = \lim\left(n\{f(c+1/n) - f(c)\}\right)$$

لكن وضح أن وجود النهاية لهذه المتتابعة لا يضمن وجود المشتقة .

٢٧ - (ح) (داربوكس) إذا كانت f قابلة للتفاضل فى $[a, b]$ ، وإذا كانت
$f'(a) = A, f'(b) = B$ ، وإذا كانت C تقع بين B و A ، فإنه توجد نقطة
C فى (a, b) عندها $f'(c) = C$ (إرشاد : اعتبر الحد الأدنى للدالة

$$g(x) = f(x) - C(x - a))$$

٢٧ - (ط) إذا كانت $g(x) = 0$ عند $x < 0$ ، $g(x) = 1$ عند $x \geq 0$ ،
اثبت أنه لا توجد دالة $f: R \to R$ بحيث أن $f'(x) = g(x)$ لكل $x \in R$.

٢٧ - (ى) اعط مثالا لدالة متصلة ذات نهاية عظمى نسبية وحيدة لكن لاتوجد المشتقة عند هذه النقطة .

٢٧ - (ك) اعط مثالا لدالة متصلة بانتظام وقابلة التفاضل فى $(0, 1)$ لكن بحيث أن مشتقتها غير محدودة فى $(0, 1)$.

٢٧ - (ل) بفرض أن $f: [a, b] \to R$ قابلة التفاضل عند $c \in [a, b]$. وضح
أنه إذا كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ ، $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث أنه إذا كانت $0 < |x - y| < \delta(\varepsilon)$ ،
$a \leq x \leq c \leq y \leq b$

فإن

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(c)\right| < \varepsilon$$

٢٧ - (م) بفرض $f: [a, b] \to R$ قابلة التفاضل فى $[a, b]$. وضح أن f'

تكون متصلة فى $[a, b]$ إذا وإذا فقط كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ ، $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث أنه إذا كانت $0<|x-y|<\delta(\varepsilon), x, y \in [a, b]$ فإن

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(x)\right| < \varepsilon$$

٢٧ – (ن) بفرض $f:[a, b] \to R$ متصلة فى $[a, b]$ وقابلة التفاضل فى (a, b) وإذا كانت $\lim_{a} f'(x) = A$ ، اثبت أن $f'(a)$ موجودة ومساوية A .

٢٧ – (س) إذا كانت $f: R \to R$ ، وكانت $f'(a)$ موجودة ، وضح أن

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

مع ذلك ، اعط مثالا لتوضح أن وجود هذه النهاية لا يضمن وجود المشتقة .

٢٧ – (ع) يقال لدالة $f: R \to R$ انها زوجية إذا كانت $f(-x) = f(x)$ لكل $x \in R$ ، وأنها فردية إذا كانت $f(-x) = -f(x)$ لكل $x \in R$. إذا كانت f قابلة التفاضل فى R وزوجية (أو فردية على الترتيب) ، اثبت أن f' تكون فردية (أو زوجية على الترتيب) .

٢٧ – (ف) بفرض أن $f:(a, b) \to R$ ، $c \in (a, b)$ ، نضع $f(c+) = \lim_{x\to c} f(x)$ (النهاية للطرف الأيمن للدالة f عند c) . إذا كانت نهاية الطرف الأيمن

$$A_r = \lim_{\substack{x\to c \\ x>c}} \frac{f(x)-f(c+)}{x-c}$$

موجودة فى R ، فإننا نقول أن f لها مشتقة طرف أيمن عند c ونرمز إلى A_r بالرمز $f'_+(c)$ بالمثل لمشتقة الطرف الأيسر .

وضح أنه إذا كانت f متصلة عند c ، فإن $f'(c)$ تكون موجودة إذا وإذا فقط كانت $f'_+(c)$ ، $f'_-(c)$ موجودتين ومتساويتين . اثبت أنه يمكننا الحصول على $g'_-(c) = g'_+(c)$ بدون وجود $g'(c)$.

٢٧ – (ص) بفرض أن I ، J فترتان فى R وبفرض أن $f: I \to R$ ، $g: J \to R$ بحيث أن تكون g قابلة التفاضل عند نقطة $b \in J$ ، f تكون قابلة للتفاضل عند نقطة داخلية $a = g(b)$ فى الفترة I . اثبت أن التركيب $h = f^{\circ}g$ المعرفة عند $\{x \in J : g(x) \in I\}$ يكون قابلا التفاضل عند b وأن $h'(b) = f'(a)g'(b)$ [إرشاد : بفرض H معرفة فى $D(h)$ بأنها

$$H(x) = \frac{f(g(x))-f(g(b))}{g(x)-g(b)} \quad \text{إذا} \quad g(x) \neq g(c)$$

$$= f'(a) \quad \text{إذا} \quad g(x) = g(c)$$

اثبت أن $\lim_b H(x)=f'(a)$. حينئذ استخدم الحقيقة التى تقول أن .

$(g(x)-g(b))H(x)= f(g(x))-f(g(b))$ لكل x فى $D(h)$].

٢٧ – (ق) بفرض أن $f:[0,+\infty)\to \boldsymbol{R}$ معرفة فى $(0,+\infty)$

(ا) إذا كانت $f'(x)\to b\in \boldsymbol{R}$ عند $x\to+\infty$ ، وضح أنه لأى $h>0$ نحصل على

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=b$$

(ب) إذا كانت $f(x)\to a\in \boldsymbol{R}$ ، $f'(x)\to b\in \boldsymbol{R}$ ، عند $x\to+\infty$ فإن $b=0$

(ﺟ) إذا كانت $f'(x)\to b\in \boldsymbol{R}$ عند $x\to+\infty$ ، حينئذ $f(x)/x\to b$ عندما $x\to+\infty$

٢٧ – (ر) بفرض أن $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ قابلة للتفاضل عند $0<m\le f'(x)\le M$ حيث $x\in[a,b]$ وبفرض أن $f(a)<0<f(b)$. بأخذ $x_1\in[a,b]$ ، عرف المتتابعة (x_n) بأنها

$$x_{n+1}=x_n-\frac{1}{M}f(x_n),\qquad n\in \boldsymbol{N}$$

أثبت أن هذه المتتابعة معرفة جيدا ومتقاربة إلى جذر وحيد $\bar{x}$ للمعادلة $f(x)=0$ فى $[a,b]$ وأن

$$|x_{n+1}-\bar{x}|\le\frac{|f(x_1)|}{m}\left(1-\frac{m}{M}\right)^n$$

عند $n\in \boldsymbol{N}$. [إرشاد : نفرض أن $\varphi:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ معرفة بأنها $\varphi(x)=x-f(x)/M$. وضح أن φ هى تقلص (انظر ٢٣ – ٤) بثابت $1-m/M$] .

٢٧ – (ش) بفرض أن $f:\boldsymbol{R}\to \boldsymbol{R}$ لها مشتقة متصلة وبحيث أن $f(a)=b$ ، $f'(a)\neq 0$. وبفرض $\delta>0$ بحيث أنه إذا كانت $|x-a|\le\delta$ فإن $|f'(x)-f'(a)|\le\frac{1}{2}|f'(a)|$ ، وبفرض $\eta=\frac{1}{2}\delta|f'(a)|$ اثبت أنه إذا كانت $|\bar{y}-b|\le\eta$ فإن المتتابعة (x_n) المعرفة بأنها $x_1=a$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)-\bar{y}}{f'(a)},\qquad n\in \boldsymbol{N}$$

تتقارب إلى نقطة وحيدة $\bar{x}$ فى $[a-\delta,a+\delta]$ بحيث أن $f(\bar{x})=\bar{y}$. [إرشاد : وضح أن الدالة المعرفة بأنها $\varphi(x)=x-(f(x)-\bar{y})/f'(a)$ تكون تقلصاً بمقدار ثابت $\frac{1}{2}$ فى الفترة $[a-\delta,a+\delta]$

الباب الثامن والعشرون — تطبيقات ابعد لنظرية القيمة المتوسطة :

من الممكن بصعوبة أن نؤكد بشدة أهمية نظرية القيمة المتوسطة ، لأنها تلعب دوراً حاسماً فى اعتبارات نظرية كثيرة . وهى فى نفس الوقت مفيدة جداً فى مواد عملية كثيرة . أشرنا فى ٢٧ — ٩ إلى بعض نتائج مباشرة لنظرية القيمة المتوسطة المفيدة غالباً . الآن سنقترح بعض القطاعات الأخرى التى فيها يمكن استخدامها ، ولإجراء هذا سنحصر بأكثر حرية عما قبل الخبرة السابقة للقارئ ومعلوماته المتصلة بالمشتقات لدوال معينة معروفة .

٢٨ — ١ تطبيق . يمكن استخدام نظرية رول لتعيين مواقع جذور دالة . لأنه ، إذا كانت دالة مثل g بحيث يمكن اعتبارها كمشتقة الدالة f . فإنه بين أى جذرين للدالة f يوجد على الأقل جذراً واحداً للدالة g . مثال ذلك ، إذا فرضنا $g(x) = \cos x$ ، فإننا نعرف أن g هى المشتقة للدالة $f(x) = \sin x$. ومن ثم ، يوجد على الأقل ، بين أى جذرين للدالة $\sin x$ جذر واحد للدالة $\cos x$. ومن الناحية المقابلة $g'(x) = -\sin x = -f(x)$ لذلك يخبرنا تطبيق آخر لنظرية رول بأنه بين أى جذرين للدالة $\cos x$ يوجد على الأقل جذر واحد للدالة $\sin x$. إذن نستنتج أن الجذور للدالة $\sin x$ ، والدالة $\cos x$ تتشابك مع بعضها . هذا الاستنتاج ليس محتملا أن يكون جديداً للقارئ ، لكن ، نفس النمط من الاستدلال يمكن استخدامه لدوال بسل(*) J_n ذات الرتبة $n = 0, 1, 2, \ldots$ باستخدام العلاقات

$$[x^n J_n(x)]' = x^n J_{n-1}(x), [x^{-n} J_n(x)]' = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad \text{عند} \quad x > 0$$

التفاصيل لهذه المناقشة يجب أن تزود بالقارئ .

٢٨ — ٢ تطبيق . يمكن استخدام نظرية القيمة المتوسطة لحسابات التقريبية لحصول على تقييمات الخطأ . مثال ذلك . نفرض أن المطلوب هو إيجاد قيمة $\sqrt{105}$. نستخدم نظرية القيمة المتوسطة حيث $f(x) = \sqrt{x}, a = 100, b = 105$ فنحصل على

$$\sqrt{105} - \sqrt{100} = \frac{5}{2\sqrt{c}}$$

لعدد ما c حيث $100 < c < 105$. بما أن $10 < \sqrt{c} < \sqrt{105} < \sqrt{121} = 11$ ، فيمكننا إثبات أن

$$\frac{5}{2(11)} < \sqrt{105} - 10 < \frac{5}{2(10)}$$

ومنها ينتج أن $10.22 < \sqrt{105} < 10.25$. هذا التقييم ربما لا يكون دقيقاً كالمطلوب .

(*) فريد رش ولهلم بسل (١٧٨٤ — ١٨٤٦) كان فلكيا ورياضيا . وكان صديقا ملازما لجاوس ، وهو يعرف جيدا بالمعادلة التفاضلية التى تحمل اسمه .

من الواضح أن التقييم $\sqrt{c}<\sqrt{105}<\sqrt{121}$ ضياع للوقت ويمكن تحسينه بالاستفادة من إستنتاجنا .أن $\sqrt{105}<10.25$. وإذن $\sqrt{c}<10.25$ ومن السهل تحديد أن

$$0.243<\frac{5}{2(10.25)}<\sqrt{105}-10$$

تقييمنا الأحسن هو $10.243<\sqrt{105}<10.250$ ويمكن الحصول على تقديرات أكثر دقة باستخدام هذه الطريقة .

٢٨ – ٣ تطبيق . يمكن استخدام نظرية القيمة المتوسطة ونتائجها لتكوين المتباينات ومد المتباينات المعروفة للقيم الصحيحة أو القيم القياسية إلى القيم الحقيقية .

مثال ذلك ، نتذكر أن متباينة برنولى ٥ – ج تنص على أنه إذا كانت $1+x>0$ ، $n\in N$ فإن $(1+x)^n\geq 1+nx$. سنوضح أن هذه المتباينة تظل قائمة لأى أس $r\geq 1$. لإجراء هذا ، نفرض أن $f(x)=(1+x)^r$ ، وإذن $f'(x)=r(1+x)^{r-1}$. إذا كانت $-1<x<0$ ، حينئذ $f'(x)<r$ ، بينما إذا كانت $x>0$ ، فإن $f'(x)>r$ فبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على كلّى هاتين الحالتين ، نحصل على النتيجة

$$(1+x)^r\geq 1+rx$$

عند $1+x>0$ ، $r\geq 1$. وبالإضافة إلى ذلك نجد أنه ، إذا كانت $r>1$ ، فإن التساوى يكون صحيحاً إذا وإذا فقط كانت $x=0$.

كنتيجة مماثلة ، نفرض أن α عدد حقيقى يحقق $0<\alpha<1$ ، وبفرض $g(x)=\alpha x-x^\alpha$ عند $x\geq 0$. نجد أن $g'(x)=\alpha(1-x^{\alpha-1})$ ، أى أن $g'(x)<0$ عند $0<x<1$ ، $g'(x)>0$ عند $x>1$ نتيجة لذلك ، نجد أنه إذا كانت $x\geq 0$ ، فإن $g(x)\geq g(1)$ ، $g(x)=g(1)$ إذا وإذا فقط كانت $x=1$ لذلك ، إذا كانت $x\geq 0$ و $0<\alpha<1$ فنحصل على

$$x^\alpha\leq \alpha x+(1-\alpha)$$

إذا كانت $a\geq 0$ ، $b>0$ وإذا فرضنا أن $x=a/b$ وبالضرب فى b ، نحصل على المتباينة

$$a^\alpha b^{1-\alpha}\leq \alpha a+(1-\alpha)b$$

حيث التساوى يكون صحيحاً إذا وإذا فقط كانت $a=b$. هذه المتباينة هى غالباً نقطة الابتداء فى إثبات متباينة هولدر الهامة مشروع ٨ β) .

٢٨ – ٤ تطبيق . القواعد المألوفة لوبيتال(*) لحساب « صيغ غير محددة » يمكن إثباتها بواسطة نظرية القيمة المتوسطة لكوشى . مثال ذلك ، نفرض أن f, g متصلتان فى $[a, b]$ ولهما مشتقتان فى (a, b) ، حيث $f(a) = g(a) = 0$ ، لكن g, g' لا تنعدمان عند $x \neq a$. حينئذ توجد نقطة c حيث $a < c < b$ بحيث أن

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ينتج أنه إذا كانت $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ موجودة ، فإن

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

الحالة التى تصبح فيها الدوال لا نهائية عند $x = a$ ، أو عندما تكون النقطة التى تؤخذ عندها النهاية لا نهائية ، أو حيث يكون لدينا « غير محددة » لصورة أخرى ما ، يمكن معاملتها غالباً بأخذ اللوغاريتمات ، الأسس أو بعض معالجات مشابهة .

مثال ذلك ، إذا كانت $a = 0$ ونريد حساب النهاية للدالة $h(x) = x \log x$ عندما $x \to 0$ فلا يمكننا استخدام المناقشة السابقة . نكتب $h(x)$ فى الصورة $f(x)/g(x)$ حيث $g(x) = 1/x, x > 0$ ، $f(x) = \log x$ من الواضح أن

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -x \to 0, \qquad \text{as} \qquad x \to 0$$

نفرض $\varepsilon > 0$ وباختيار عدد ثابت $0 < x_1 < 1$ بحيث أنه إذا كانت $0 < x < x_1$ ، نحصل على $\left| f'(x)/g'(x) \right| < \varepsilon$. باستخدام نظرية القيمة المتوسطة لكوشى ، نجد أن

$$\left| \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \right| = \left| \frac{f'(x_2)}{g'(x_2)} \right| < \varepsilon$$

حيث x_2 تحقق $0 < x < x_2 < x_1$. بما أن $f(x) \neq 0$ ، $g(x) \neq 0$ عند $0 < x < x_1$ فيمكننا كتابة الكمية الظاهرة فى الطرف الأيسر على الصورة الأكثر ملائمة

$$\frac{f(x)}{g(x)} \left\{ \frac{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}} \right\}$$

(*) جويلوم فرانسوا لوبيتال (١٦٦١ – ١٧٠٤) كان تلميذا ليوهان برنولى (١٦٦٧ – ١٧٤٨) نشر مركيز دى لاهوبتال محاضرات مدرسة على التفاضل فى سنة ١٦٩٦ ، مقدما بذلك أول كتاب مدرسى فى التفاضل والتكامل الى العالم .

بجعل x_1 ثابتة ، نفرض أن $x \to 0$. بما أن الكمية داخل القوسين تقترب من الواحد الصحيح ، تزيد $\frac{1}{2}$ عند x صغيرة بكفاية . نستنتج مما سبق أن

$$|h(x)| = \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < 2\varepsilon$$

عند x قريبة بكفاية من الصفر . أى أن النهاية عند $x = 0$ للدالة h هى صفر .

تبادل نهاية ومشتقة :

إذا فرضنا (f_n) متتابعة لدوال معرفة فى فترة J من الفراغ R ويقيم فى الفراغ R . من السهل إعطاء مثالا لمتتابعة دوال لها مشتقات عند كل نقطة من J والتى تتقارب فى J لدالة f التى ليس لها مشتقة عند بعض نقط من نقط الفترة J . (إجر هذا!) . وبالإضافة إلى ذلك يمكن استخدام مثال ڤيرشتراس المشار إليه من قبل لإعطاء مثال لمتتابعة دوال لها مشتقات عند كل نقطة فى الفراغ R وتتقارب بانتظام فى الفراغ R إلى دالة متصلة ليس لها مشتقة عند أى نقطة . أى أنه من غير المسموح ، فى الحالة العامة ، بتفاضل النهاية لمتتابعة تقاربية لدوال لها مشتقات حتى ولو كان التقارب منتظماً .

سنوضح الآن أنه إذا كانت المتتابعة للمشتقات تقاربية بانتظام فإن الجميع يكون صحيحاً . إذا أضاف أحد للفرض أن المشتقات متصلة ، فإنه من الممكن إعطاء برهان قصير مؤسس على تكامل ريمان . لكن ، إذا لم نفرض أن المشتقات متصلة ، فنحتاج إلى مناقشة أكثر دقة نوعاً ما .

۲۸ — ٥ نظرية . نفرض أن (f_n) متتابعة لدوال معرفة فى فترة محدودة J للفراغ R ويقيم فى R . نفرض أنه توجد نقطة x_0 فى J بحيث تتقارب المتتابعة $[f_n(x_0)]$ عندها ونفرض أن تلك المشتقات f'_n موجودة فى J ، وأن المتتابعة (f'_n) تتقارب بانتظام فى J إلى دالة g . حينئذ المتتابعة (f_n) تتقارب بانتظام فى J إلى دالة f التى لها مشتقة عند كل نقطة فى الفترة J وأن $f' = g$.

البرهان . نفرض أن النقطتين الطرفيتين للفترة J هما $a < b$ ونفرض أن x أى نقطة فى الفترة J . إذا كانت n و m عددين طبيعيين ، فنستخدم نظرية القيمة المتوسطة للفرق $f_m - f_n$ فى الفترة بنقطتين طرفيتين x_0, x لنستنتج أنه توجد نقطة y (تعتمد على m, n) بحيث أن

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)\{f'_m(y) - f'_n(y)\}$$

إذن نستنتج أن

$$\|f_m - f_n\|_J \leq |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + (b - a)\,\|f'_m - f'_n\|_J$$

لذلك تتقارب المتتابعة (f_n) بانتظام فى J لدالة سنرمز لها بالرمز f . بما أن الدوال f_n متصلة و التقارب لمتتابعة الدوال (f_n) إلى f منتظم ، فينتج أن f متصلة فى J .

لإثبات وجود المشتقة للدالة f عند نقطة c فى J ، تستخدم نظرية القيمة المتوسطة للفرق $f_m - f_n$ فى فترة بنقطتيها الطرفيتين c, x لأستنتاج أنه توجد نقطة z (نعتمد على m, n) بحيث أن

$$\{f_m(x)-f_n(x)\}-\{f_m(c)-f_n(c)\}=(x-c)\{f'_m(z)-f'_n(z)\}$$

نستنتج أنه عندما $c \neq x$ ، حينئذ

$$\left|\frac{f_m(x)-f_m(c)}{x-c}-\frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c}\right| \leq \|f'_m-f'_n\|_J$$

و بسبب التقارب المنتظم للمتتابعة (f'_n) يتسلط المقدار ε على الطرف الأيمن عندما $m, n \geq M(\varepsilon)$ بأخذ النهاية بالنسبة إلى m ، نستنتج من مفترض ١٥ – ٨ أن

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-\frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c}\right| \leq \varepsilon$$

عند $n \geq M(\varepsilon)$ بما أن $g(c)=\lim(f'_n(c))$ ، فإنه يوجد $N(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $n \geq N(\varepsilon)$ ، فإن $|f'(c)-g(c)|<\varepsilon$. الآن نفرض أن $K=\sup\{M(\varepsilon),N(\varepsilon)\}$ نظراً لوجود $f'_K(c)$ ، نجد أنه إذا كانت $0<|x-c|<\delta_K(\varepsilon)$ فإن

$$\left|\frac{f_K(x)-f_K(c)}{x-c}-f'_K(c)\right|<\varepsilon$$

لذلك ، ينتج أنه إذا كانت $0<|x-c|<\delta_K(\varepsilon)$ فإن

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-g(c)\right|<3\varepsilon$$

هذا يوضح أن $f'(c)$ موجودة وتساوى $g(c)$. وهو المطلوب إثباته

نظرية تايلور :

إذا كانت المشتقة $f'(x)$ للدالة f موجودة عند كل نقطة x لفئة D ، فيمكننا اعتبار وجود المشتقة للدالة f' عند نقطة $c \in D$. فى حالة كون f' لها مشتقة عند النقطة c ، فنشير للعدد الناتج بأنه المشتقة الثانية للدالة f عند نقطة c وسوف نرمز عادة لهذا العدد بالرمز $f''(c)$ أو بالرمز $f^{(2)}(c)$. نعرف بأسلوب مشابه المشتقة الثالثة $f^{(3)}(c)=f'''(c)$ ، ... ، والمشتقة النونية $f^{(n)}(c)$ ، .. عند وجود هذه المشتقات .

الآن سنحصل على النظرية المشهورة المنسوبة إلى بروك تايلور(*) التى تلعب دوراً هاماً فى أبحاث كثيرة ويمكن اعتبارها امتداداً لنظرية القيمة المتوسطة.

٢٨ – ٦ نظرية تايلور . نفرض أن n عدد طبيعى ، وأن الدالة f ومشتقاتها $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ معرفة ومتصلة فى $J = [a, b]$ وأن $f^{(n)}$ موجودة فى (a, b) إذا كانت β و α تنتميان إلى J ، فإنه يوجد عدد γ بين β و α بحيث أن

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\beta - \alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta - \alpha)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}(\beta - \alpha)^n$$

البرهان . نفرض أن P هو العدد الحقيقى المعرف بالعلاقة

$$\frac{(\beta - \alpha)^n}{n!} P = f(\beta) - \left\{ f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta - \alpha) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta - \alpha)^{n-1} \right\} \tag{28.1}$$

ونعتبر الدالة φ المعرفة فى J بأنها

$$\varphi(x) = f(\beta) - \left\{ f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(\beta - x) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(\beta - x)^{n-1} + \frac{P}{n!}(\beta - x)^n \right\}$$

واضح أن φ متصلة فى J ولها مشتقة فى (a, b) . ومن الواضح أيضاً أن $\varphi(\beta) = 0$ وينتج من التعريف للعدد P أن $\varphi(\alpha) = 0$. حسب نظرية رول ، توجد نقطة γ بين β و α بحيث أن $\varphi'(\gamma) = 0$. عند حساب المشتقة φ' (باستخدام القانون العادى لمشتقة حاصل جمع وحاصل ضرب دالتين) ، نحصل على حاصل الجمع التلسكوبى

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\left\{ f'(x) - f'(x) + \frac{f''(x)}{1!}(\beta - x) + \cdots + (-1)\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-2)!}(\beta - x)^{n-2} \right.\\ &\qquad \left. + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(\beta - x)^{n-1} - \frac{P}{(n-1)!}(\beta - x)^{n-1} \right\}\\ &= \frac{P - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(\beta - x)^{n-1}\end{aligned}$$

بما أن $\varphi'(\gamma) = 0$ إذن $P = f^{(n)}(\gamma)$ ، مما يثبت الفرض وهو المطلوب إثباته .

ملاحظة : الحد الباقى

(*) بروك تايلور (١٦٨٥ — ١٧٣١) كان رياضيا انجليزيا فى مقتبل العمر . اعطى فى عام ١٧١٥ مفكوك المتسلسلات اللانهائية ، لكنه — حقيقة لروح العصر — لم يناقش التقارب . وقام لاجرانج باثبات الباقى .

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}(\beta-\alpha)^n \tag{28.2}$$

المعطى سابقاً يسمى غالباً بصيغة لاجرانج الباقى . توجد تعبيرات كثيرة أخرى للباقى ، لكن نشير حالياً فقط إلى صيغة كوشى التى تثبت أنه لعدد ما θ حيث $0<\theta<1$ ، نجد أن

$$R_n = (1-\theta)^{n-1}\frac{f^{(n)}((1-\theta)\alpha+\theta\beta)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^n \tag{28.3}$$

يمكن إثبات هذه الصيغة كما سبق ، باستثناء وضع $(\beta-\alpha)Q/(n-1)$ فى الطرف الأيسر للمعادلة (٢٨ - ١) ونعرف φ كما سبق ما عدا الحد الأخير فإنه يكون $(\beta-x)Q/(n-1)!$ نترك التفاصيل كتمرين . (فى باب ٣١ سنحصل على صيغة أخرى تتضمن استخدام التكامل لحساب الحد الباقى) .

تمرينــــات :

٢٨ - (أ) باستخدام القانون فى ٢٨ - ١ ، اثبت أنه إذا كانت

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

فإن الجذور لدوال بسل J_n ، J_{n+1} فى $(0, +\infty)$ تتشابك بعضها بعضا .

٢٨ - (ب) اثبت أنه إذا كانت $x > 0$ ، فإن

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \le \sqrt{1+x} \le 1+\frac{x}{2}$$

٢٨ - (ج) احسب $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{1.2}$. ما هى أحسن دقة يمكن أن تكون متأكدا منها ؟

٢٨ - (د) احصل على تقييات مماثلة للتلك الموجودة فى تمرين ٢٨ - ب للمقدار $(1+x)^{1/3}$ فى الفترة $[0, 7]$. استعمل هذه لحساب $\sqrt[3]{2}$ ، $\sqrt[3]{1.5}$

٢٨ - (هـ) بفرض أن $0<r<1$ ، $-1<x$. اثبت أن $(1+x)^r \ge 1+rx$ وأن التساوى يكون صحيحاً إذا وإذا فقط كانت $x = 0$.

٢٨ - (و) يقال لجذر x_0 لكثيرة الحدود p يقال إنه بسيط (أو لها جذر مكرر) إذا كانت $p'(x_0) \neq 0$ ولها تكرار n إذا كانت $p(x_0)=p'(x_0)=\cdots=p^{(n-1)}(x_0)=0$ لكى $p^{(n)}(x_0)\neq 0$

إذا كانت $a<b$ جذرين متتاليين لكثيرة الحدود ، فإنه يوجد عدد فردى من الجذور (مع حساب التكرار) لمشتقها فى (a, b) .

٢٨ - (ز) وضح أنه إذا كانت الجذور لكثيرة الحدود p جميعها حقيقية ، فإن

الجذور الكثيرة الحدود p' تكون جميعها حقيقية . وبالإضافة إلى ذلك ، إذا كانت جميع جذور p بسيطة فإن جذور p' تكون كلها بسيطة .

٢٨ – (ح) إذا كانت $f(x)=(x^2-1)^n$ وإذا كانت p هى التفاضل النونى للدالة f ، فإن p تكون كثيرة حدود من درجة n وجذورها بسيطة وواقعة فى الفـترة المفتوحة $(-1, 1)$.

٢٨ – (ط) اثبت صيغة كوشى الباقى R_n فى نظرية تايلور المعطاة بصيغة (٢٨–٣) .

٢٨ – (ى) يمكن إعطاء برهان نظرية تايلور ٢٨ – ٦ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة لكوشى بوضع

$$R(x)=f(x)-\left[f(\alpha)+\frac{x-\alpha}{1!}f'(\alpha)+\cdots+\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\alpha)\right]$$

اثبت أن $R^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)$ ، $R(\alpha)=R'(\alpha)=\cdots=R^{(n-1)}(\alpha)=0$. لاحظ أنه توجد γ_1 بين β و α بحيث أن

$$\frac{R(\beta)}{(\beta-\alpha)^n}=\frac{R(\beta)-R(\alpha)}{(\beta-\alpha)^n-0^n}=\frac{R'(\gamma_1)}{n(\gamma_1-\alpha)^{n-1}}$$

استمر فى هذا لتجد أن $R(\beta)=(\beta-\alpha)^n f^{(n)}(\gamma_n)/n!$ عند قيمة ما γ_n واقعة بين β و α .

٢٨ – (ك) إذا كانت $f(x)=e^x$ ، وضح أن الحد الباقى فى نظرية تايلور يقترب من صفر عندما $n\to\infty$ لكن الثابتين β و α .

٢٨ – (ل) إذا كانت $f(x)=\sin x$ ، وضح أن الحد الباقى فى نظرية تايلور يقترب من صفر عند $n\to\infty$ لكل الثابتين β و α .

٢٨ – (م) إذا كانت $f(x)=(1+x)^m$ حيث $m\in Q, |x|<1$ ، فإن القوانين العادية للتفاضل من حساب التفاضل والتكامل ونظرية تايلور تؤدى إلى التعبير

$$(1+x)^m=1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\cdots+\binom{m}{n-1}x^{n-1}+R_n$$

حيث R_n يمكن إعطاؤه فى صيغة لاجرانج بأنه $R_n=x^n f^{(n)}(\theta_n x)/n!$ حيث $0<\theta_n<1$.
اثبت أنه إذا كانت $0\le x<1$ ، فإن $\lim(R_n)=0$. اثبت أنه إذا كانت $-1<x<0$ فإنه لا يمكننا استخدام نفس المناقشة لنوضح أن $\lim(R_n)=0$

٢٨ – (ن) فى التمرين السابق ، استخدم صيغة كوشى للباقى للحصول على

$$R_n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots(m-1)}\frac{(1-\theta_n)^{n-1}x^n}{(1+\theta_n x)^{n-m}}$$

حيث $0<\theta_n<1$. عندما $|x|<1$ اثبت أن $|(1-\theta_n)/(1+\theta_n x)|<1$ وبرهن على أن $\lim(R_n)=0$.

٢٨ – (س) إذا كانت $f:R\to R$ ، وإذا كانت $f'(x)$ موجودة عند $x\in R$ ، وإذا كانت $f''(a)$ موجودة ، فوضح أن

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$$

أعط مثالا تكون فيه هذه النهاية موجودة ، لكن ليس للدالة مشتقة ثانية عند a .

٢٨ –(ع) بفرض أن $f_n(x)=|x|^{1+1/n}$ عند x فى $[-1,1]$ اثبت أنه كل f_n تكون قابلة للتفاضل فى $[-1,1]$ وأن (f_n) تتقارب بانتظام فى $[-1,1]$ إلى $f(x)=|x|$.

مشروعات :

٢٨ – (α) نعتبر فى هذا المشروع الدالة الأسية من وجهة نظر علم التفاضل والتكامل .

(أ) بفرض أن دالة E فى $J=(a,b)$ إلى R لها مشتقة عند كل نقطة فى الفترة J وأن $E'(x)=E(x)$ لكل $x\in J$. لاحظ أن E لها مشتقات من كل الرتب فى J وكل مشتقة تساوى E .

(ب) إذا كانت $E(\alpha)=0$ عند بعض $\alpha\in J$ ، استخدم نظرية تايلور ٢٨ – ٦ وتمرين ١٤ – ل لتوضيح أن $E(x)=0$ لكل $x\in J$.

(ﺟ) وضح أنه توجد على الأكثر دالة واحدة E فى R إلى R تحقق

$$E'(x)=E(x) \quad \text{عند} \quad E(0)=1, \quad x\in R,$$

(د) أثبت أنه إذا كانت E تحقق الشروط فى جزء (ج) ، فإنها أيضاً تحقق المعادلة الدالية

$$E(x+y)=E(x)E(y) \quad \text{عند} \quad x,y\in R$$

(إرشاد : إذا كانت $f(x)=E(x+y)/E(y)$ فإن $f'(x)=f(x)$ و $f(0)=1$) .

(ﻫ) بفرض أن (E_n) هى المتتابعة لدوال معرفة فى R بالتعريف

$$E_1(x)=1+x, \qquad E_n(x)=E_{n-1}(x)+x^n/n!$$

بفرض أن A أى عدد موجب ، وإذا كانت $|x|\le A$ وإذا كانت $m\ge n>2A$ فإن

$$|E_m(x)-E_n(x)|\le\frac{A^{n+1}}{(n+1)!}\left[1+\frac{A}{n}+\cdots+\left(\frac{A}{n}\right)^{m-n}\right]<\frac{2A^{n+1}}{(n+1)!}$$

ومن ثم تتقارب المتتابعة (E_n) بانتظام عند $|x| \leq A$.

(و) إذا كانت (E_n) متتابعة لدوال معرفة فى جزء (د) ، فإن

$$E'_n(x) = E_{n-1}(x) \quad \text{عند} \quad x \in \boldsymbol{R},$$

أثبت أن المتتابعة (E_n) تتقارب فى R لدالة E بالخواص الظاهرة فى جزء (ج) . وأن E ، هى الدالة الوحيدة بهذه الخواص .

(ز) بفرض أن E الدالة حيث $E' = E$ ، $E(0) = 1$. إذا عرفنا e بأنه العدد

$$e = E(1)$$

حينئذ e تقع بين $2\frac{2}{3}$ و $2\frac{3}{4}$. (إرشاد : $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} < e < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$ وأكثر دقة ، يمكننا أن نوضح أن $2.708 < 2+\frac{17}{24} < e < 2+\frac{13}{18} < 2.723$)

٢٨ – β يمكن فى هذا المشروع استخدام النتائج فى المثال السابق . بفرض أن E تشير إلى الدالة الوحيدة فى R بحيث أن

$$E' = E \quad \text{و} \quad E(0) = 1$$

وبفرض $e = E(1)$:

(أ) اثبت أن E تزايدية بدقة ولها مدى $P = \{x \in \boldsymbol{R} : x > 0\}$

(ب) بفرض L هى الدالة المكسية لدالة E ، بحيث أن نطاق L هو P ومداه يكون هو كل الفراغ $\boldsymbol{R}$. أثبت أن L تزايدية مضبوطة فى P ، وإذن $L(1) = 0$ ، وأن $L(e) = 1$.

(جـ) وضح أن $L(xy) = L(x) + L(y)$ لكل x, y فى P .

(د) إذا كانت $0 < x < y$ ، فإن

$$\frac{1}{y}(y-x) < L(y) - L(x) < \frac{1}{x}(y-x)$$

(إرشاد : استخدم نظرية القيمة المتوسطة إلى E) .

(هـ) الدالة L لها مشتقة عند $x > 0$ ، وأن $L'(x) = 1/x$.

(و) العدد e يحقق

$$e = \lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

(إرشاد : احسب $L'(1)$ باستخدام المتتابعة $((1 + 1/n))$ والاتصال للدالة E) .

٢٨ – γ فى هذا المشروع سنقدم الجيب وجيب التمام

(أ) بفرض h معرفة فى الفترة $J = (a, b)$ إلى R وتحقق

$$h''(x) + h(x) = 0$$

لكل x فى J . وضح أن h لها مشتقات من كل الرتب وأنه إذا كانت توجد نقطة α فى J بحيث أن $h(\alpha) = 0, h'(\alpha) = 0$ ، فإن $h(x) = 0$ لجميع $x \in J$.
(إرشاد : استخدم نظرية تايلور ٢٨ – ٦) .

(ب) وضح أنه توجد على الأكثر دالة واحدة C فى R تحقق الشروط

$$C'' + C = 0, \qquad C(0) = 1, \qquad C'(0) = 0$$

وتوجد أيضاً على الأكثر دالة واحدة S فى R تحقق

$$S'' + S = 0, \qquad S(0) = 0, \qquad S'(0) = 1$$

(جـ) نعرف متتابعة (C_n) بأنها

$$C_1(x) = 1 - x^2/2, \qquad C_n(x) = C_{n-1}(x) + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

بفرض A أى عدد موجب ، إذا كانت $|x| \leq A$ وإذا كانت $m \geq n > A$ ، فيكون

$$|C_m(x) - C_n(x)| \leq \frac{A^{2n+2}}{(2n+2)!}\left[1 + \left(\frac{A}{2n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{A}{2n}\right)^{2m-2n}\right]$$
$$< \left(\frac{4}{3}\right)\frac{A^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

ومن ثم اثبت أن المتتابعة (C_n) تتقارب بانتظام عند $|x| \leq A$. وضح أيضاً أن $C_n'(0) = 0$ و $C_n(0) = 1$ و $C_n'' = -C_{n-1}$. أثبت أن النهاية C للمتتابعة (C_n) هى الدالة الوحيدة التى لها الخواص الموجودة فى جزء (ب) .

(د) إذا عرفت (S_n) بأنها

$$S_1(x) = x, \qquad S_n(x) = S_{n-1}(x) + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

اثبت أن (S_n) تتقارب بانتظام عند $|x| \leq A$ إلى الدالة الوحيدة S ذات الخواص الموجودة فى جزء (ب) .

(هـ) اثبت أن $C' = -S$ و $S' = C$.

(و) كون متطابقة فيثاغورس $S^2 + C^2 = 1$.
(إرشاد : احسب مشتقة $(S^2 + C^2)$.

٢٨ – δ يستمر المشروع فى مناقشة دوال الجيب ودوال جيب التمام . ويمكن إجراء استعمال حر للخواص المثبتة فى المشروع السابق .

(أ) نفرض أن h هى دالة فى R وتحقق المعادلة

$$h''+h=0$$

وضح أنه يوجد ثابتان β و α بحيث أن $h=\alpha C+\beta S$

(إرشاد : $\alpha=h(0)$ و $\beta=h'(0)$)

(ب) الدالة C زوجية ، S فردية بمعنى أن

$C(-x)=C(x)$ ، $S(-x)=-S(x)$ لكل x فى R .

(جـ) اثبت « قوانين الإضافة »

$$C(x+y)=C(x)C(y)-S(x)S(y),$$
$$S(x+y)=S(x)C(y)+C(x)S(y)$$

تظل صحيحة لكل x و y فى R . (إرشاد : نفرض أن y ثابتة ، ونعرف $h(x)=C(x+y)$ ، وأثبت أن $h''+h=0, h(0)=C(y), h'(0)=-S(y)$.

(د) اثبت أن « قوانين المضاعفة »

$$C(2x)=2[C(x)]^2-1=2[S(x)]^2+1,$$
$$S(2x)=2S(x)C(x)$$

تظل صحيحة لكل x فى R .

(هـ) أثبت أن C تحقق المتباينة

$$C_1(x)=1-\frac{x^2}{2}\leq C(x)\leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}=C_2(x)$$

وإذن ، يقع أصغر جذر موجب γ للدالة C بين الجذر الموجب للدالة $x^2-2=0$ وأصغر جذر موجب للدالة $x^4-12x^2+24=0$. استخدم هذه النتيجة ، أثبت أن $\sqrt{2}<\gamma<\sqrt{3}$

(و) نعرف π بأنها أصغر جذر موجب دقيق للدالة S . أثبت أن $\pi=2\gamma$ ومن ثم استنتج أن $2\sqrt{2}<\pi<2\sqrt{3}$

(ز) أثبت أن كلا من C ، S دالتين دوريتين بدورة 2π بمعنى أن

$$C(x+2\pi)=C(x) \quad \text{و} \quad S(x+2\pi)=S(x)$$

لكل x فى R . أيضا وضح أن

$$S(x)=C\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-C\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$C(x)=S\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=S\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

لكل x فى R .

٢٨ – ε بمتابعة نموذج المشروعين السابقين نقدم جيب تمام الزائدى والجيب الزائدى كدوال تحقق

$$c'' = c, \quad c(0) = 1, \quad c'(0) = 0,$$
$$s'' = s, \quad s(0) = 0, \quad s'(0) = 1$$

على الترتيب . اثبت الوجود والوحدانية لهذه الدوال وأثبت أن

$$c^2 - s^2 = 1$$

أثبت نتائج مماثلة إلى (أ) – (د) فى المشروع ٢٨ – δ ووضح أنه ، إذا رمزنا للدالة الأسية بالرمز E ، فإن

$$c(x) = \tfrac{1}{2}(E(x) + E(-x)), \qquad s(x) = \tfrac{1}{2}(E(x) - E(-x))$$

٢٨ – ζ يقال لدالة φ فى فترة J للفراغ R إلى R إنها (نقطة منتصف) محدبة فى حالة

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \tfrac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(y))$$

لكل x, y فى J . (فى نصوص هندسية : تقع نقطة المنتصف لأى وتر لمنحنى $y = \varphi(x)$ فوق أو على المنحنى) . سنعرض فى هذا المشروع أن φ دالة محدبة متصلة .

(أ) إذا كانت $n = 2^m$ وإذا كانت $x_1, \ldots, x_n$ تنتمى إلى J ، فإن

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}(\varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_n))$$

(ب) إذا كانت $n < 2^m$ وإذا كانت $x_1, \ldots, x_n$ تنتمى إلى J ، فنفرض أن x_j عند $j = n+1, \ldots, 2^m$ تساوى

$$\bar{x} = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

اثبت أن نفس المتباينة تظل صحيحة كما فى جزء (أ) .

(ج) بما أن φ متصلة ، اثبت أنه إذا كانت x, y تنتمى إلى J وأن $t \in I$ ، فإن

$$\varphi((1-t)x + ty) \le (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y)$$

(بنصوص هندسية : الوتر الشامل يقع فوق أو على المنحنى) .

(د) نفرض أن φ لها مشتقة ثانية فى J . فشرط ضرورى وكاف لكون φ محدبة

فى J هو $\varphi''(x) \geq 0$ عند $x \in J$. (إرشاد : لإثبات خاصية الضرورة ، استخدم تمرين ٢٠ – و . لإثبات الكفاية ، استخدام نظرية تايلور وأخذ المفكوك عند $x = (x+y)/2$) .

(هـ) إذا كانت φ دالة محدبة متصلة فى J ونفرض أن $x < y < z$ تنتمى إلى J وضح أن

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \leq \frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x}$$

لذلك إذا كانت $w \leq x \leq y \leq z$ تنتمى إلى J ، فيكون

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(w)}{x-w} \leq \frac{\varphi(z)-\varphi(y)}{z-y}$$

(ف) اثبت أن دالة محدبة متصلة φ فى J لها مشتقة طرف أيمن ومشتقة طرف أيسر عند كل نقطة داخل J . وبالإضافة إلى ذلك ، تكون الفئة الجزئية التى فيها φ' غير موجودة قابلة للعد .

الباب التاسع والعشرون — تكامل ريمان — اشتيلتجز :

سنعرف فى هذا الباب التكامل لريمان – اشتيلتجز (*) للدوال محدودة فى فترة مدمجة للفراغ R . وبما أننا نفترض أن القارئ يعرف على الأقل بطريقة غير رسمية « علم التكامل » من منهج التكامل والتفاضل فإننا سوف لا نضيف دافعاً شاملا لها .

سيرغب القارئ الذى يواصل دراسته للتحليل الرياضى فى أن يصبح ملماً بتكامل ليبيج الأكثر تعميما فى وقت مبكر . لكن بما أن تكاملات ريمان وتكاملات ريمان – اشتيليجز مناسبة لأغراض كثيرة وأكثر ألفة للقارئ . فإننا نفضل معالجتها هنا ويترك نظرية لبسيج الأكثر تقدماً لمنهج لاحق .

سنعتبر دوال قيمتها حقيقية محدودة فى فترات مغلقة لنظام العدد الحقيقى ، نعرف التكامل لأى من مثل هذه الدوال بالنسبة لأخرى ، نشتق الخواص الرئيسية لهذا التكامل .

(*) (جورج فريد رش) برن هارد ريمان (١٨٢٦ – ١٨٦٦) كان الابن لراع دينى قروى فقير وولد قريبا من هانوفر . تعلم فى جيتنجن بالمانيا الغربية وبرلين ودرس فى جيتنجن . كان أحد المؤسسين لنظرية الدوال التحليلية ، لكن قام أيضا بمساهمة أساسية للهندسة ، نظرية العدد ، الرياضة الفيزيائية .

توماس جونز اشتيلتجز (١٨٥٦ – ١٨٩٤) كان فلكيا ورياضيا هولنديا . تعلم فى باريس مع هرميت وحصل على الاستاذية فى تولوز . واعماله الاكثر شهرة هى مذكرته على الكسور المتصلة ، المسألة الخاصة ، بالعزوم ، تكامل اشتلتجز الذى نشر فى آخر سنة من حياته القصيرة .

لفرع التكامل الذى نعتبره هنا أكثر تعميما بعض الشئ عما اعتبر فى المناهج السابقة والإضافات التعميمية تجعله أكثر فائدة فى بعض التطبيقات ، وخاصة الإحصاء ، وفى نفس الوقت ، توجد تعقيدات إضافية قليلة للعدة النظرية التى تحتاجها نقاش صارم لتكامل ريمان المادى الجدير أن تنمى هذا النمط لنظرية التكامل بالقدر الذى تتطلبه تطبيقاته الأكثر انتشاراً .

نفرض أن f و g دالتين قيمهما حقيقية ومعرفتين فى فترة مغلقة $J = [a, b]$ للخط الحقيقى . سنفرض أن كلا من f ، g محدودتين فى J ، سوف لا يتكرر هذا الفرض الدائم . انقسام من الفترة J هى مجموعة محدودة لفترات غير متراكبة اتحادها هو J . نصف عادة جزء P بتحديد فئة محدودة لأعداد حقيقية$(x_0, x_1, \ldots, x_n)$بحيث أن

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$$

وبحيث أن الفترات الجزئية الحادثة فى جزء P هى الفترات $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ وأكثر صواباً ، نشير للنقط الطرفية x_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ كنقط التقسيم المناظرة إلى P . لكن ، عملياً من المناسب دائما ، وبدون تسبب فى الإبهام ، استعمال الكلمة « انقسام » لنشير إما لمجموعة الفترات الجزئية أو مجموعة النقط الطرفية لهذه الفترات الجزئية . ومن ثم نكتب $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$

إذا كانت P و Q تقسيمين للفترة J ، نقول أن Q تكرير التقسيم P أو أن Q تكون أدق من Q فى حالة كون كل فئة جزئية فى Q محتوية فى فترة جزئية ما فى P . هذا يكون مكافئاً للزوم أن كل نقطة تقسيم فى P هى أيضاً نقطة تقسيم فى Q . لهذا السبب ، نكتب $P \subseteq Q$ عندما يكون Q تكرير للتقسيم P .

٢٩ - ١ تعريف . إذا كانت P هى تقسيم للفترة J ، فإن حاصل جمع ريمان - اشيلتجز للدالة f بالنسبة إلى g والمناظرة إلى $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ هى عدد حقيقى $S(P; f, g)$ فى الصورة

$$S(P; f, g) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\{g(x_k) - g(x_{k-1})\} \tag{29.1}$$

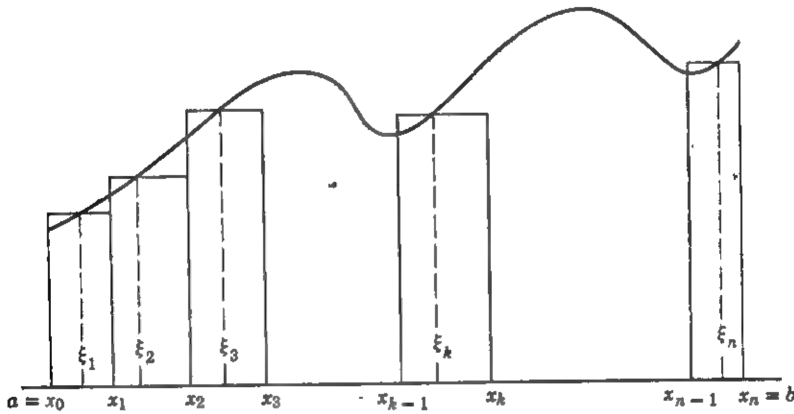
قد اخترنا هنا أعداد ξ_k تحقق

$$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k \qquad \text{عند} \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

لاحظ أنه إذا كانت الدالة g المعرفة بالتعريف $g(x) = x$, ، فإن التعبير فى معادلة (٢٩ - ١) يئول إلى

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{29.2}$$

حاصل الجمع (٢٩–٢) يسمى عادة بحاصل جمع ريمان للدالة f المناظر للتقسيم P ويمكن تفسيره بأنه المساحة لاتحاد مستطيلات قواعدها $[x_{k-1}, x_k]$ وارتفاعاتها $f(\xi_k)$. (انظر شكل ٢٩– ١) . أى أنه إذا كان التقسيم P دقيقاً جدا ، فنتوقع أن حاصل جمع ريمان (٢٩ – ٢) ينتج تقريباً إلى « المساحة تحت الشكل التخطيطى للدالة f » . وفى حالة دالة عامة g ، ينبغى القارئ أن يترجم حاصل جمع ريمان – اشتيلتجز (٢٩ – ١) بأنه مشابه لحاصل جمع ريمان (٢٩ – ٢) – باستثناء أنه بدلا من اعتبار الطول $x_k - x_{k-1}$ للفترة الجزئية $[x_{k-1}, x_k]$ فإننا نعتبر بعضاً من مقياس آخر لمقدار هذه الفترة الجزئية أى الفرق $g(x_k) - g(x_{k-1})$. أى أنه إذا كانت $g(x)$ هى « الكتلة » الكلية أو « الشحنة » الكلية فى الفترة $[a, x]$ ، فإن $g(x_k) - g(x_{k-1})$ تدل على « الكتلة » أو « الشحنة » فى الفترة الجزئية $[x_{k-1}, x_k]$. الفكرة هى أننا نريد أن نكون ماهرين فى اعتبار مقاييس أخرى لمقدار فترة خلاف طولها ، لذلك نسمح بحواصل الجمع (٢٩–١) الأكثر عموماً نوعاً ما .



(شكل ٢٩ – ١ حاصل جمع ريمان كساحة)

سيلاحظ أن كلا من حاصل الجمع (٢٩–١) ، (٢٩–٢) يعتمد على الاختيار « للنقط الوسطى » ، أى ، على الأعداد $\xi_k, 1 \leq k \leq n$. أى أنه يمكن أن يكون من المناسب إدخال مدلولا يلعب دوراً فى إظهار هذه الأعداد . لكن ، بتقديم تقسيم أدق يكون من الممكن دائماً افتراض أن النقط الوسطى هى نقط تقسيم . فى الحقيقة ، إذا أدخلنا التقسيم $Q = (x_0, \xi_1, x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, x_n)$ وحاصل الجمع $S(Q; f, g)$ حيث أخذنا النقط الوسطى بحيث تكون هى النقط الطرفية اليمنى واليسرى على التعاقب للفترة الجزئية ، حينئذ يعطى حاصل الجمع $S(Q; f, g)$ نفس القيمة مثل حاصل الجمع (٢٩ – ١) . يمكننا دائماً افتراض أن التقسيم يقسم الفترة إلى عدد زوجى من الفترات الجزئية وتكون النقط الوسطى هى النقط الطرفية اليمنى واليسرى على التعاقب لهذه الفترات الجزئية . لكن ، سوف لايكون ضرورياً أن نحتاج إلى العملية التقسيمية « المثالية » ، وسوف لانجد ضرورة لإظهار هذه النقط الوسطى .

٢٩ – ٢ تعريف . نقول إن f قابلة للتكامل بالنسبة إلى g فى J إذا كان يوجد عدد حقيق I بحيث أنه لكل عدد $\varepsilon > 0$ يوجد تقسيم P_ε للفترة J بحيث أنه إذا كانت P أى تكرير أو أى تنقية لتقسيم P_ε ، $S(P; f, g)$ هو أى حاصل جمع لريمان – اشتيلتجز ، المناظر إلى P ، حينئذ

$$|S(P; f, g) - I| < \varepsilon \tag{29.3}$$

فى هذه الحالة العدد يكون I محدداً وحيداً ويرمز له بالرمز

$$I = \int_a^b f\,dg = \int_a^b f(t)\,dg(t)$$

يسمى تكامل ريمان – اشتيلتجز للدالة f بالنسبة إلى g فى الفترة $J = [a, b]$. نسمى الدالة f بالدالة المطلوبة تكاملها (تكاملية) ، وتسمى g بالمكاملة . أحياناً نقول أن f هى g القابلة للتكامل إذا كانت f قابلة للتكامل بالنسبة إلى g . فى الحالة الخاصة عندما $g(x) = x$ نجد أنه إذا كانت f قابلة للتكامل بالنسبة إلى g ، فنقول إن f قابلة لتكامل ريمان .

قبل إظهار أى من خواص تكامل ريمان – اشتيلتجز ، سنعتبر بعض أمثلة . لكى نجعل الحسابات بسيطة ، اختبرت بعض من هذه الأمثلة بحيث تكون حالات شديدة توجد أمثلة أكثر باتحاد الأمثلة المعطاة أسفل .

٢٩ – ٣ أمثلة . (أ) قد لاحظنا من قبل أنه إذا كانت $g(x) = x$ فإن التكامل يؤول إلى تكامل ريمان العادى لحساب التفاضل والتكامل الأساسى .

(ب) إذا كانت g مقداراً ثابتاً فى الفترة $[a, b]$ ، فإن أى دالة f تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى g ومقدار التكامل يكون صفراً .

(ﺟ) بفرض أن g معرفة فى الفترة $J = [a, b]$ بأنها

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, \qquad x = a, \\ &= 1, \qquad a < x \le b \end{aligned}$$

فنترك كتمرين لنوضح أن دالة f تكون قابلة التكامل بالنسبة إلى g إذا وإذا فقط f كانت متصلة عند a وأنه فى هذه الحالة تكون قيمة التكامل هى $f(a)$.

(د) بفرض أن c نقطة داخلية للفترة $J = [a, b]$ وبفرض أن g معرفة بأنها

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, \qquad a \le x \le c, \\ &= 1, \qquad c < x \le b \end{aligned}$$

فكتمرين نوضح أن دالة f تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى g إذا وإذا فقط كانت متصلة عند c من اليمين (بمعنى أنه لكل $\varepsilon > 0$ توجد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث أنه إذا كانت

$c \le x < c+\delta(\varepsilon)$ و $x \in J$ ، فنجد $|f(x)-f(c)| < \varepsilon$. إذا كانت الدالة f تحقق هذا الشرط ، فإن قيمة التكامل هو $f(c)$. (لاحظ أن الدالة المكاملة g متصلة عند c من اليسار) .

(هـ) بتعديل المثال السابق ، نفرض أن h معرفة بأنها

$$\begin{aligned} h(x) &= 0, \qquad a \le x < c, \\ &= 1, \qquad c \le x \le b \end{aligned}$$

إن h متصلة عند c من اليمين وتكون دالة f قابلة للتكامل بالنسبة إلى h إذا وإذا فقط f كانت متصلة عند c من اليسار . وفى هذه الحالة تكون القيمة للتكامل هى $f(c)$.

(و) بفرض أن $c_1 < c_2$ نقطتين داخليتين للفترة $J=[a, b]$ وبفرض أن g معرفة بأنها

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha_1, \qquad a \le x \le c_1, \\ &= \alpha_2, \qquad c_1 < x \le c_2, \\ &= \alpha_3, \qquad c_2 < x \le b \end{aligned}$$

إذا كانت f متصلة عند النقط c_1, c_2 ، فينتج أن f قابلة للتكامل بالنسبة إلى g وأن

$$\int_a^b f\,dg = (\alpha_2-\alpha_1)f(c_1) + (\alpha_3-\alpha_2)f(c_2)$$

بأخذ نقط أكثر يمكننا الحصول على حاصل جمع يتضمن القيم للدالة f عند نقط فى الفترة J ، موزونة بقيم القفزات للدالة g عند هذه النقط .

(ز) نفرض أن الدالة f هى دالة درشلت غير المتصلة (مثال ٢٥ – ٥ (ز)) المعرفة بأنها

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \qquad \text{إذا كانت } x \text{ قياسية} \\ &= 0 \qquad \text{إذا كانت } x \text{ غير قياسية} \end{aligned}$$

وبفرض أن $g(x)=x$ اعتبر هـــذه الدوال على $I=[0, 1]$. إذا كان تقسيم P يتكون من n فترات جزئية متساوية ، حينئذ باختيار k من النقط الوسطى فى حاصل جمع $S(P; f, g)$ بحيث تكون قياسية وتكون النقط الباقية غير قياسية $S(P; f, g)=k/n$ فينتج أن f ليست قابلة لتكامل ريمان .

(ح) نفرض أن f دالة معرفة فى I بأنها $f(0)=1, f(x)=0$ عند x غير قياسية ، $f(m/n)=1/n$ حيث n و m عددان طبيعيان ليس بينهما عامل مشترك خلاف الواحد الصحيح . بينا فى مثال ٢٠ – ٥ (ح) أن f متصلة عند كل عدد غير قياسى وغير متصلة عند كل عدد قياسى . إذا كانت $g(x)=x$ ، فإنه كتمرين يمكن أن نوضح أن f تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى g وأن قيمة التكامل تساوى صفراً .

٢٩ — ٤ معيار كوشى لقابلية التكامل . تكون الدالة f قابلة التكامل بالنسبة إلى g فى $J=[a,b]$ إذا وإذا فقط كان لكل عدد $\varepsilon>0$ تقسيم Q_ε للفترة J بحيث أنه إذا كانت Q و P تكريرين للتقسيم Q_ε وإذا كانت $S(Q;f,g)$ و $S(P;f,g)$ هما أى حاصل جمع لريمان — اشتلتجز المناظرين ، فيكون

$$|S(P;f,g)-S(Q;f,g)|<\varepsilon \tag{29.4}$$

البرهان . إذا كانت f قابلة للتكامل ، فإنه يوجد تقسيم P_ε بحيث أنه إذا كانت Q ، P تنقيتين للتقسيم P_ε ، فإن أى حاصل جمع لريمان —اشتيلتجز أى حواصل جمع مناظرة لريمان المناظرين يحققان $|S(Q;f,g)-I|<\varepsilon/2$ و $|S(P;f,g)-I|<\varepsilon/2$ باستخدام متباينة المثلث ، نحصل على (٢٩ — ٤) .

وبالعكس ، نفرض أن المعيار يتحقق . لنوضح أنه إذا كانت f قابلة للتكامل بالنسبة إلى g ، فنحتاج لإيجاد القيمة لتكامله واستخدام تعريف ٢٩ — ٢ . نفرض أن Q_1 تقسيم الفترة J بحيث أنه إذا كانت Q و P تكريرين التقسيم Q_1 ، فإن

$$|S(P;f,g)-S(Q;f,g)|<1$$

إستنتاجياً ، نختار Q_n لتكون تكريراً التقسيم Q_{n-1} بحيث أنه إذا كانت Q و P تكريرين التقسيم Q_n ، فإن .

$$|S(P;f,g)-S(Q;f,g)|<1/n \tag{29.5}$$

اعتبر متتابعة $(S(Q_n;f,g))$ لأعداد حقيقية حصلنا عليها بهذه الطريقة . بما أن Q_n تكرير للتقسيم Q_m حيث $n\geq m$ ، فإن هذه المتتابعة لحواصل جمع هى متتابعة كوشى لأعداد حقيقية ، بغض النظر عن كيفية اختيار النقط الوسطى حسب نظرية ١٦ —١٠ ، تتقارب المتتابعة إلى عدد حقيقى ما L .

ومن ثم ، إذا كانت $\varepsilon>0$ ، فيوجد عدد صحيح N بحيث أن $2/N<\varepsilon$ وأن

$$|S(Q_N;f,g)-L|<\varepsilon/2$$

إذا كانت P تكريراً التقسيم Q_N ، فإنه ينتج من تكوين التقسيم Q_N أن

$$|S(P;f,g)-S(Q_N;f,g)|<1/N<\varepsilon/2$$

ومن ثم لأى تنقية P التقسيم Q_N وأى حاصل جمع لريمان واشتلتجز المناظر نحصل على

$$|S(P;f,g)-L|<\varepsilon \tag{29.6}$$

هذا يثبت أن f تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى g فى الفترة J وأن القيمة لهذا التكامل هو L . وهو المطلوب إثباته

بعض خواص التكامل :

تنسب الخاصية الآتية أحياناً إلى الخطية الثنائية لتكامل ريمان اشتلتجز .

٢٩ – ٥ نظرية . (ا) إذا كانت f_1 و f_2 قابلين للتكامل بالنسبة إلى g فى J ، وكان α, β عددين حقيقيين ، فإن $\alpha f_1 + \beta f_2$ تكون قابلة التكامل بالنسبة إلى g فى J وأن

$$\int_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2)\, dg = \alpha \int_a^b f_1\, dg + \beta \int_a^b f_2\, dg \tag{29.7}$$

(ب) إذا كانت f قابلة للتكامل بالنسبة إلى g_1 ، g_2 فى J ، وكان α, β عددين حقيقيين ، فإن f تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى $g = \alpha g_1 + \beta g_2$ فى J وأن

$$\int_a^b f\, dg = \alpha \int_a^b f\, dg_1 + \beta \int_a^b f\, dg_2 \tag{29.8}$$

البرهان . (ا) نفرض أن $\varepsilon > 0$ ونفرض أن $P_1 = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ ، $P_2 = (y_0, y_1, \ldots, y_m)$ تقسيمين للفترة $J = [a, b]$ بحيث أنه إذا كانت Q تكريراً لكلتا P_2 و P_1 ، فإنه لأى حواصل جمع ريمان واشتلتجز المناظرة ، يكون

$$|I_1 - S(Q; f_1, g)| < \varepsilon, \qquad |I_2 - S(Q; f_2, g)| < \varepsilon$$

بفرض أن P_ε أى تقسيم للفترة J التى هى تكرير لكلتا P_2 و P_1 (مثال ذلك ، ضم كل نقط التقسيم فى P_2 و P_1 لتكوين P_ε) . إذا كانت Q تقسيما للفترة J بحيث أن $P_\varepsilon \subseteq Q$ ، فإن كلتا العلاقتين فى أعلى لا تزال صحيحة عند استخدام نفس النقط الوسطى نحصل بوضوح

$$S(Q; \alpha f_1 + \beta f_2, g) = \alpha S(Q; f_1, g) + \beta S(Q; f_2, g)$$

ينتج من هذا ومن المتباينات السابقة ان

$$\begin{aligned}|\alpha I_1 + \beta I_2 - S(Q; \alpha f_1 + \beta f_2, g)| &= |\alpha\{I_1 - S(Q; f_1, g)\} + \beta\{I_2 - S(Q; f_2, g)\}| \\ &\le (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon\end{aligned}$$

هذا يبرهن أن $\alpha I_1 + \beta I_2$ هو تكامل $\alpha f_1 + \beta f_2$ بالنسبة إلى g . مما يثبت جزء (أ) ، برهان الجزء (ب) يكون مماثلا وسيترك القارىء . وهو المطلوب إثباته

توجد خاصية جمعية مفيدة أخرى ممتلكة بواسطة تكامل ريمان –اشتلتجز ، أى ، بالنسبة للفترة التى فيها يكون التكامل ممتدا ، ولكى نحصل على النتيجة الآتية نستخدم الصورة للنهاية التى قدمت فى تعريف ٢٩ – ٢ . نوعاً من النهاية أكثر تقييداً يتطلب المتباينة (٢٩ – ٣) لأى حاصل جمع لريمان – اشتلتجز المناظر لتقسيم $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ بحيث أن

$$\|P\| = \sup\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\} < \delta(\varepsilon)$$

هذه الصورة للنهاية تستخدم غالباً لتعريف تكامل ريمان وأحياناً تستخدم لتعريف تكامل ريمان-اشتلتجز . لكن ، يستخدم مؤلفون كثيرون التعريف الذى قدمناه ، والذى يرجع إلى س . بولارد ، لأنه يوسع بدرجة بسيطة فصل الدوال القابلة للتكامل . كنتيجة لهذا التوسيع ، تكون النتيجة الآتية صحيحة بدون أى قيود إضافية . انظر تمرينات ٢٩ – ب – ص.

٢٩ – ٩ نظرية . (أ) نفرض أن $a \leq c \leq b$ وأن f تكون قابلة التكامل بالنسبة إلى g فى كلتا الفترتين الجزئيتين $[c, b]$ و $[a, c]$. إذن f تكون قابلة التكامل بالنسبة إلى g فى الفترة $[a, b]$ ويكون

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg \tag{29.9}$$

(ب) نفرض أن f قابلة التكامل بالنسبة إلى g فى الفترة $[a, b]$ ونفرض أن c تحقق $a \leq c \leq b$. فينتج أن f قابلة التكامل بالنسبة إلى g فى الفترتين الجزئيتين $[c, b]$ و $[a, c]$ وأن قانون (٢٩ – ٩) يظل صحيحاً .

البرهان . (أ) إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، نفرض P'_ε تقسيم الفترة $[a, c]$ بحيث أنه إذا كانت P' تكريرا للتقسيم P'_ε ، فإن المتباينة (٢٩ – ٣) تظل صحيحة لأى حاصل جمع ريمان – اشتلتجز . نفرض أن P''_ε هى التقسيم المناظر للفترة $[c, b]$. إذا كانت P_ε هى التقسيم للفترة $[a, b]$ المكون باستخدام نقط التقسيم فى P''_ε و P'_ε ، وإذا كانت P هى تكرير للتقسيم P_ε ، فنجد أن

$$S(P; f, g) = S(P'; f, g) + S(P''; f, g)$$

حيث P'' و P' تدلان إلى تقسيمى $[c, b]$ و $[a, c]$ المستنتج بواسطة P وحيث تستخدم النقط الوسطى المناظرة . لذلك ، نحصل على

$$\left| \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg - S(P; f, g) \right|$$

$$\leq \left| \int_a^c f\,dg - S(P'; f, g) \right| + \left| \int_c^b f\,dg - S(P''; f, g) \right| < 2\varepsilon$$

ينتج أن f قابلة للتكامل بالنسبة إلى g فى $[a, b]$ وأن القيمة لتكاملها هى

$$\int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg$$

(ب) سنستخدم معيار كوشى ٢٩ – ٤ لنبرهن أن f تكون قابلة التكامل فى $[a, c]$. بما أن f قابلة التكامل فى $[a, b]$ ، فبأخذ $\varepsilon > 0$ يوجد تقسيم Q_ε للفترة $[a, b]$ بحيث أنه إذا كانت Q و P تنقيتين للقيم Q_ε ، فإن علاقة (٢٩ – ٤) تظل قائمة لأى

حاصل جمع ريمان – اشتلتجز المناظر من الواضح أنه يمكننا افتراض أن النقطة c تنتمى إلى تقسيم Q_ε ، ونفرض أن Q'_ε تقسيم الفترة $[a, c]$ ويتكون من هذه النقط للتقسيم Q_ε التى تنتمى إلى $[a, c]$. نفرض أن P', Q' تقسيمان للفترة $[a, c]$ اللذان هما تكريران للتقسيم Q'_ε ونحصل على امتداديهما التقسيمين Q و P للفترة $[a, b]$ باستخدام النقط فى Q_ε التى تنتمى إلى الفترة $[c, b]$. بما أن Q و P تكريران التقسيم Q_ε ، فينتج أن علاقة (٢٩ – ٤) تظل قائمة ، لكن ، من الواضح من حقيقة كون Q و P متطابقتين فى $[c, b]$ ذلك ، إذا استخدمنا نفس النقط الوسطى ، نجد أن

$$|S(P'; f, g) - S(Q'; f, g)| = |S(P; f, g) - S(Q; f, g)| < \varepsilon$$

إذن ، معيار كوشى يثبت قابلية التكامل للدالة f بالنسبة إلى g فى الفترة الجزئية $[a, c]$ ونفس المناقشة تستخدم أيضاً للفترة $[c, b]$. وبإثبات هذه القابلية التكامل فإن جزء (أ) يثبت صحة القانون (٢٩ – ٩) .

حيث أننا لم نستبدل الدورين التكاملية f والمكاملة g ، فربما لا يخطر على بال القارىء أنه ربما يكون من الممكن عمل ذلك . وبالرغم من أن النتيجة الآتية ليست بالضبط مثل « قانون التكامل بالتجزىء » لحساب التفاضل والتكامل ، فإن النتيجة متقاربة ونشير إليها عادة بذلك الإسم .

٢٩ – ٧ تكامل بالتجزىء . تكون دالة f قابلة التكامل بالنسبة إلى g فى $[a, b]$ إذا وإذا فقط g كانت قابلة التكامل بالنسبة إلى f فى $[a, b]$. فى هذه الحالة يكون

$$\int_a^b f\,dg + \int_a^b g\,df = f(b)g(b) - f(a)g(a) \tag{29.10}$$

البرهان . سنفرض أن f قابلة التكامل بالنسبة إلى g . نفرض أن $0 < \varepsilon$ ونفرض أن P_ε تقسيم الفترة $[a, b]$ بحيث أنه إذا كانت Q تكريرا التقسيم P_ε ، $S(Q; f, g)$ هى أى حاصل جمع ريمان – اشتلتجز المناظر ، فينتج

$$\left| S(Q; f, g) - \int_a^b f\,dg \right| < \varepsilon \tag{29.11}$$

الآن نفرض أن P تكرير التقسيم P_ε ونعتبر حاصل جمع ريمان – اشتلتجز $S(P; g, f)$ المعطى بأنه

$$S(P; g, f) = \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\{f(x_k) - f(x_{k-1})\}$$

حيث $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$. نفرض أن $Q = (y_0, y_1, \ldots, y_{2n})$ تقسيم الفترة $[a, b]$ التى حصل عليهما باستخدام كلتا ξ_k ، x_k كنقط تقسيم ، ومن ثم $y_{2k} = x_k$ ،

$y_{2k-1} = \xi_k$. اجمع واطرح الحدود $f(y_{2k})g(y_{2k})$ عند $k = 0, 1, \ldots, n$ إلى $S(P; g, f)$ واعد الترتيب لحصول على

$$S(P; g, f) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{k=1}^{2n} f(\eta_k)\{g(y_k) - g(y_{k-1})\}$$

حيث نختار النقط الوسطى η_k بحيث تكون النقط x_j إذن نحصل على

$$S(P; g, f) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - S(Q; f, g)$$

حيث التقسيم $Q = (y_0, y_1, \ldots, y_{2n})$

تكرير التقسيم P_ε حسب قانون (٢٩ — ١١) ، يكون

$$\left| S(P; g, f) - \left\{ f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f\,dg \right\} \right| < \varepsilon$$

بشرط أن P تكرير التقسيم P_ε . هذا يبرهن أن g تكون قابلة التكامل بالنسبة إلى f فى الفترة $[a, b]$ ما يثبت قانون (٢٩ — ١٠) وهو المطلوب إثباته .

تعديل التكامل :

عندما يكون للدالة المكاملة g مشتقة متصلة ، فمن الممكن ومن المناسب غالباً أن نستبدل تكامل ريمان — اشتلتجز بتكامل ريمان . نقرر الآن صحة هذا الاختزال .

٢٩ — ٨ نظرية . إذا كانت المشتقة g' موجودة ومتصلة فى J وإذا كانت f قابلة للتكامل بالنسبة إلى g ، فان حاصل الضرب $f\,g'$ قابل لتكامل ريمان

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b fg' \tag{29.12}$$

البرهان . الفرض يدل أن g' متصلة بانتظام فى J . إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، فنفرض أن $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ تقسيم J بحيث أنه إذا كانت ξ_k و ζ_k تنتمى إلى $[x_{k-1}, x_k]$ فيكون $|g'(\xi_k) - g'(\zeta_k)| < \varepsilon$. نعتبر الفرق بين حاصل جمع ريمان — اشتلتجز $S(P; f, g)$ وحاصل جمع ريمان $S(P; fg')$ ، باستخدام نفس النقط الوسطى ξ_k لإجراء هذا نحصل على حاصل جمع الحدود فى الصورة

$$f(\xi_k)\{g(x_k) - g(x_{k-1})\} - f(\xi_k)g'(\xi_k)\{x_k - x_{k-1}\}$$

إذا طبقنا نظرية القيمة المتوسطة ٢٧—٦ على g ، فيمكننا كتابة هذا الفرق فى الصورة

$$f(\xi_k)\{g'(\zeta_k) - g'(\xi_k)\}(x_k - x_{k-1})$$

حيث ζ_k نقطة ما فى الفترة $[x_{k-1}, x_k]$. بما أن هذا الحد يكون مسودا (ومسيطرا) بالكية $\varepsilon\,\|f\|\,(x_k - x_{k-1})$ فنستنتج أن

$$|S(P; f, g) - S(P; fg')| \le \varepsilon \, \|f\| \, (b-a)$$

حيث التقسيم P يكون دقيقا بدرجة كافية . بما أن التكامل فى الطرف الأيسر من (٢٩–١٢) موجود وهو النهاية لحاصل جمع ريمان – اشتلتجز $S(P; f, g)$ ، فنستنتج أن التكامل فى الطرف الأيمن (٢٩ – ١٢) موجود أيضاً وأن التساوى يظل صحيحاً .

وهو المطلوب إثباته

لامتداد هذه النتيجة ، أنظر نظرية ٣٠ – ١٣ .

٢٩ – ٩ أمثلة . (أ) ينتج من النتائج التى ستبرهن فى باب ٣٠ أن الدالة $f(x) = x$ قابلة للتكامل بالنسبة إلى $g(x) = x^2$ فى $J = [0, 1]$. وبفرض هذا ، فإن نظرية ٢٩–٨ توضح أن

$$\int_0^1 x \, d(x^2) = \int_0^1 x \cdot 2x \, dx = \tfrac{2}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

(قد استخدمنا هنا نتائج من حساب التفاضل والتكامل التى ستبرهن فى باب ٣٠) .

(ب) إذا استخدمنا نظرية ٢٩ – ٧ التكامل بالتجزىء للدالة الموجودة فى (أ) ، نحصل على

$$\int_0^1 x \, d(x^2) = x^3 \Big|_0^1 - \int_0^1 x^2 \, dx = 1 - \tfrac{1}{3}x \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

(ج) ينتج من نتائج ستبرهن فى باب ٣٠ أن $f(x) = \sin x$ قابلة للتكامل بالنسبة إلى f فى الفترة $J = [0, \pi/2]$. بفرض هذا ، نحصل على

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, d(\sin x) = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx = \tfrac{1}{2}(\sin x)^2 \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

(د) إذا استخدمنا نظرية ٢٩ – ٧ التكامل بالتجزىء إلى جزء (ج) نحصل على

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, d(\sin x) = (\sin x)^2 \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, d(\sin x)$$

ومن ثم ينتج أن

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, d(\sin x) = \tfrac{1}{2}(\sin x)^2 \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

(ﻫ) نورد أكبر دالة صحيحة فى R إلى R ، التى نرمز إليها بالرمز الخاص $[\cdot]$ والمعرفة بأنه إذا كانت $x \in R$ ، فإن $[x]$ هى أكبر عدد صحيح أقل أو يساوى x . ومن ثم $[\pi] = 3, [e] = 2, [-2.5] = -3$. يجب على القارىء عمل رسم تخطيطى لهذه الدالة وملاحظة أنها متصلة من اليمين ، بقفزات مساوية للواحد الصحيح عند الأعداد الصحيحة .

ينتج أنه إذا كانت f دالة متصلة فى $[0, 5]$ ، فإن f تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى $x \in [0, 5]$ و $g(x) = [x]$ ، وأن

$$\int_0^5 f(x)\, d([x]) = \sum_{j=1}^{5} f(j)$$

(ف) ينتج من باب ٣٠ أن $f(x) = x^2$ قابلة التكامل بالنسبة إلى كلتا $g_2(x) = [x]$ و $g_1(x) = x$ على $[0, 5]$. لذلك فهى قابلة التكامل بالنسبة إلى $g(x) = x + [x]$ ويكون

$$\int_0^5 x^2\, d(x + [x]) = \int_0^5 x^2\, dx + \int_0^5 x^2\, d([x])$$
$$= \tfrac{1}{3}5^3 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

تمرينات :

٢٩ – (أ) إذا كانت f ثابتة فى الفترة $[a, b]$ ، فإنها قابلة للتكامل بالنسبة إلى أى دالة وأن

$$\int_a^b f\, dg = f(a)\{g(b) - g(a)\}$$

٢٩ – (ب) إذا كانت g كما فى مثال ٢٩ – ٣ (ج) ، أثبت أن f قابلة للتكامل بالنسبة إلى g إذا وإذا فقط كانت f متصلة عند a .

٢٩ – (ج) بفرض أن g معرفة فى $I = [0, 1]$ بأنها $g(x) = 0$ عند $0 \le x \le \frac{1}{2}$، $g(x) = 1$ عند $\frac{1}{2} < x \le 1$. أثبت أن f تكون قابلة التكامل بالنسبة إلى g فى I إذا وإذا فقط f كانت متصلة عند $\frac{1}{2}$ من اليمين . فى هذه الحالة تكون قيمة التكامل هى $f(\frac{1}{2})$.

٢٩ – (د) وضح أن الدالة f ، المعطاة فى مثال ٢٩ – ٣ (ح) قابلة لتكامل ريمان فى I وأن القيمة لتكاملها هى صفر .

٢٩ – (هـ) إذا كانت f قابلة للتكامل فى $[a, b]$ بالنسبة إلى f ، فإن

$$\int_a^b f\, df = \tfrac{1}{2}\{(f(b))^2 - (f(a))^2\}$$

(أ) أثبت هذا باختيار حاصل جمع ريمان – اشتلتجز لتقسيم $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ الذى نحصل عليه بأخذ $\xi_k = x_k$ و $\xi_k = x_{k-1}$

(ب) أثبت هذا باستخدام نظرية التكامل بالتجزىء ٢٩ – ٧ .

٢٩ – (و) أثبت مباشرة أنه إذا كانت f أكبر دالة أعداد صحيحة $f(x) = [x]$ المعرفة فى مثال ٢٩ – ٩ (ج) ، فإن f ليست قابلة التكامل بالنسبة إلى f فى الفترة $[0, 2]$

٢٩ – (ز) إذا كانت f هى دالة قابلة لتكامل ريمان فى $[0, 1]$ ، فإن

$$\int_0^1 f = \lim\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

٢٩ – (ح) وضح أنه إذا كانت g ليست قابلة للتكامل فى $[0, 1]$ ، فإن المتتابعة للمتوسطات

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

ربما تكون أولا تكون تقاربية .

٢٩ – (ط) وضح أن الدالة h ، المعرفة فى I بأنها $h(x) = x$ عند x قياسية ، $h(x) = 0$ عند x غير قياسية ، ليست قابلة لتكامل ريمان فى I .

٢٩ – (ى) بفرض أن f قابلة لتقابل ريمان فى $[a, b]$. إذا كانت f_1 دالة فى $[a, b]$ إلى $\mathbf{R}$ بحيث أن $f_1(x) = f(x)$ ما عدا عددا محدودا من نقط فى $[a, b]$ ، أثبت أن f_1 قابلة لتكامل ريمان وأن

$$\int_a^b f_1 = \int_a^b f$$

أى أنه يمكننا تغيير القيمة لدالة قابلة لتكامل ريمان – أو نتركها غير معرفة – عند عدد محدود من نقط .

٢٩ – (ك) اعط مثالا لتوضيح أن الاستنتاج للتمرين السابق ربما يفشل إذا كان العدد للنقـط المستثناة لا نهائيا .

٢٩ – (ل) بفرض أن $c \in (a, b)$ وبفرض k معرفة على $[a, b]$ بأنها $k(c) = 1$ و $k(x) = 0$ عند $x \in [a, b], x \neq c$. إذا كانت $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ متصلة عند c أثبت مباشرة أن f تكون قابلة لتكامل بالنسبة إلى k ، وأن k تكون قابلة لتكامل بالنسبة إلى f وأن

$$\int_a^b f\,dk = \int_a^b k\,df = 0$$

٢٩ – (م) نفرض أن f قابلة لتكامل بالنسبة إلى g فى $[a, b]$. إذا كانت $g_1:[a, b] \to \mathbf{R}$ بحيث أن $g_1(x) = g(x)$ باستثناء عدد محدود من نقط فى (a, b) التى عندها f تكون متصلة ، فإذن f تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى g_1 وأن

$$\int_a^b f\,dg_1 = \int_a^b f\,dg$$

٢٩ – (ن) نفرض أن g متصلة فى $[a, b]$ ، وأن $x \to g'(x)$ موجودة ومتصلة فى $[a, b] \setminus \{c\}$ ، وأن النهايات بطرف واحد

$$g'(c-) = \lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} g'(x), \qquad g'(c+) = \lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} g'(x)$$

موجودة . إذا كانت f قابلة للتكامل بالنسبة إلى g فى $[a, b]$ ، فإن fg' يمكن تعريفها عند c بأنها قابلة لتكامل ريمان فى الفترة $[a, b]$ وبحيث أن

$$\int_a^b f\, dg = \int_a^b fg'$$

(ارشاد : اعتبر تمرين ٢٧ – ن) .

٢٩ – (س) إذا كانت f قابلة لتكامل ريمان فى $[-5, 5]$ ، أثبت أن f قابلة للتكامل بالنسبة إلى $g(x) = |x|$ وأن

$$\int_{-5}^{5} f\, dg = \int_0^5 f - \int_{-5}^{0} f$$

٢٩ – (ع) إذا كانت $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ تقسيم للفترة $J = [a, b]$ ، وبفرض أن $\|P\|$ معرفة بالتعريف

$$\|P\| = \sup\{x_j - x_{j-1} : j = 1, 2, \ldots, n\}$$

فإننا نسمى $\|P\|$ العمود للتقسيم P . نعرف f بأنها قابلة لتكامل – (*) بالنسبة إلى g فى J فى حالة وجود عدد A بالخاصية التى تقول أنه إذا كانت $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث أنه إذا كانت $\|P\| < \delta(\varepsilon)$ وإذا كانت $S(P; f, g)$ أى حاصل جمع ريمان – اشتلتجز المناظر ، فإن $|S(P; f, g) - A| < \varepsilon$. إذا كان هذا يتحقق فإن العدد A يسمى تكامل – (*) الدالة f بالنسبة إلى g فى J . وضح أنه إذا كانت f قابلة للتكامل – (*) بالنسبة إلى g فى J ، فإن f تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى g (بمعنى تعريف ٢٩ – ٢) وأن القيم لهذه التكاملات تكون متساوية .

٢٩ – (ف) بفرض أن g معرفة فى I كما فى تمرين ٢٩ – ج وضح أن دالة محدودة f تكون قابلة للتكامل – (*) بالنسبة إلى g بمعنى التمرين السابق إذا وإذا فقط كانت f متصلة عند $\frac{1}{2}$ حيث القيمة لتكامل – (*) هى $f(\frac{1}{2})$. إذا كانت h معرفة بأنها

$$h(x) = 0, \qquad 0 \le x < \tfrac{1}{2},$$
$$= 1, \qquad \tfrac{1}{2} \le x \le 1$$

فإن h تكون قابلة لتكامل – (*) بالنسبة إلى g فى $[0, \frac{1}{2}]$ وفى $[\frac{1}{2}, 1]$ لكن ليست قابلة لتكامل – (*) بالنسبة إلى g فى $[0, 1]$. ومن ثم ربما تفشل نظرية ٢٩ – ٦ (أ) للتكامل – (*) .

٢٠ – (ص) نفرض أن $g(x) = x$ عند $x \in J$. وضح أنه يوجد لهذه المكاملة دالة f تكون قابلة للتكامل بمعنى تعريف ٢٩ – ٢ إذا وإذا فقط كانت قابلة لتكامل – (*) بمعنى مفهوم تمرين ٢٩ – ب .

٢٩ – (ق) بفرض أن f قابلة لتكامل ريمان فى J وبفرض أن $f(x) \geq 0$ عند $x \in J$ إذا كانت f متصلة عند نقطة $c \in J$ وإذا كانت $f(c) > 0$ ، فيكون

$$\int_a^b f > 0$$

٢٩ – (ر) بفرض أن f قابلة لتكامل ريمان فى J وبفرض أن $f(x) > 0$ عند $x \in J$. وضح أن

$$\int_a^b f > 0$$

(ارشاد : لكل $n \in N$ ، نفرض H_n هى الأقفال لفئة النقط $x \in J$ بحيث أن $f(x) > 1/n$ واستخدم تمرين (١١ – ن) .

مشروعات :

٢٠ – α يستخدم التوضيح الآتى أحيانا كتقريب لتكامل ريمان – اشتلتجز . عندما تكون الدالة المكاملة g تزايدية باطراد فى الفترة J . (هذا التطوير له الميزة التى تقول أنه يسمح لتعريف التكاملات العليا والسفلى التى تكون دائما موجودة لدالة محدودة F . لكن ، له عيب وهو أنه يضع قيداً إضافيا على g ويميل لخدش التماثل بدرجة ما لتكامل ريمان – شتلتجز المعطى بالتكامل بالتجزىء نظرية (٢٩ – ٧) . إذا كانت $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ تقسيما للفترة $J = [a, b]$ وأن f دالة محدودة فى J فنفرض أن M_j و m_j معرفتين بأنهما الأدنى والأعلى للدالة $\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$ على الترتيب بالنسبة للتقسيم P ، عرف حاصل الجمع الأصغر وحاصل الجمع الأعلى للدالة f بالنسبة إلى g كما يلى :

$$L(P; f, g) = \sum_{j=1}^{n} m_j\{g(x_j) - g(x_{j-1})\},$$

$$U(P; f, g) = \sum_{j=1}^{n} M_j\{g(x_j) - g(x_{j-1})\}$$

(أ) إذا كانت $S(P; f, g)$ أى حاصل جمع ريمان – اشتلتجز المناظر إلى P ، فإن

$$L(P; f, g) \leq S(P; f, g) \leq U(P; f, g)$$

(ب) إذا كانت $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد حاصل جمع ريمان – اشتلتجز $S_1(P; f, g)$ لناظر إلى P حيث أن

$$S_1(P; f, g) \leq L(P; f, g) + \varepsilon$$

، أنه يوجد حاصل جمع ريمان – اشتلتجز $S_2(P; f, g)$ المناظر إلى P بحيث أن

$$U(P; f, g) - \varepsilon \leq S_2(P; f, g)$$

(ج) إذا كانت Q و P تقسيمين للفترة J وكانت Q تكريرا التقسيم P (أى أن ، $P \subseteq Q$) ، فإن

$$L(P; f, g) \leq L(Q; f, g) \leq U(Q; f, g) \leq U(P; f, g)$$

(د) إذا كانت P_2 و P_1 أى تقسيمين للفترة J ، فإن $L(P_1; f, g) \leq U(P_2; f, g)$
[ارشاد : افرض أن Q هو التقسيم الذى يكون تكريرا لكلتا P_2 و P_1 واستخدام (ج)] .

(هـ) عرف التكامل الأدنى والتكامل الأعلى للدالة f بالنسبة إلى g ليكونا على الترتيب

$$L(f, g) = \sup \{L(P; f, g)\},$$
$$U(f, g) = \inf \{U(P; f, g)\}$$

هنا يؤخذ الأعلى والأدنى على جميع كل تقسيمات P للفترة J . أثبت أن $L(f, g) \leq U(f, g)$

(و) وضح أن f تكون قابلة التكامل بالنسبة إلى الدالة التزايدية g إذا وإذا فقط كان التكامل الأدنى والتكامل الأعلى المذكور فى (هـ) متساويين فى هذه الحالة تكون القيمة المشتركة لهذين التكاملين مساوية إلى

$$\int_a^b f\,dg$$

وضح أن f تكون قابلة التكامل بالنسبة إلى g إذا وإذا فقط تحقق شرط ريمان الآتى وهو : لكل $\varepsilon > 0$ يوجد تقسيم P بحيث أن $U(P; f, g) - L(P; f, g) < \varepsilon$

(ز) إذا كانت f_1 و f_2 محدودتين فى J ، فإن التكامل الأدنى والتكامل الأعلى للدالة $f_1 + f_2$ يحققان

$$L(f_1 + f_2, g) \geq L(f_1, g) + L(f_2, g),$$
$$U(f_1 + f_2, g) \leq U(f_1, g) + U(f_2, g)$$

أثبت أن تلك المتباينة الدقيقة يمكن أن تظل صحيحة فى هذه العلاقات .

٢٩ – β هذا المشروع والمشروعان الآتيان تقدم وتدرس عائلة هامة من الدوال التى لها

« تغير محدود » فى فترة مدمجة . نفرض أن $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ معطاة ، إذا كانت
$P=(a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b)$

تقسيما للفترة $[a,b]$ ، نفرض أن $v_f(P)$ معرفة بأنها

$$v_f(P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

إذا كانت الفئة $\{v_f(P):P$ تقسيما للفترة $[a,b]\}$ محدودة ، فنقول أن f لها تغير محدود فى $[a,b]$. المجموعة لكل الدوال التى لها تغير محدود فى الفترة $[a,b]$ يرمز لها بالرمز $BV([a,b])$ أو بالرمز $BV[a,b]$. إذا كانت $f\in BV[a,b]$. فنجد أن

$$V_f[a,b]=\sup\ v_f(P):P \text{ تقسيم } [a,b]$$

نسمى العدد $V_f[a,b]$ التغير الكلى للدالة f فى $[a,b]$. أثبت أن $V_f[a,b]=0$ إذا وإذا فقط كانت f دالة ثابتة فى $[a,b]$.

(أ) إذا كانت $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ وإذا كانت Q و P تقسيمين للفترة $[a,b]$ ، وإذا كانت $P\supseteq Q$ ، أثبت أن $v_f(P)\geq v_f(Q)$. إذا كانت $f\in BV[a,b]$ ، وضح أنه توجد متتابعة (P_n) لتقسيمات الفترة $[a,b]$ بحيث أن $V_f[a,b]=\lim(v_f(P_n))$

(ب) إذا كانت f دالة تزايدية مطردة فى $[a,b]$ ، أثبت أن $f\in BV[a,b]$ وأن $V_f[a,b]=f(b)-f(a)$. ماذا إذا كانت f دالة تناقصية باطراد فى $[a,b]$ ؟ .

(ج) إذا كانت $g:[a,b]\to \mathbf{R}$ تحقق شرط لبشتز $|g(x)-g(y)|\leq M\,|x-y|$ لكل x,y فى $[a,b]$ ، أثبت أنه $g\in BV[a,b]$ وأن $V_g[a,b]\leq M(b-a)$. إذا كانت $h'(x)\leq M$ لكل $x\in[a,b]$ ، فإن $h\in BV[a,b]$ ،

$$V_h[a,b]\leq M(b-a)$$

لكن ، اعتبر $k(x)=\sqrt{x}$ فى $[0,1]$

(د) إذا كانت $f:[0,1]\to \mathbf{R}$ معرفة على $f(x)=0$ عند $x=0$ ، $f(x)=\sin(1/x)$ عند $0<x\leq 1$. أثبت أن f ليس لها تغير محدود فى $[0,1]$. إذا كانت g معرفة بأنها $g(x)=xf(x)$ عند $x\in[0,1]$ ، أثبت أن g متصلة وليس لها تغير محدود فى $[0,1]$. لكن ، إذا كانت h معرفة بأنها $h(x)=x^2f(x)$ عند $x\in[0,1]$ أثبت أن h ليس لها تغير محدود فى الفترة $[0,1]$.

(هـ) إذا كانت $f\in BV[a,b]$ وضح أن $|f(x)|\leq|f(a)|+V_f[a,b]$ لكل $x\in[a,b]$ ، بحيث أن f ليست محدودة فى $\|f\|_I\leq|f(a)|+V_f[a,b]$ ، $I=[a,b]$

(و) إذا كانت $\alpha\in R$ و $f,g\in BV[a,b]$ وضح أن $f+g$ و αf تنتميان إلى $BV[a,b]$ وأن

$$V_{\alpha f}[a, b] = |\alpha|\, V_f[a, b],$$
$$V_{f+g}[a, b) \leq V_f[a, b] + V_g[a, b]$$

وإذن يكون $BV[a, b]$ قيمة فراغ اللوال .

(ز) إذا كانت $f, g \in BV[a, b]$ أثبت أن حاصل ضرب $f\,g$ ينتمى إلى $BV[a, b]$ وأن

$$V_{fg}[a, b] \leq \|f\|_1 V_g[a, b] + \|g\|_1 V_f[a, b]$$

وضح أن خارج قسمة دالتين فى $BV[a, b]$ ربما لا ينتمى إلى $BV[a, b]$.

(ح) أثبت أن الراسم $f \mapsto V_f[a, b]$ ليس عوديا على متجه الفراغ $BV[a, b]$ ، لكن الراسم

$$f \mapsto \|f\|_{BV} = |f(a)| + V_f[a, b]$$

عودى على هذا الفراغ .

٢٩ – ٧ نستمر فى دراستنا لدوال لها تغير محدود فى فترة $[a, b] \subseteq R$.

(أ) إذا كانت $f \in BV[a, b]$ وإذا كانت $c \in (a, b)$ ، أثبت أن القيود على f إلى $[a, c]$ ، $[c, b]$ لها تغير محدود فى هذه الفترات وأن

$$V_f[a, b] = V_f[a, c] + V_f[c, b]$$

وبالعكس ، إذا كانت $g : [a, b] \to R$ بحيث أنه لبعض $c \in (a, b)$ نجد أن $g \in BV[a, c]$ ، $g \in BV[c, b]$ ، فإن $g \in BV[a, b]$.

(ب) إذا كانت $f \in BV[a, b]$ ، فنعرف $p_f(x) = V_f[a, x]$ عند $x \in (a, b]$ ، $p_f(a) = 0$ أثبت أن p_f دالة تزايدية فى $[a, b]$.

(ج) لاحظ أنه إذا كانت $a \leq x \leq y \leq b$ ، فإن

$$f(y) - f(x) \leq V_f[x, y]$$

أثبت أنه إذا عرفنا $n_f(x) = p_f(x) - f(x)$ عند $x \in [a, b]$ ، فإن n_f تكون دالة تزايدية .

(د) أثبت أن دالة $f : [a, b] \to R$ تنتمى إلى $BV[a, b]$ إذا وإذا فقط كانت عبارة عن الفرق بين دالتين متزايدتين .

(هـ) إذا كانت $f \in BV[a, b]$ متصلة من اليمين عند النقطة $c \in [a, b)$ ، وإذا كانت $\varepsilon > 0$ ، أثبت أنه يوجد $\delta > 0$ وتقسيم بحيث أنه إذا كانت

$$Q = (c < x_1 < \cdots < x_n = b)$$

تقسيما دقيقا كافيا فى الفترة $[c, b]$ حيث $x_1 - c < \delta$ ، فإن

$$V_f[a, b]-\tfrac{1}{2}\varepsilon \le \tfrac{1}{2}\varepsilon+\sum_{k=2}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| \le \tfrac{1}{2}\varepsilon + V_f[x_1, b]$$

ومن ثم ينتج أن

$$V_f[c, x_1] = V_f[c, b] - V_f[x_1, b] < \varepsilon$$

وضح أن f متصلة عند $c \in [a, b]$ ، إذا وإذا فقط كانت p_f متصلة عند c .

(و) استنتج أن دالة متصلة $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ تنتمى إلى $BV[a, b]$ إذا وإذا فقط كانت الفرق بين متزايدتين متصلتين .

٢٩ – δ برهن ليبيج على أن دالة لها تغير محدود يكون لها مشتقة عند كل نقطة ربما ماعدا نقط الفئة « مقياس صفر » البرهان لهذه النتيجة صعب نوعا ما وسوف لا يلخص هنا ، لكن سوف نحصل على بعض خواص أكثر لمثل هذه الدوال .

(أ) إذا كانت $f \in BV[a, b]$ وإذا كانت $c \in (a, b)$ ، فإن نهاية الطرف الأيمن ونهاية الطرف الأيسر للدالة f عند c موجودتان . هاتان النهايتان متساويتان ربما ما عدا النقط لمجموعة عددية من نقط فى الفترة $[a, b]$.

(ب) إذا كانت (f_n) متتابعة لدوال متصلة فى $BV[a, b]$ وكانت تتقارب فى $[a, b]$ إلى دالة f ، وضح أنه لا ينتج أن f تنتمى إلى $BV[a, b]$.

(ج) نفرض أن (f_n) متتابعة فى $BV[a, b]$ ومتقاربة عند كل نقطة للفترة $[a, b]$ إلى الدالة f ، ونفرض أنه عند بعض $M > 0$ يكون $V_{f_n}[a, b] \le M$ لكل $n \in \mathbf{N}$ أثبت أن f تنتمى إلى $BV[a, b]$ وأن $V_f[a, b] \le M$.

(د) نفرض أن (f_n) متتابعة فى $BV[a, b]$ بحيث أن

$$\|f_n - f_m\|_{BV} \to 0 \quad \text{عند} \quad m, n \to \infty$$

أثبت أنه توجد دالة $f \in BV[a, b]$ بحيث أن

$$\|f_n - f\|_{BV} \to 0 \quad \text{عند} \quad n \to \infty$$

(ه) نفرض أن (f_n) متتابعة لدوال متزايدة باطراد ، معرفة فى $I = [a, b]$ بحيث أن $\|f_n\|_I \le M$ لكل $n \in \mathbf{N}$. استخدم العملية القطرية للحصول على متتابعة جزئية (g_k) للدالة (f_n) بحيث تتقارب لكل عدد قياسى r فى $[a, b]$. عرف

$$g(r) = \lim (g_k(r)) \quad \text{عند} \quad r \in \mathbf{Q} \cap [a, b]$$

أثبت أن g متزايدة فى $\mathbf{Q} \cap [a, b]$. نعرف g عند $x \in [a, b)$ كنهاية الطرف الأيمن $g(x) = \lim_{r \to x+} g(r)$ أثبت أنه إذا كانت $c \in [a, b)$ هى نقطة اتصال الدالة g فإن $g(c) = \lim_k g_k(c)$ وبما أن g لها على الأكثر مجموعة معدودة من نقط عدم الاتصال فإنه

يمكن استخدام تطبيق للعملية القطرية أيضاً لحصول على متتابعة جزئية (h_m) للمتتابعة (g_k) التي تتقارب في كل مكان من $[a, b]$.

(و) باستخدام جزء (هـ) ، أثبت النتيجة الآتية ، المسماة بنظرية اختيار هيللي . نفرض أن (f_n) متتابعة لدوال في $BV[a, b]$ بحيث أن $\|f\|_{BV} \leq M$ لكل $n \in N$ فإذن توجد متتابعة جزئية للمتتابعة (f_n) وتتقارب عند كل نقطة في الفترة $[a, b]$ لدالة $f \in BV[a, b]$ حيث عندها يكون $\|f_n\|_{BV} \leq M$

الباب الثلاثون — وجود التكامل :

كونا في الباب السابق بعض خواص مفيدة لتكامل ريمان — اشتلتجز . لكن ، لم نوضح للآن إثبات وجود التكامل لدوال كثيرة جداً .

سنركز في هذا الباب اهتمامنا على دوال متكاملة متزايدة باطراد ، مع أن معظم ما نعمله يمكن امتداده إلى دوال g التي لها تغير محدود في فترة $J = [a, b]$ بمعنى أنه يوجد ثابت $M > 0$ بحيث أنه إذا كانت

$$P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

أي تقسيم للفترة J ، فإن

$$\sum_{j=1}^{n} |g(x_j) - g(x_{j-1})| \leq M \tag{30.1}$$

من الواضح أنه ، إذا كانت g متزايدة باطراد ، فإن حاصل الجمع في (٣٠ — ١) يعتبر تلسكوبيا ويمكن أخذ $M = g(b) - g(a)$. ومن ثم دالة متزايدة باطراد يكون لها تغير محدود وبالعكس ، يمكن توضيح أن كل دالة لها تغير محدود هي عبارة عن الفرق بين دالتين متزايدتين . (أنظر مشروع ٢٩ — ٢) .

سنثبت أولا نتيجة قوية جدا .

٣٠ — ١ معيار ريمان لقابلية التكامل . نفرض أن $J = [a, b]$ وأن g متزايدة باطراد في J . دالة $f : J \to R$ تكون قابلة التكامل بالنسبة إلى g في الفترة J إذا وإذا فقط فإن كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ تقسيم P_ε للفترة J بحيث أنه إذا كانت $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ تكريرا للتقسيم P_ε ، فإن

$$\sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\{g(x_j) - g(x_{j-1})\} < \varepsilon \tag{30.2}$$

حيث $M_j = \sup\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$ and $m_j = \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$ عند $j = 1, \ldots, n$.

البرهـــان . إذا كانت f قابلة التكامل بالنسبة إلى g وأن $\varepsilon > 0$ معطاة ، فنفرض أن P_ε تقسيم للفترة J بحيث أنه إذا كانت $P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ تكريرا للتقسيم P_ε ، فإن

$$\left| S(P; f, g) - \int_a^b f\,dg \right| < \varepsilon$$

لأى حاصل جمع ريمان – اشتلتجز المناظر إلى P . نختار الآن z_j و y_j فى $[x_{j-1}, x_j]$ بحيث أن

$$M_j - \varepsilon < f(y_j), \qquad f(z_j) < m_j + \varepsilon$$

هذا يدل على أن $M_j - m_j < f(y_j) - f(z_j) + 2\varepsilon$ ومن ثم

$$\sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\{g(x_j) - g(x_{j-1})\} \le \sum_{j=1}^{n} f(y_j)\{g(x_j) - g(x_{j-1})\}$$
$$- \sum_{j=1}^{n} f(z_j)\{g(x_j) - g(x_{j-1})\} + 2\varepsilon\{g(b) - g(a)\}$$

الآن يحتوى الطرف الأيمن لهذه المتباينة على إثنين من حواصل جمع ريمان – اشتلتجز المناظرة إلى P ، واللذين لا يمكن أن يكون الفرق بينهما أكثر من 2ε . ومن ثم يتحقق الشرط (٣٠ – ٢) عندما ε تستبدل بالمقدار $2\varepsilon\{1 + g(b) - g(a)\}$

وبالعكس نفرض أن $\varepsilon > 0$ معطاة وأن P_ε تقسيم بحيث أن (٣٠ – ٢) تظل قائمة لأى تقسيم $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ ينقى التقسيم P_ε . نفرض أن $Q = (y_0, y_1, \ldots, y_m)$ تنقية أو تكرير التقسيم P ، سوف نحسب الفرق $S(P; f, g) - S(Q; f, g)$ لحاصل الجمع المناظرين . بما أن كل نقطة فى P تنتمى إلى Q يمكننا كتابة كلا من حاصلى الجمع فى الصورة

$$S(P; f, g) = \sum_{k=1}^{m} f(u_k)\{g(y_k) - g(y_{k-1})\},$$

$$S(Q; f, g) = \sum_{k=1}^{m} f(v_k)\{g(y_k) - g(y_{k-1})\}$$

لكن ، لكى نكتب $S(P; f, g)$ بدلالة النقط فى Q ، يجب السماح بتكرار النقط u_k ولانحتاج إلى إنتماء u_k إلى $[y_{k-1}, y_k]$. لكن ، كلا من u_k ، v_k تنتمى تأكيدا إلى فترة ما $[x_{j-1}, x_j]$ وفى هذه الحالة $|f(u_k) - f(v_k)| \le M_j - m_j$. بالضرب فى $g(y_k) - g(y_{k-1}) \ge 0$ ثم الجمع ، نحصل على

$$|S(P; f, g) - S(Q; f, g)| \le \sum (M_j - m_j)\{g(x_j) - g(x_{j-1})\} < \varepsilon$$

أخيراً ، نفرض أن P' و P تكريران اختياريان التقسيم P_ε ونفرض أن Q تكرير مشترك لكل من P' و P . بما أن النقاش السابق يطبق على كل من P' و P ، فنستنتج أن

الفرق بين حاصلى الجمع $S(P;f,g)$ ، $S(P';f,g)$ يكون مساويا على الأكثر 2ε . ومن ثم يستخدم معيار كوشى ٢٩ – ٤ لإثبات قابلية التكامل للدالة f . وهو المطلوب إثباته

٣٠ – ٢ نظرية القابلية للتكامل . إذا كانت f متصلة، g متزايدة باطراد فى J ، فإن f تكون قابلة التكامل بالنسبة إلى g فى J .

البرهان . حيث أن f متصلة بانتظام فى J ، فبأخذ $\varepsilon > 0$ نجد أنه يوجد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث أنه إذا كانت $x, y \in J$ ، $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ فإن $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. نفرض أن $P_\varepsilon = (z_0, z_1, \ldots, z_r)$ تقسيم بحيث أن $\sup\{z_k - z_{k-1}\} < \delta(\varepsilon)$ إذا كانت $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ تكريرا للتقسيم P_ε ، فيكون أيضاً $\sup\{x_j - x_{j-1}\} < \delta(\varepsilon)$ وكذلك $M_j - m_j < \varepsilon$ ، ومنها ينتج أن

$$\sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\{g(x_j) - g(x_{j-1})\} \leq \varepsilon(g(b) - g(a))$$

بما أن $\varepsilon > 0$ اختيارية ، فإن معيار ريمان يستخدم وهو المطلوب إثباته

٣٠ – ٣ نتيجة . إذا كانت f مطردة وكانت g متصلة فى J ، فإن f تكون قابلة التكامل بالنسبة إلى g فى J .

البرهـان . استخدم النظرية السابقة ونظرية ٢٩ – ٧ للدالة $\pm f$.

وهو المطلوب إثباته

يمكننا معيار ريمان من توضيح أن القيمة المطلقة وحاصل ضرب دوال قابلة للتكامل تكون قابلة للتكامل .

٣٠ – ٤ نظرية . نفرض أن g متزايدة باطراد فى الفترة $J = [a, b]$.

(أ) إذا كانت $f : J \to R$ قابلة للتكامل ، حينئذ $|f|$ تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى g فى J .

(ب) إذا كانت f_2 و f_1 قابلتين للتكامل ، فإن حاصل الضرب $f_1 f_2$ يكون قابلا للتكامل بالنسبة إلى g فى J .

البرهان . نفرض أن M_j و m_j لهما نفس المعنى المذكور فى معيار ريمان ولاحظ أن

$$M_j - m_j = \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in [x_{j-1}, x_j]\}$$

لبرهنة (أ) ، لاحظ أن $\big|\,|f(x)| - |f(y)|\,\big| \leq |f(x) - f(y)|$ لذلك يدل معيار ريمان على أن $|f|$ قابلة للتكامل إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل .

تلاحظ أيضاً أنه إذا كانت $|f(x)| \le K$ عند $x \in J$ ، فإن :

$$|(f(x))^2 - (f(y))^2| \le 2K\,|f(x) - f(y)|$$

أى أن معيار ريمان يدل على أن f^2 قابلة للتكامل إذا كانت f قابلة للتكامل .

للبرهنة أن $f_1 f_2$ قابلة للتكامل إذا كانت كل من f_2 و f_1 قابلة للتكامل ، لاحظ أن

$$2f_1f_2 = (f_1+f_2)^2 - f_1^2 - f_2^2$$

وهو المطلوب إثباته

٣٠ – ٥ مفترض . نفرض أن g متزايدة باطراد فى الفترة $J = [a, b]$ ونفرض أن f قابلة للتكامل بالنسبة إلى g فى J . حينئذ .

$$\left|\int_a^b f\,dg\right| \le \int_a^b |f|\,dg \le \|f\|_J\,(g(b) - g(a)) \tag{30.3}$$

إذا كانت $m \le f(x) \le M$ لجميع $x \in J$ ، حينئذ

$$m(g(b) - g(a)) \le \int_a^b f\,dg \le M(g(b) - g(a)) \tag{30.4}$$

البرهان . ينتج من نظرية ٣٠ – ٤ أن $|f|$ قابلة للتكامل بالنسبة إلى g . إذا كانت $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ تقسيما للفترة J وأن (z_j) هى فئة نقط وسطى ، فنجد عند $j = 1, 2, \ldots, n$ أن

$$-\|f\|_J \le -|f(z_j)| \le f(z_j) \le |f(z_j)| \le \|f\|_J$$

بالضرب فى $g(x_j) - g(x_{j-1}) \ge 0$ ثم الجمع لنحصل على التقدير

$$-\|f\|_J\,(g(b) - g(a)) \le -S(P; |f|, g) \le S(P; f, g) \le S(P; |f|, g)$$
$$\le \|f\|_J\,(g(b) - g(a))$$

وإذن ينتج أن $|S(P; f, g)| \le S(P; |f|, g) \le \|f\|_J\,(g(b) - g(a))$ مما يثبت صحة (٣٠ – ٣) . البرهان المتباينة (٣٠ – ٤) مماثل وسيحذف

وهو المطلوب إثباته

حساب التكامل :

النتيجتان الآتيتان مقيدتان بطبيعتهما ، لكن تقودنا أيضاً إلى النظرية الأساسية التى هى الوسيلة الأولية لحساب تكاملات ريمان .

٣٠ – ٦ النظرية الأولى للقيمة المتوسطة . إذا كانت g تزايدية فى الفترة $J = [a, b]$ وكانت f متصلة فى J إلى R ، حينئذ يوجد عدد c فى الفترة J بحيث أن

$$\int_a^b f\,dg = f(c)\int_a^b dg = f(c)\{g(b)-g(a)\} \tag{30.5}$$

البرهان . إذا كانت $m = \inf\{f(x) : x \in J\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in J\}$ فقد كان واضحاً فى المفترض السابق أن

$$m\{g(b)-g(a)\} \le \int_a^b f\,dg \le M\{g(b)-g(a)\}$$

إذا كانت $g(b) = g(a)$ ، فإن العلاقة (٣٠ - ٥) تافهة ، إذا كانت $g(b) > g(a)$ ، فإنه ينتج من نظرية القيمة المتوسطة لبولتزانو ٢٢ - ٤ أنه يوجد عدد c فى الفترة J بحيث أن

$$f(c) = \left\{\int_a^b f\,dg\right\} \Big/ \{g(b)-g(a)\}$$

وهو المطلوب إثباته

٣٠ - ٧ نظرية تفاضل . نفرض أن f متصلة J وإن g متزايدة فى J ولها مشتقة عند نقطة c فى J . حينئذ الدالة F ، المعرفة للعنصر x فى الفترة J بأنها

$$F(x) = \int_a^x f\,dg$$

لها مشتقة عند c وأن $F'(c) = f(c)\,g'(c)$.

البرهان . إذا كانت $h > 0$ بحيث أن $c + h$ تنتمى إلى الفترة J ، فينتج من نظرية ٢٩-٦ ومن النتيجة السابقة أن

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f\,dg - \int_a^c f\,dg = \int_c^{c+h} f\,dg$$
$$= f(c_1)\{g(c+h) - g(c)\}$$

عند c_1 ماحيث $c \le c_1 \le c+h$. تظل علاقة مشابهة صحيحة إذا كان $h < 0$. بما أن f متصلة والدالة g لها مشتقة عند c ، إذن $F'(c)$ تكون موجودة ومساوية إلى $f(c)\,g'(c)$.

وهو المطلوب إثباته

بتخصيص هذه النظرية لحالة ريمان ، نحصل على النتيجة التى تمدنا بالأساسيات للطريقة المألوفة لحساب التكاملات فى حساب التفاضل والتكامل .

٣٠ - ٨ نظرية أساسية لحساب التفاضل والتكامل . نفرض أن f متصلة فى الفترة $J = [a, b]$. دالة F فى الفترة J تحقق

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f \qquad \text{for } x\in J \tag{30.6}$$

إذا وإذاً فقط كانت $F'=f$ فى J .

البرهان . إذا ظلت العلاقة (٣٠ – ٦) صحيحة وكانت $c\in J$ ، فإنه يتضح من النظرية السابقة أن $F'(c)=f(c)$.

وبالعكس ، نفرض أن F_a معرفة عند x فى الفترة J بأنها

$$F_a(x)=\int_a^x f$$

النظرية السابقة تؤكد أن $F_a'=f$ فى J . إذا كانت F بحيث أن $F'=f$ ، حينئذ ينتج من نظرية ٢٧ – ٩ (ii) أنه يوجد مقدار ثابت C بحيث أن $F(x)=F_a(x)+C$ عند $x\in J$ بما أن $F_a(a)=0$ ، فإن $C=F(a)$ ومنها ينتج أنه إذا كانت $F'=f$ فى J ، فإن

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f$$

وهو المطلوب إثباته

ملاحظة . إذا كانت F دالة معرفة فى J بحيث أن $F'=f$ فى الفترة J ، فنقول أحياناً أن F تكامل غير محدود ، مشتقة عكسية ، أو أولية الدالة f . فى هذا الاصطلاح اللغوى ، تؤكد نظرية التفاضل ٣٠ – ٧ أن كل دالة متصلة لها أولية . أحياناً تصاغ النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل فى طرق تختلف عن تلك المعطاة فى ٣٠ – ٨ ولكن تضمن دائماً التأكيد على أنه تحت فروض مناسبة فإن تكامل ريمان للدالة f يمكن حسابه بإيجاد قيمة أى أولية للدالة f عند النقطتين الطرفيتين لفترة التكامل . قد أعطينا الصيغة السابقة ، التى تنتج الشرط اللازم والكافى لدالة لتصبح أولية لدالة متصلة . نتيجة أكثر عموماً بعض الشىء لاتتطلب اتصال الدالة المراد تكاملها ، ستعطى فى تمرين ٣٠ – ى .

لايجب أن يفترض أن النظرية الأساسية تؤكد أنه إذا كانت المشتقة f لدالة F موجودة عند كل نقطة من الفترة J ، فإن f تكون قابلة للتكامل وأن (٣٠ – ٦) تظل صحيحة . فى الحقيقة ، يمكن أن يحدث أن f ليست قابلة لتكامل ريمان (أنظر تمرين ٣٠ – ك) . بالمثل ربما تكون دالة f قابلة لتكامل ريمان لكن ليس لها أولية (أنظر تمرين ٣٠ – ل) .

٣٠ – ٩ النظرية الأولى للقيمة المتوسطة . إذا كانت p و f متصلتين فى الفترة $J=[a,b]$، $p(x)\geq 0$ لكل $x\in J$ ، فتوجد $c\in J$ بحيث أن

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(c)\int_a^b p(x)\,dx \tag{30.7}$$

البرهان . نفرض أن $g : J \to R$ معرفة عند $x \in J$ بأنها

$$g(x) = \int_a^x p(t)\,dt$$

بما أن $p(x) \geq 0$ ، فن الواضح أن g متزايدة وينتج من نظرية التفاضل ٣٠ – ٧ أن $g' = p$. حسب نظرية ٢٩ – ٨ نستنتج أن

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b fp$$

ومن النظرية الأولى للقيمة المتوسطة ٣٠ – ٦ ، نستنتج أنه لبعض c فى الفترة J ، يكون

$$\int_a^b f\,dg = f(c)\int_a^b p$$

وهو المطلوب إثباته

كتطبيق ثان لنظرية ٢٩ – ٨ سوف تفيد صياغة نظرية ٢٩ – ٧ ، التى تختص بالتكامل بالتجزىء ، فى صورة أكثر تقليدياً . سيترك البرهان للقارىء .

٣٠ – ١٠ تكامل بالتجزىء . إذا كانت g و f لها مشتقات متصلة فى $[a, b]$ ، فإن

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g$$

النتيجة الآتية مفيدة غالباً

٣٠ – ١١ النظرية الثانية للقيمة المتوسطة . (أ) إذا كانت f متزايدة و كانت g متصلة فى $J = [a, b]$ ، فتوجد نقطة c فى J بحيث أن

$$\int_a^b f\,dg = f(a)\int_a^c dg + f(b)\int_c^b dg \tag{30.8}$$

(ب) إذا كانت f متزايدة وكانت h متصلة فى J ، حينئذ توجد نقطة c فى الفترة J بحيث أن

$$\int_a^b fh = f(a)\int_a^c h + f(b)\int_c^b h \tag{30.9}$$

(ج) إذا كانت φ ليست سالبة ومتزايدة وكانت h متصلة فى J ، حينئذ توجد نقطة c فى J بحيث أن

$$\int_a^b \varphi h = \varphi(b)\int_c^b h$$

البرهان . يدل الفرض ، ونظرية القابلية التكامل ٣٠ – ٢ معاً على أن g قابلة للتكامل بالنسبة إلى f فى J . فضلا عن ذلك حسب النظرية الأولى للقيمة المتوسطة ٣٠ – ٦ نجد أن

$$\int_a^b g\,df = g(c)\{f(b)-f(a)\}$$

بعد استخدام نظرية ٢٩ – ٧ المختصة بتكامل بالتجزىء ، نستنتج أن f قابلة للتكامل بالنسبة إلى g وأن

$$\begin{aligned}\int_a^b f\,dg &= \{f(b)g(b)-f(a)g(a)\}-g(c)\{f(b)-f(a)\}\\ &= f(a)\{g(c)-g(a)\}+f(b)\{g(b)-g(c)\}\\ &= f(a)\int_a^c dg+f(b)\int_c^b dg\end{aligned}$$

مما يثبت جزء (أ) . لبرهنة (ب) نفرض أن g معرفة فى J بأنها

$$g(x)=\int_a^x h$$

أى أن $g' = h$. تنتج النتيجة إذن من جزء (أ) باستخدام نظرية ٢٩–٨ لبرهنة (ج) نعرف F بأن تكون مساوية φ عند x فى $[a, b]$ ونعرف $F(a)=0$. ونطبق الآن جزء (ب) على F.

وهو المطلوب إثباته

يسمى جزء (ج) للنظرية السابقة غالباً بصورة بونيت(*) للنظرية الثانية للقيمة المتوسطة من الواضح أنه توجد نتيجة مناظرة لدالة متناقصة (تمرين ٣٠ – ن) .

تغيير متغير :

سنثبت الآن نظرية تبرر القاعدة المألوفة المرتبطة بالتغيير « تغيير متغير » فى تكامل ريمان .

٣٠ – ١٢ نظرية تغيير متغير . نفرض أن φ معرفة فى فترة $[\alpha, \beta]$ إلى R بمشتقة متصلة ونفرض أن $a=\varphi(\alpha)$ وأن $b=\varphi(\beta)$. إذا كانت f متصلة فى مدى φ ، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \qquad (30.10)$$

(*) أسيان بونيت (١٨١٩ – ١٨٩٢) يعرف أولا وقبل كل شىء بعمله فى الهندسة التفاضلية .

البرهان . نفرض أن $I = \varphi([\alpha, \beta])$ ونفرض أن F معرفة بأنها

$$F(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)\, dx \quad \text{حيث} \quad \xi \in I$$

ونعتبر الدالة H المعرفة بأنها $H(t)=F(\varphi(t))$ عند $\alpha \le t \le \beta$. لاحظ أن $H(\alpha)=F(a)=0$
إذا فاضلنا بالنسبة إلى t واستخدمنا الحقيقة أن $F'=f$ (لماذا ؟) ، نحصل على

$$H'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

الآن نستخدم النظرية الأساسية لنستنتج أن

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) = H(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt$$

وهو المطلوب إثباته

تعديل التكامل :

النتيجة الآتية غالباً مفيدة لاختزال تكامل ريمان – اشتلتجز إلى تكامل ريمان .

٣٠ – ١٣ نظرية . إذا كانت g' موجودة وكانت g' و f قابلتين لتكامل ريمان في $[a, b]$ فإن f هي ريمان – اشتلتجز القابلة للتكامل بالنسبة إلى g وأن

$$\int_a^b f\, dg = \int_a^b fg' \qquad (30.11)$$

البرهان . نفرض أن $M > 0$ بحيث أن $|f(x)| \le M$ عند $x \in [a, b]$ ونفرض أن $\varepsilon > 0$. ينتج من نظرية ٣٠–٤ أن fg' قابلة لتكامل ريمان . لذلك يوجد تقسيم P_ε للفترة $[a, b]$ بحيث أنه إذا كانت $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ أي تكرير التقسيم P_ε وإذا كانت $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ عند $j = 1, \ldots, n$ ، فإن

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)g'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b fg' \right| < \varepsilon \qquad (30.12)$$

بما أن g' قابلة لتكامل ريمان فيمكننا أيضاً فرض (حسب معيار ريمان ٣٠ – ١) أن P_ε قد اختيرت بحيث أن

$$\sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) < \varepsilon \qquad (30.13)$$

حيث $M_j = \sup\{g'(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$ و $m_j = \inf\{g'(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$ إذا استخدمنا نظرية القيمة المتوسطة ٢٧ – ٦ ، نحصل على نقط $\zeta_j \in (x_{j-1}, x_j)$ بحيث أن

محمد يوسف الموسى

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\{g(x_j)-g(x_{j-1})\} - \int_a^b fg' \right|$$
$$= \left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)g'(\zeta_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b fg' \right|$$
$$\leq \left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\{g'(\zeta_j) - g'(\xi_j)\}(x_j - x_{j-1}) \right|$$
$$+ \left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)g'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b fg' \right|$$

الآن بما أن $|g'(\zeta_j) - g'(\xi_j)| \leq M_j - m_j$ ، فينتج أنه من (٣٠ – ١٢) و(٣٠ – ١٣) أن التعبير السابق يكون مسيطراً بالمقدار

$$M \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) + \varepsilon \leq (M+1)\varepsilon$$

بما أن $\varepsilon > 0$ واختيار $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ اختيارى ، فينتج أن f قابلة للتكامل بالنسبة إلى g وأن (٣٠ – ١١) تظل صحيحة وهو المطلوب إثباته

ملاحظة . يمكن تعديل البرهان لاستخدامه للحالة التى فيها f محدودة وأن g متصلة فى $[a, b]$ وحيث g لها مشتقة ماعداً عند عدد محدود من نقط الى عندها g' يمكن تعريفها بحيث أن g' و fg' قابلان لتكامل ريمان فى $[a, b]$.

تمرينــات :

٣٠ – (أ) أثبت أن دالة محدودة ولها على الأكثر عدد محدود من نقط عدم الاتصال تكون قابلة لتكامل ريمان .

٣٠ – (ب) إذا كانت $f:[a, b] \to \boldsymbol{R}$ غير متصلة عند نقطة ما للفترة ، فإنه توجد دالة متزايدة بإطراد مثل g بحيث أن f ليست قابلة للتكامل بالنسبة إلى g .

٣٠ – (ج) وضح أن القابلية للتكامل ٣٠–٢ تظل صحيحة عندما g تكون دالة تغير محدود فى J.

٣٠ – (د) اعط مثالا لدالة f ليست قابلة لتكامل ريمان فى J لكن بحيث أن f^2 و $|f|$ قابلان لتكامل ريمان فى J .

٣٠ – (هـ) نفرض أن f موجبة ومتصلة فى $J = [a, b]$ ونفرض أن $M = \sup\{f(x) : x \in J\}$ أثبت أن

$$M = \lim_n \left(\int_a^b (f(x))^n \, dx \right)^{1/n}$$

٣٠ – (و) وضح أن النظرية الأولى للقيمة المتوسطة ٣٠ – ٦ ربما تفشل إذا كانت f ليست متصلة .

٣٠ – (ز) أثبت أن نظرية التفاضل ٣٠ – ٧ تظل قائمة إذا افترض أن f قابلة للتكامل فى J بالنسبة إلى دالة متزايدة g ، وأن f متصلة عند c ، وأن g قابلة للتفاضل عند c .

٣٠ – (ح) نفرض أن f قابلة التكامل بالنسبة لدالة متزايدة g فى $J = [a, b]$ ونفرض أن F معرفة عند $x \in J$ بأنها

$$F(x) = \int_a^x f\,dg$$

أثبت أن (أ) إذا كانت g متصلة عند c ، فإن F تكون متصلة عند c ، (ب) إذا كانت f موجبة ، فإن E تكون متزايدة .

٣٠ – (ط) أعط مثالا لدالة ريمان f القابلة التكامل فى J بحيث أن الدالة F ، المعرفة عند $x \in J$ بأنها

$$F(x) = \int_a^x f$$

ليس لها مشتقة عند بعض نقط الفترة J . هل يمكنك إيجاد دالة f قابلة التكامل بحيث أن F تكون غير متصلة فى J ؟

٣٠ – (ى) إذا كانت f قابلة لتكامل ريمان فى $J = [a, b]$ وإذا كانت $F' = f$ فى J ، فيكون

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f$$

إرشاد : إذا كانت $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ تقسيما للفترة J ، فنكتب

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{n} \{F(x_j) - F(x_{j-1})\}$$

٣٠ – (ك) بفرض F معرفة بأنها

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2 \sin(1/x^2), \qquad 0 < x \leq 1 \\ &= 0, \qquad\qquad\qquad\quad x = 0 \end{aligned}$$

فإن F لها مشتقة عند كل نقطة من $\mathbf{I}$. لكن F' ليست قابلة للتكامل فى $\mathbf{I}$ وأيضاً F ليست التكامل لمشتقتها .

٣٠ – (ل) نفرض أن f معرفة بأنها $f(x) = [x]$ عند $x \in [0, 2]$. إذن f قابلة لتكامل ريمان فى $[0, 2]$ لكن هى ليست المشتقة لأى دالة .

٣٠ – (م) فى النظرية الأولى للقيمة المتوسطة ٣٠ – ٩ نفرض أن p قابلة لتكامل ريمان (بدلا من كونها متصلة) . أثبت أن الاستنتاج لايزال صحيحاً .

٣٠ – (ن) إذا كانت φ ليست سابقة ومتناقصة و كانت h متصلة فى $[a, b]$ ، حينئذ توجد نقطة $\xi \in [a, b]$ بحيث أن

$$\int_a^b \varphi h = \varphi(a) \int_a^\xi h$$

٣٠ – (س) تفرض أن f متصلة فى $I = [0, 1]$ ، ونفرض أن $f_0 = f$ ، وأن معرفة بأنها

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt \quad \text{عند} \quad n \in \mathbf{N}, x \in I$$

بالاستنتاج . وضح أن $|f_n(x)| \leq (M/n!)x^n \leq M/n!$ حيث $M = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$ ، ينتج أن المتتابعة (f_n) تتقارب بانتظام فى I إلى دالة الصفر .

٣٠ – (ع) إذا كانت f قابلة للتكامل بالنسبة إلى g فى $J = [a, b]$ ، و كانت φ متصلة ومتزايدة مضبوطة فى الفترة $[c, d]$ ، وإذا كانت $\varphi(c) = a, \varphi(d) = b$ ، حينئذ $f \circ \varphi$ تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى $g \circ \varphi$. وأن

$$\int_a^b f\, dg = \int_c^d (f \circ \varphi)\, d(g \circ \varphi)$$

٣٠ – (ف) إذا كانت f متصلة فى $[a, b]$ وإذا كانت

$$\int_a^b fh = 0$$

لجميع الدوال المتصلة h ، فإن $f(x) = 0$ لجميع x .

٣٠ – (ص) إذا كانت f قابلة للتكامل فى $[a, b]$ وإذا كانت

$$\int_a^b fh = 0$$

لجميع الدوال المتصلة h ، حينئذ $f(x) = 0$ لجميع نقط اتصال الدالة f .

٣٠ – (ق) نفرض أن p متصلة وموجبة فى $[a, b]$ ونفرض أن $c > 0$. إذا كانت

$$p(x) \leq c \int_a^x p(t)\, dt$$

لكل $x \in [a, b]$ ، أثبت أن $p(x) = 0$ لجميع x .

٣٠ – (ر) بفرض f متصلة وبحيث أن $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a, b]$. إذا كانت g متزايدة مضبوطة فى $[a, b]$ وضح أن

$$\int_a^b f\, dg = 0$$

إذا وإذا فقط كانت $f(x) = 0$ لكل $x \in [a, b]$.

٣٠ – (ش) أثبت أنه إذا كانت g متزايدة مضبوطة فى $[a, b]$ ، فإنه فى النظرية الأولى للقيمة المتوسطة ٣٠ – ٦ يمكن أخذ $c \in (a, b)$. أجر تعديلا مشابهاً للجزءين (أ) ، (ب) للنظرية الثانية للقيمة المتوسطة ٣٠ – ١١ .

٣٠ – (ت) أحسب تكاملات ريمان – اشتلتجز الآتية (تشير $x \to [x]$ هنا إلى أكبر دالة صحيحة)

(أ) $\int_0^1 x\, d(x^3)$ ، (ب) $\int_{-2}^{2} x\, d(|x|)$

(ج) $\int_0^2 x^3\, d([x])$ ، (د) $\int_0^4 x^2\, d([x^2])$

(ه) $\int_0^{\pi} \cos x\, d(\sin x)$ ، (ف) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, d(|\sin x|)$

مشروعات :

٣٠ – (α) الغرض من هذا المشروع هو تطوير اللوغاريتم باستخدام تعريفه كتكامل . إذا فرضنا أن $P = \{x \in R : x > 0\}$.

(أ) إذا كانت $x \in P$ ، نعرف $L(x)$ بأن يكون

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

ومن ثم $L(1) = 0$ أثبت أن L قابلة التفاضل وأن $L'(x) = 1/x$.

(ب) وضح أن $L(x) < 0$ عند $0 < x < 1$ وأن $L(x) > 0$ عند $x > 1$. فى الحقيقة

$1 - 1/x \le L(x) \le x - 1$ عند $x > 0$

(ج) أثبت أن $L(xy) = L(x) + L(y)$ عند x, y فى P . ومن ثم $L(1/x) = -L(x)$ عند x فى P . (ارشاد : إذا كانت $y \in P$ ، نفرض L_1 معرفة فى P بأنها $L_1(x) = L(xy)$ وأثبت أن $L'_1 = L'$) .

(د) أثبت أنه إذا كانت $n \in N$ و $n \ge 3$ ، فإن

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < L(n) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

(ه) أثبت أن L دالة راسم تناظر أحادى يرسم P إلى كل الفراغ R . بفرض أن e تدل على العدد الوحيد الذى يكون بحيث أن $L(e) = 1$ ، وباستخدام الحقيقة التى تقول أن $L'(1) = 1$ أثبت أن $e = \lim((1 + 1/n)^n)$.

(و) نفرض أن r أى عدد قياسى موجب ، إذن $\lim_{x\to+\infty} L(x)/x^r = 0$

(ز) لاحظ أن

$$L(1+x)=\int_1^{1+x}\frac{dt}{t}=\int_0^x\frac{dt}{1+t}$$

أكتب $(1+t)^{-1}$ كتسلسلة هندسية محدودة لتحصل على

$$L(1+x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+R_n(x)$$

وضح أن $|R_n(x)|\le x/(n+1)$ عند $0\le x\le 1$ وأن

$$|R_n(x)|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \quad \text{عند} \quad -1<x<0$$

٣٠ – (β) هذا المشروع يطور الدوال المثلثية مبتدئة بتكامل

(أ) نفرض أن A معرفة عند x فى $\boldsymbol{R}$ بأنها

$$A(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$$

حينئذ A دالة فردية (أى أن $A(-x)=-A(x)$) ، ومتزايدة مضبوطة ، وهى محدودة بالعدد 2 . عرف π بواسطة $\pi/2=\sup\{A(x):x\in\boldsymbol{R}\}$

(ب) نفرض أن T هى الدالة العكسية للدالة A ، أى أن T دالة متزايدة مضبوطة بنطاق $(-\pi/2,\pi/2)$. أثبت أن T لها مشتقة وأن $T'=1+T^2$

(ج) عرف C ، S فى $(-\pi/2,\pi/2)$ بالقانونين

$$C=\frac{1}{(1+T^2)^{1/2}},\qquad S=\frac{T}{(1+T^2)^{1/2}}$$

ومن ثم C تكون زوجية وتكون S فردية فى $(-\pi/2,\pi/2)$. وضح أن $C(0)=1$ ، $S(0)=0$ ، $C(x)\to 0$ ، $S(x)\to 1$ عند $x\to\pi/2$.

(د) أثبت أن $C'(x)=-S(x)$ ، $S'(x)=C(x)$ عند x فى $(-\pi/2,\pi/2)$ وإذن يحقق كلا من C ، S المعادلة التفاضلية

$$h''+h=0$$

فى الفترة $(-\pi/2,\pi/2)$.

(ﻫ) عرف $C(\pi/2)=0$ ، $S(\pi/2)=0$ وعرف T و S و C خارج الفترة $(-\pi/2,\pi/2)$ بالمعادلة

$$C(x+\pi)=-C(x), \qquad S(x+\pi)=-S(x),$$
$$T(x+\pi)=T(x)$$

إذا أجرينا هذا بالتعاقب ، فإن S و C تكونان معرفتين لكل R ولها دورة 2π . بالمثل ، تكون T معرفة ماعداً عند مضاعفات فردية للمقدار $\pi/2$ ولها دورة π .

(و) أثبت أن الدالتين S و C ، المعرفتين فى R فى الجزء السابق ، قابلتان للتفاضل عند كل نقطة للفراغ R وأنهما يستمران فى تحقيق العلاقات

$$C' = -S, \qquad S' = C$$

فى كل مكان فى الفراغ R .

٣٠–(γ) هذا مشروع يطور قانون حاصل ضرب والاس(*) المشهور . من خلاله سنفرض أن

$$S_n=\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n\,dx$$

(أ) إذا كانت $n>2$ ، فإن $S_n=[(n-1)/n]S_{n-2}$. (ارشاد : كامل بالتجزىء) .

(ب) أثبت القوانين

$$S_{2n}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\frac{\pi}{2}, \qquad S_{2n+1}=\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}$$

(ج) أثبت أن المتتابعة (S_n) متناقصة بإطراد (ارشاد : $(0\le \sin x\le 1)$) .

(د) نفرض أن W_n معرفة بأنها

$$W_n=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdots(2n)(2n)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)(2n+1)}$$

أثبت أن $\lim(W_n)=\pi/2$ (هذا هو حاصل ضرب والاس)

(هـ) أثبت أن $\lim((n!)^2 2^{2n}/(2n)!\sqrt{n})=\sqrt{\pi}$

٣٠ – (δ) هذا هو المشروع يطور صيغة استرلنج(**) الهامة ، التى تعطى قيمة $n!$

(أ) بمقارنة المساحة تحت القطع الزائد $y=1/x$ ومساحة شبه المنحرف المرسوم داخلها ، أثبت أن

(*) جون والاس (١٦١٦ — ١٧٠٣) كان استاذا للهندسة فى جامعة اكسفورد لمدة ستين عاما ، كان بشيرا لنيوتن . ساعد فى وضع العمل الأساسى لتطور التفاضل والتكامل .

(**) جيمس استرلنج (١٦٩٢ — ١٧٧٠) كان رياضيا انجليزيا فى مدرسة نيوتن . الصيغة المنسوبة لاسترلنج اثبتت فى الحقيقة قبل ذلك بواسطة ابراهام دى موافر (١٦٦٧ — ١٧٥٤)، وكان فرنسيا هيجنوتى أى بروتستانتى استقر فى لندن وكان صديقا لنيوتن .

$$\frac{2}{2n+1}<\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

ومن هذا ، استنتج أن $e<(1+1/n)^{n+1/2}$

(ب) أثبت أن

$$\int_1^n \log x\,dx = n\log n - n + 1 = \log(n/e)^n + 1$$

اعتبر الشكل F المكون من مستطيلات قواعدها $[1,\frac{3}{2}],[n-\frac{1}{2},n]$ وارتفاعاتها $2, \log n$ على الترتيب ، وباشباه منحرفات قواعدها $[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}], k=2,3,\ldots,n-1,$ وبارتفاعات مائلة مارة بالنقط ($k, \log k$) . أثبت أن المساحة F هي

$$1+\log 2+\cdots+\log(n-1)+\tfrac{1}{2}\log n = 1+\log(n!)-\log\sqrt{n}$$

(ج) بمقارنة المساحتين فى جزء (ب) ، أثبت أن

$$u_n=\frac{(n/e)^n\sqrt{n}}{n!}<1, \qquad n\in N$$

(د) أثبت أن المتتابعة (u_n) متزايدة بإطراد (ارشاد : اعتبر u_{n+1}/u_n)

(ه) باعتبار u_n^2/u_{2n}, والاستفادة من نتيجة جزء (ه) من المشروع السابق ، أثبت أن $\lim(u_n)=(2\pi)^{-1/2}$

(و) احصل على صيغة استرلنج

$$\lim\left(\frac{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}}{n!}\right)=1$$

الباب الحادى والثلاثون — خواص ابعد للتكامل :

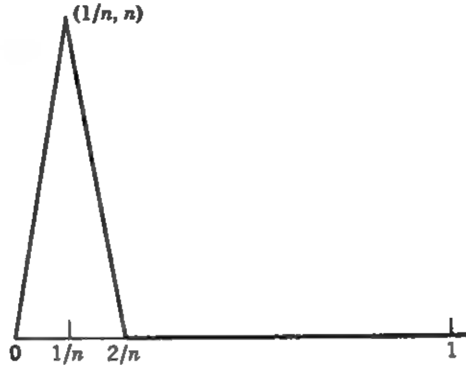
سوف نقدم فى هذا الباب بعض خواص أعمق لتكامل ريمان – اشتلتجز (وريمان) التى تكون غالباً مفيدة .

أولا سنعتبر إمكانية « أخذ النهاية تحت علامة التكامل » ، أى ، قابلية التكامل لنهاية متتابعة دوال قابلة للتكامل .

نفرض أن g متناقصة بإطراد فى فترة $J=[a,b]$ وأن (f_n) متتابعة للدوال التى قابلة للتكامل بالنسبة إلى g والتى تتقارب عند كل نقطة للفترة J إلى دالة f . من الواضح طبيعياً أن نتوقع أن الدالة النهائية تكون f قابلة التكامل وأن

$$\int_a^b f\,dg=\lim\int_a^b f_n\,dg \qquad (31.1)$$

لكن ، هذه الحالة ليست بالضرورة قائمة حتى لدوال دقيقة جداً .



(شكل ٣١ – ١) شكل تخطيطى لدالة f_n .

مثال : نفرض أن $J = [0, 1]$ ، $g(x) = x$ الدالة f_n معرفة عند $n \geq 2$ بأنها

$$f_n(x) = n^2 x, \qquad 0 \leq x \leq 1/n,$$
$$= -n^2(x - 2/n), \qquad 1/n \leq x \leq 2/n,$$
$$= 0, \qquad 2/n \leq x \leq 1$$

من الواضح أنه لكل n تكون الدالة f_n متصلة فى J ، ومن ثم فهى قابلة للتكامل بالنسبة إلى g . (أنظر شكل ٣١ – ١) . أما بطريقة الحساب المباشر أو الرجوع لمعنى التكامل كساحة ، وإذن نحصل على

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1, \qquad n \geq 2$$

وبالإضافة إلى ذلك ، تتقارب المتتابعة (f_n) عند كل نقطة من الفترة J إلى صفر ، ومن ثم الدالة النهائية f تنعدم تطابقياً ، وتكون قابلة للتكامل ، وأن

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

وإذن معادلة (٣١ – ١) لاتظل صحيحة فى هذه الحالة حتى ولو كان لكل من الطرفين معنى .

بما أن معادلة (٣١ – ١) ملائمة جداً ، فنستفسر عما إذا كانت توجد أية شروط إضافية بسيطة التى سوف تتضمنها . نوضح الآن أنه ، إذا كان التقارب منتظماً ، فإن هذه العلاقة تظل قائمة .

٣١ – ٢ نظرية . نفرض أن g دالة متزايدة بإطراد فى J ونفرض أن (f_n) متتابعة دوال

قابلة للتكامل بالنسبة إلى g فوق J . نفرض أن المتتابعة (f_n) تتقارب بانتظام فى J لنهاية دالية f .

حينئذ f تكون قابلة التكامل بالنسبة إلى g وأن

$$\int_a^b f\,dg = \lim \int_a^b f_n\,dg \tag{31.1}$$

البرهان . نفرض أن $\varepsilon > 0$ ونفرض أن N تكون بحيث أن $\|f_N - f\|_J < \varepsilon$ الآن نفرض أن P_N تقسيم الفترة J بحيث أنه إذا كانت Q و P تكريرين التقسيم P_N ، فإن $|S(P; f_N, g) - S(Q; f_N, g)| < \varepsilon$ لأى اختيار النقط الوسطى . إذا استعملنا نفس النقط الوسطى عند اعتبار f_N و f ، فينتج أن

$$|S(P; f_N, g) - S(P; f, g)| \le \sum_{k=1}^{n} \|f_N - f\|_J \{g(x_k) - g(x_{k-1})\}$$

$$= \|f_N - f\|_J \{g(b) - g(a)\} < \varepsilon\{g(b) - g(a)\}$$

بما أن تقديراً مماثلا يظل قائماً للتقسيم Q ، فنجد أن التكريرين Q و P للتقسيم P_N والحاصل جمع ريمان – اشتلتجز المناظرين أن

$$\begin{aligned}|S(P; f, g) - S(Q; f, g)| &\le |S(P; f, g) - S(P; f_N, g)| \\ &+ |S(P; f_N, g) - S(Q; f_N, g)| \\ &+ |S(Q; f_N, g) - S(Q; f, g)| \\ &\le \varepsilon(1 + 2\{g(b) - g(a)\})\end{aligned}$$

طبقاً لمعيار كوشى (٢٩ – ٤) ، تكون الدالة النهائية f قابلة التكامل بالنسبة إلى g . لإثبات (٣١ – ١) نستخدم مفترض (٣٠ – ٥) :

$$\left| \int_a^b f\,dg - \int_a^b f_n\,dg \right| = \left| \int_a^b (f - f_n)\,dg \right| \le \|f - f_n\|_J \{g(b) - g(a)\}$$

بما أن $\lim \|f - f_n\|_J = 0$ ، فينتج النتيجة المطلوبة وهو المطلوب إثباته

الفرض المعطى فى نظرية (٣١ – ٢) الذى يقول أن التقارب للمتتابعة (f_n) يكون منتظماً هو لحد ما صارم وتميد فائدة هذه النتيجة . الآن سوف نقرر نتيجة بحيث لاتقيد التقارب بشدة كبيرة ، لكنها تتطلب قابلية التكامل لدالة النهائية . سوف لا نبرهن هذه النتيجة هنا ، حيث البرهان الطبيعى الصحيح يتطلب جولة فى « نظرية القياس » لكن ، يمكن للقارىء الاسترشاد بمقال لوكسمبرج المدون فى المراجع) .

٣١ – ٣ نظرية تقارب محدودة . نفرض أن (f_n) متتابعة لدوال ونفرض أنهاقابلة للتكامل بالنسبة لدالة متزايدة بإطراد g فى الفترة $J = [a, b]$ للفراغ R . نفرض أنه يوجد $B > 0$

بحيث أن $|f_n(x)| \le B$ لكل $n \in N,\ x \in J$. إذا كانت الدالة $f(x) = \lim (f_n(x)),\ x \in J$ موجودة وقابلة للتكامل بالنسبة إلى g فى J ، حينئذ

$$\int_a^b f\,dg = \lim \int_a^b f_n\,dg \qquad (31.1)$$

النتيجة الآتية لنظرية التقارب المحدود مفيدة فى أكثر الأحيان ، وسوف ننص عليها رسمياً .

٣١ – ٤ نظرية تقارب إطرادية . نفرض أن (f_n) متتابعة إطرادية لدوال قابلة للتكامل بالنسبة لدالة متزايدة بإطراد g فى $J = [a, b]$ إلى R . إذا كانت الدالة $f(x) = \lim (f_n(x)),\ x \in J$ قابلة للتكامل بالنسبة إلى g فى J ، فيكون

$$\int_a^b f\,dg = \lim \int_a^b f_n\,dg \qquad (31.1)$$

البرهان . نفرض أن $f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f(x)$ لكل $x \in J$. إذن $|f_n(x)| \le B$ حيث $B = \|f_1\|_J + \|f\|_J$ ، لذلك يمكننا استخدام (٣١ – ٣) .
وهو المطلوب إثباته

منبع القوة الرئيسى لنظرية ليبج (وليبيج – اشتلتجز) للتكامل هى أنها تعطى تكبير الفصل للدوال القابلة للتكامل بحيث أن معادلة (٣١ – ١) تظل صحيحة تحت فروض أضعف من تلك المعطاة فى النظريات السابقة . أنظر مرجع المؤلف « أساسيات التكامل » المدون فى المراجع .

صيغة تكامل للباقى :

يتذكر القارىء نظرية تايلور (٢٨ – ٦) ، التى تمكن الشخص من حساب القيمة $f(b)$ بدلالة القيم $f(a), f'(a), \ldots, f^{(n-1)}(a)$ ، وحد باق سيتضمن المشتقة النونية $f^{(n)}$ محسوبة عند نقطة بين a و b . لتطبيقات كثيرة يكون من المناسب أكثر أن تكون قادرين التعبير عن الحد الباقى كتكامل يتضمن $f^{(n)}$

٣١ – ٥ نظرية تايلور . نفرض أن f ومشتقاتها $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ تكون متصلة فى الفترة $[a, b]$ إلى R . إذن

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n$$

حيث يعطى الباقى بالتكامل

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt \qquad (31.2)$$

البرهان . كامل R_n بالتجزىء لحصول على

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!}\left\{(b-t)^{n-1}f^{(n-1)}(t)\Big|_{t=a}^{t=b} + (n-1)\int_a^b (b-t)^{n-2}f^{(n-1)}(t)\,dt\right\}$$
$$= -\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!}\int_a^b (b-t)^{n-2}f^{(n-1)}(t)\,dt$$

بالاستمرار فى التكامل بالتجزىء بهذه الطريقة ، نحصل على الصيغة المنصوص عليها وهو المطلوب إثباته

بدلا من الصيغة (٣١-٢) يكون من المناسب غالباً إجراء تغير المتغير $t=(1-s)a+sb$ عند s فى $[0, 1]$ ، والحصول على الصيغة .

$$R_n = \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^1 (1-s)^{n-1}f^{(n)}[a+(b-a)s]\,ds \tag{31.3}$$

هذه الصورة للباق يمكن امتدادها لتشمل الحالة التى عندها يكون للدالة f نطاق فى R^p ومدى فى R^q .

تكاملات تتوقف على بارامتر (كمية متغيرة القيمة) :

من السهم غالباً اعتبار التكاملات التى تعتمد فيها الدوال المراد تكاملها على بارامتر . يرغب الشخص فى هذه الحالات أن يحصل على الشروط المؤكدة للاتصال وللقابلية للتفاضل والقابلية للتكامل للدالة الناتجة . النتيجتان الآتيتان هامتان فى هذا الشأن .

نفرض أن D مستطيل فى $R \times R$ وعرف بأنه

$$D = \{(x, t) : a \le x \le b,\ c \le t \le d\}$$

ونفرض أن f متصلة فى D إلى R . إذن من السهل ملاحظة (تمرين ٢٢ – د) أنه ، لكل مقدار ثابت t فى $[\,c$ و $d\,]$ ، تكون الدالة التى ترسل x إلى $f\ (x, t)$ متصلة على $[a, b]$ ولذلك تكون قابلة لتكامل ريمان نعرف أن F عند t فى $[c, d]$ بالقانون

$$F(t) = \int_a^b f(x, t)\,dx \tag{31.4}$$

نبرهن أولا أن F تكون متصلة .

٣١ – ٩ نظرية . إذا كانت f متصلة فى D إلى R وإذا كانت F معرفة بأنها (٣١ – ٤) فإن F تكون متصلة فى $[c, d]$ إلى R .

البرهان . تتضمن نظرية الاتصال المنتظم (٢٣ – ٣) على أنه إذا كانت $0 < \varepsilon$ ، فإنه

توجد $0 < \delta(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت t_0 و t تنتميان إلى $[c, d]$ وأن $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$ حينئذ .

$$|f(x, t) - f(x, t_0)| < \varepsilon$$

لجميع x فى $[a, b]$. ينتج من مفترض (٣٠ – ٥) أن

$$|F(t) - F(t_0)| = \left| \int_a^b \{f(x, t) - f(x, t_0)\}\, dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |f(x, t) - f(x, t_0)|\, dx \leq \varepsilon(b - a)$$

التى تثبت اتصال F وهو المطلوب إثباته

سنستفيد فى النتيجتين السابقتين من مفهوم المشتقة الجزئية لدالة لمتغيرين حقيقيين . هذه الفكرة ، المألوفة للقارىء من التفاضل والتكامل ، سوف تناقش بعمق فى الفصل السابع .

٣١ – ٧ نظرية . إذا كانت f ومشتقتها الجزئية f_t متصلتين فى D إلى $\mathbb{R}$ ، فإن للدالة F المعرفة بأنها (٣١ – ٤) مشتقة فى $[c, d]$ وأن

$$F'(t) = \int_a^b f_t(x, t)\, dx \tag{31.5}$$

البرهان . من الاتصال المنتظم للمشتقة f_t فى D نستنتج أنه إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، فإنه توجد $0 < \delta(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$ ، فإن

$$|f_t(x, t) - f_t(x, t_0)| < \varepsilon$$

لجميع x فى $[a, b]$. إذا فرضنا أن t و t_0 تحققان هذا الشرط ونستخدم نظرية القيمة المتوسطة (٢٧ – ٦) لنحصل على t_1 (التى ربما تتوقف على x وتقع بين t ، t_0) بحيث أن

$$f(x, t) - f(x, t_0) = (t - t_0) f_t(x, t_1)$$

بضم هاتين العلاقتين ، نستنتج أنه إذا كانت $0 < |t - t_0| < \delta(\varepsilon)$ ، فإن

$$\left| \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} - f_t(x, t_0) \right| < \varepsilon$$

لجميع x فى $[a, b]$. باستخدام (٣٠ – ٥) ، نحصل على التقدير

$$\left| \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - \int_a^b f_t(x, t_0)\, dx \right| \leq \int_a^b \left| \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} - f_t(x, t_0) \right| dx$$

$$\leq \varepsilon(b - a)$$

الذى يثبت معادلة (٣١ – ٥) وهو المطلوب إثباته

يدخل أحياناً البارامتر t فى نهايات التكامل كما فى الدالة المراد تكاملها . تعتبر النتيجة الآتية هذه الإمكانية . سوف نستفيد فى برهانها من حالة خاصة جداً لقاعدة السلسلة (التى سوف تدرس فى الفصل السابع) والتى سوف تكون مألوفة القارىء .

٣١ – ٨ صيغة ليبنز . نفرض أن f و f_1 متصلتان فى D إلى R وأن β و α دالتان قابلتان للتفاضل عند الفترة $[c, d]$ ولهما قيم فى $[a, b]$. إذا كانت φ معرفة فى $[c, d]$ بأنها

$$\varphi(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t)\, dx \tag{31.6}$$

فإن φ لها مشتقة لكل t فى الفترة $[c, d]$ التى تعطى بالقانون

$$\varphi'(t) = f(\beta(t), t)\beta'(t) - f(\alpha(t), t)\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t(x, t)\, dx \tag{31.7}$$

البرهان . نفرض أن H معرفة عند (u, v, t) بأنها

$$H(u, v, t) = \int_v^u f(x, t)\, dx$$

إذا كانت v و u تنتميان إلى $[a, b]$ ، وكانت t تنتمى إلى $[c, d]$ الدالة φ المعرفة فى (٣١ – ٦) هى المحصلة المعطاة فى الصورة $\varphi(t) = H(\beta(t), \alpha(t), t)$. بتطبيق قاعدة السلسلة نجد أن

$$\varphi'(t) = H_u(\beta(t), \alpha(t), t)\beta'(t) + H_v(\beta(t), \alpha(t), t)\alpha'(t) + H_t(\beta(t), \alpha(t), t)$$

وحسب نظرية التفاضل (٣٠ – ٧) يكون

$$H_u(u, v, t) = f(u, t), \qquad H_v(u, v, t) = -f(v, t)$$

ومن النظرية السابقة ، نجد أن

$$H_t(u, v, t) = \int_v^u f_t(x, t)\, dx$$

إذا استخدمنا التعويض $u = \beta(t)$ و $v = \alpha(t)$ فنحصل على القانون (٣١ – ٧)
وهو المطلوب إثباته

إذا كانت f متصلة فى D إلى R وكانت F معرفة بالقانون (٣١ – ٤) ، فقد برهنا فى نظرية ٣١ – ٦ أن F متصلة ومن ثم تكون قابلة لتكامل ريمان فى الفترة $[c, d]$. نوضح الآن أن هذا الفرض للاتصال يكون كافيا لتأكيد أنه يمكننا إبدال تركيب التكامل . هذا يمكن التعبير بلغة القوانين كما يلى

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, t)\, dx \right\} dt = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, t)\, dt \right\} dx \tag{31.8}$$

٣١ – ٩ **نظرية تبادل** . إذا كانت f متصلة فى D ولها قيم فى R ، القانون (٣١–٨) يظل صحيحاً .

البرهان . نظرية ٣١ – ٦ ونظرية القابلية للتكامل ٣٠ – ٢ تدللان على أن كلا من التكاملين المكررين الظاهرين (٣١ – ٨) موجود ، يبقى فقط إثبات تساويهما . حيث أن f متصلة بانتظام فى D ، وإذا كانت $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد $\delta(\varepsilon) > 0$ ، بحيث أنه إذا كانت $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$ ، $|t - t'| < \delta(\varepsilon)$ فإن $|f(x, t) - f(x', t')| < \varepsilon$. نفرض أننا اخترنا n كبيرة جدا بحيث أن $(b - a)/n < \delta(\varepsilon)$ ، $(d - c)/n < \delta(\varepsilon)$ ونقسم D إلى n^2 مستطيلات متساوية بتقسيم كل من $[a, b]$ ، $[c, d]$ إلى n من الأجزاء المتساوية . عند $j = 0, 1, \ldots n$ نفرض

$$x_j = a + (b - a)j/n, \qquad t_j = c + (d - c)j/n$$

يمكننا كتابة التكامل الموجود على يسار (٣١ – ٨) على صورة حاصل جمع

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x, t)\, dx \right\} dt$$

بتطبيق النظرية الأولى القيمة المتوسطة ٣٠ – ٦ مرتين ، نستنتج أنه يوجد عدد x'_j فى $[x_{j-1}, x_j]$ وعدد t'_k فى $[t_{k-1}, t_k]$ بحيث أن

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x, t)\, dx \right\} dt = f(x'_j, t'_k)(x_j - x_{j-1})(t_k - t_{k-1})$$

ومن ثم يكون لدينا

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, t)\, dx \right\} dt = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x'_j, t'_{jk})(x_j - x_{j-1})(t_k - t_{k-1})$$

وباستخدام نفس طريقة الاستدلال للتكامل الموجود فى الطرف الأيمن من (٣١ – ٨) ، ينتج الوجود للأعداد x''_j فى $[x_{j-1}, x_j]$ t''_k فى $[t_{k-1}, t_k]$ بحيث أن

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, t)\, dt \right\} dx = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x''_{jk}, t''_k)(x_j - x_{j-1})(t_k - t_{k-1})$$

بما أن كلا من x'_j و x''_j تنتمى إلى $[x_{j-1}, x_j]$ وأن t'_{jk}, t''_k تنتمى إلى $[t_{k-1}, t_k]$ فنستنتج أنه من الاتصال المنتظم للدالة f أن حاصلى الجمع المزدوجين ومن ثم يختلف التكاملان المكرران على الأكثر بالمقدار $\varepsilon\,(b - a)(d - c)$. بما أن $\varepsilon > 0$ وهى اختيارية ، فإن تساوى هـذين التكاملين يكون مؤكدا إثباته .

وهو المطلوب إثباته

نظرية التمثيل لريزز(*) :

سنختم هذا الباب بنظرية عميقة التى ، مع أنها سوف لا تستخدم فيما يلى ، تلعب دورا هاماً فى تحليل دالى .

سيكون من المناسب أولا جمع بعض نتائج أثبتناها من قبل أو تكون نتائج مباشرة لما قد أثبتنـاه .

نفرض أن $J = [a, b]$ خلية مغلقة فى R ، ونفرض أن $C(J)$ تدل على فراغ متجه لكل دوال متصلة فى J إلى R ، ونفرض أن $\|f\|_J$ هو العمود على $C(J)$ المعرف بأنه

$$\|f\|_J = \sup \{|f(x)| : x \in J\}$$

دالية خطية فى $C(J)$ هى دالة خطية $G : C(J) \to R$ معرفة فى فراغ متجه $C(J)$ ؛ وإذن

$$G(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha G(f_1) + \beta G(f_2)$$

لجميع α, β فى R وأن f_1, f_2 فى $C(J)$. يقال لدالية خطية G فى $C(J)$ أنها موجبة إذا كان لكل $f \in C(J)$ حيث $f(x) \geq 0, x \in J$ ، يكون

$$G(f) \geq 0$$

يقال لدالية خطية G فى $C(J)$ أنها محدودة إذا كانت توجد $M \geq 0$ بحيث أنه

$$|G(f)| \leq M \|f\|_J$$

لجميع $f \in C(J)$

٣١ — ١٠ . مفترض إذا كانت g دالة متزايدة باطراد فى J وإذا كانت G معرفة عند G فى $C(J)$ بأنها

$$G(f) = \int_a^b f\, dg \qquad (31.9)$$

فإن G دالية خطية موجبة محدودة فى $C(J)$.

البرهان . ينتج من نظرية ٢٩ — ٥ (أ) ونظرية ٣٠ — ٢ أن G دالة خطية فى $C(J)$ ومن مفترض ٣٠ — ٥ أن G محدودة بالمقدار $M = g(b) - g(a)$. إذا كانت f تنتمى إلى $C(J)$ وكانت $f(x) \geq 0$ عند $x \in J$ ، فإنه بأخذ $m = 0$ فى قانون (٣٠-٤) نستنتج أن $G(f) \geq 0$. وهو المطلوب إثباته

(*) يمكن حذف بقية هذا الباب عند القراءة الأولى .

سنوضح الآن العكس أى أن ، كل دالية خطية موجبة محدودة فى $C(J)$ تكون مولدة بتكامل ريمان – اشتلتجز بالنسبة إلى دالة ما متزايدة باطراد g هذه هى صورة من « نظرية تمثيل ريزز » المشهورة . التى هى إحدى أحجار الزاوية لموضوع (تحليل دالى) ولها حالات عامة وتطبقات كثيرة بعيدة الأثر . وقد برهنت النظرية بواسطة الرياضى المجرى العظيم فريدرك ريزز(*) .

٣١ – ١١ نظرية تمثيل ريزز . إذا كانت G دالية خطية موجبة محدودة فى $C(J)$، فإنه توجد دالة متزايدة باطراد g فى J فى بحيث أن

$$G(f)=\int_a^b f\,dg \tag{31.9}$$

لكل f فى $C(J)$.

البرهان . سوف نعرف أولا دالة تزايدية اطرادية g وبعد ذلك توضح أن (٣١ – ٩) تظل صحيحة .

يوجد مقدار ثابت M بحيث أنه إذا كانت $0\le f_1(x)\le f_2(x)$ لكل x فى J فإن $0\le G(f_1)\le G(f_2)\le M\,\|f_2\|_J$. إذا كانت t أى عدد حقيق بحيث أن $a<t<b$ ، وإذا كانت n عدداً طبيعياً كبيراً كبراً كافياً ، فنفرض أن $\varphi_{t,n}$ هى الدالة (أنظر شكل ٣١–٢) فى $C(J)$ المعرفة بأنها

$$\begin{aligned}\varphi_{t,n}(x)&=1, && a\le x\le t,\\ &=1-n(x-t), && t<x\le t+1/n,\\ &=0, && t+1/n<x\le b\end{aligned} \tag{31.10}$$

من الواضح سابقاً أنه إذا كانت $n\le m$ ، فإنه لكل t حيث $a<t<b$ يكون

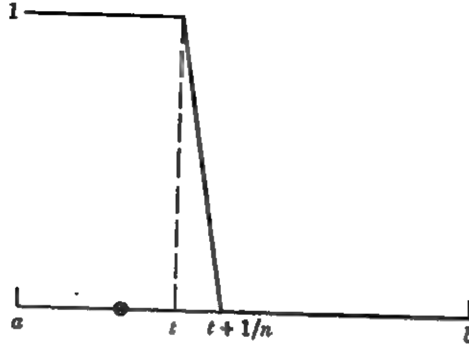
$$0\le\varphi_{t,m}(x)\le\varphi_{t,n}(x)\le 1$$

أى أن المتتابعة $(G(\varphi_{t,n}):n\in N)$ متتابعة أعداد حقيقية ومتناقصة محدودة بحيث تتقارب لعدد حقيق . نعرف $g(t)$ بأن تكون مساوية لهذه النهاية . إذا كانت $a<t\le s<b$ ، $n\in N$ فإن

$$0\le\varphi_{t,n}(x)\le\varphi_{s,n}(x)\le 1$$

ومن ثم ينتج أن $g(t)\le g(s)$. نعرف $g(a)=0$ وإذا كانت $\varphi_{b,n}$ تدل على الدالة

(*) فريدرك ريزز (١٨٨٠–١٩٥٥) كان رياضيا مجريا لامعا ، كان أحد المؤسسين للتوبولوجى والتحليل الدالى . هو أيضا عمل مساهمات حسنة فى الجهد والارجوديك ونظرية التكامل .



(شكل ٣١ – ٢) رسم تخطيطي للدالة $\varphi_{t,n}$

$\varphi_{b,n}(x) = 1, x \in J$ ، فنضع $g(b) = G(\varphi_{b,n})$. إذا كانت $a < t < b$ وكانت n كبيرة كبيرا كافيا فإنه لكل x فى J يكون

$$0 \leq \varphi_{t,n}(x) \leq \varphi_{b,n}(x) = 1$$

أى أن $g(a) = 0 \leq G(\varphi_{t,n}) \leq G(\varphi_{b,n}) = g(b)$. هذا يوضح أن $g(a) \leq g(t) \leq g(b)$ ويكمل تركيب الدالة المتزايدة باطراد g .

إذا كانت f متصلة فى J وكانت $\varepsilon > 0$ ، فيوجد $\delta(\varepsilon) > 0$ ، بحيث أنه إذا كانت $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ وأن $x, y \in J$ ، فإن $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ بما أن f قابلة للتكامل بالنسبة إلى g ، فيوجد تقسيم P_ε الفترة J بحيث أنه إذا كانت Q تكريرا للتقسيم P_ε ، فإنه لأى حاصل جمع ريمان اشتلتجز ، يكون

$$\left| \int_a^b f\,dg - S(Q; f, g) \right| < \varepsilon$$

الآن نفرض أن $P = (t_0, t_1, \ldots, t_m)$ تقسيم للفترة J لنقط مميزة تكون تكريرا للتقسيم P_ε بحيث أن $\sup\{t_k - t_{k-1}\} < \frac{1}{2}\delta(\varepsilon)$ ونفرض أن n عددا طبيعياً كبيرا للدرجة أن

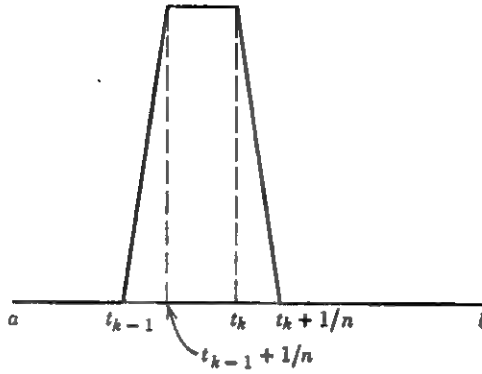
$$2/n < \inf\{t_k - t_{k-1}\}$$

حينئذ تكون الفترات المتعاقبة

$$[t_0, t_1 + 1/n], \ldots, [t_{k-1}, t_k + 1/n], \ldots, [t_{m-1}, t_m] \tag{31.11}$$

فقط لهم أى نقط مشتركة ، (أنظر شكل ٣١–٣) . لكل $k = 1, \ldots, m$ تتقارب المتتابعة المتناقصة $(G(\varphi_{t_k,n}))$ إلى $g(t_k)$ ومن ثم نفترض أن n كبيرة للدرجة أن

$$g(t_k) \leq G(\varphi_{t_k,n}) \leq g(t_k) + (\varepsilon/m\,\|f\|_J) \tag{31.12}$$

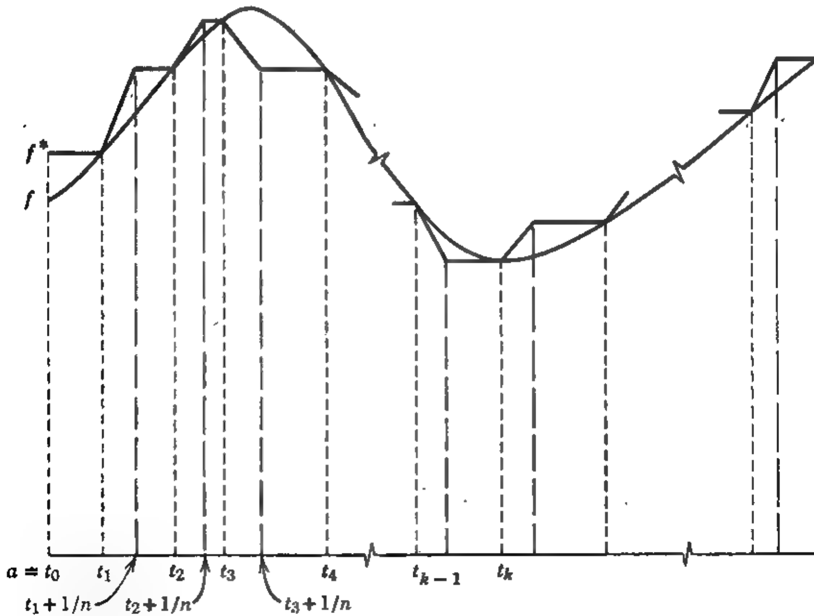


(شكل ٣١ – ٣) رسم تخطيطى للدالة $\varphi_{t_k,n} - \varphi_{t_{k-1},n}$

الآن نعتبر الدالة f^* معرفة فى J بأنها

$$f^*(x) = f(t_1)\varphi_{t_1,n}(x) + \sum_{k=2}^{m} f(t_k)\{\varphi_{t_k,n}(x) - \varphi_{t_{k-1},n}(x)\} \tag{31.13}$$

عنصر x فى J يتبع إما لفترة أو لفترتين فى (٣١ – ١١) . إذا كانت x تنتمى إلى فترة واحدة ، فيجب أن نحصل على $f^*(x) = f(t_1)$ ، $t_0 \leq x < t_1$ أو نحصل على



(شكل ٣١ – ٤) رسما الدالتـــان f^* و f

لبعض $t_{k-1}+(1/n)<x\le t_k$ و يكون فى هذه الحالة $k=1,2,\ldots,m$ ، $f^*(x)=f(t_k)$ (أنظر شكل ٣١ - ٤) . وإذن

$$|f(x)-f^*(x)|<\varepsilon$$

إذا كان العنصر x تنتمى إلى فترتين فى (٣١ - ١١) ، فإن $t_k\le x\le t_k+1/n$ لبعض $k=1,\ldots,m-1$ ونستنتج أن .

$$f^*(x)=f(t_k)\varphi_{t_k,n}(x)+f(t_{k+1})\{1-\varphi_{t_k,n}(x)\}$$

إذا أشرنا لتعريف الدالة φ فى (٣١ - ١٠) ، فنجد أن

$$f^*(x)=f(t_k)(1-n(x-t_k))+f(t_{k+1})n(x-t_k)$$

بما أن $|x-t_{k+1}|<\delta(\varepsilon)$ و $|x-t_k|<\delta(\varepsilon)$ فنستنتج أن

$$\begin{aligned}|f(x)-f^*(x)|&\le|f(x)-f(t_k)|\,(1-n(x-t_k))+|f(x)-f(t_{k+1})|\,n(x-t_k)\\&<\varepsilon\{1-n(x-t_k)+n(x-t_k)\}=\varepsilon\end{aligned}$$

نتيجة لذلك ، نحصل على التقـديـر .

$$\|f-f^*\|_J=\sup\{|f(x)-f^*(x)|:x\in J\}\le\varepsilon$$

بما أن G دالية خطية محدودة فى $C(J)$ فينتج أن

$$|G(f)-G(f^*)|\le M\varepsilon \qquad (31.14)$$

حسب العلاقة (٣١ - ١٢) نجد أن .

$$|\{G(\varphi_{t_k,n})-G(\varphi_{t_{k-1},n})\}-\{g(t_k)-g(t_{k-1})\}|<\varepsilon/2m\,\|f\|_J$$

عند $k=2,2\ldots,m$. باستخدام G للدالة f^* المعرفة بالدالة (٣١ - ١٣) ونتذكر أن $g(t_0)=0$ ، نحصل على

$$\left|G(f^*)-\sum_{k=1}^{m}f(t_k)\{g(t_k)-g(t_{k-1})\}\right|<\varepsilon$$

لكن الحد الثانى من الطرف الأيسر هو حاصل جمع ريمان - اشتلتجز $S(P:f,g)$ للدالة f بالنسبة إلى g بالتناظر للتقسيم P الذى هو تكرير التقسيم P_ε وإذن نحصل على

$$\left|\int_a^b f\,dg-G(f^*)\right|\le\left|\int_a^b f\,dg-S(P;f,g)\right|+|S(P;f,g)-G(f^*)|<2\varepsilon$$

أخيرا ، باستخدام علاقة (٣١ - ١٤) ، نجد أن

$$\left|\int_a^b f\,dg-G(f)\right|<(M+2)\varepsilon \qquad (31.15)$$

بما أن $0 < \varepsilon$ اختيارية والطرف الأيسر من (٣١ - ١٥) لا يتوقف عليها فنستنتج أن

$$G(f) = \int_a^b f\,dg$$

وهو المطلوب إثباته

من المهم ، لبعض أغراض ، معرفة أن هناك تناظرا أحاديا بين داليات خطية موجبة محدودة فى $C(J)$ ودوال متزايدة باطراد عمودية معينة . ويمكن التأكد من أن تركيبنا لتوضيح أنه ينتج دالة متزايدة g بحيث أن $g(a) = 0$ وأن g متصلة من اليمين عند كل نقطة داخلية للفترة J بهذه الخواص الإضافية ، يوجد تناظر أحادى بين داليات موجبة ودوال متزايدة .

تمرينــات :

٣١ - (أ) إذا كانت $a > 0$ ، وضح مباشرة أن

$$\lim_n \int_0^a e^{-nx}\,dx = 0$$

أى النتائج لهذا الباب تستخدم ؟

٣١ - (ب) إذا كانت $0 < a < 2$ وضح أن

$$\lim_n \int_a^2 e^{-nx^2}\,dx = 0$$

ماذا يحدث إذا كانت $a = 0$ ؟

٣١ - (ج) ناقش $\lim_n \int_0^1 nx(1-x)^n\,dx$

٣١ - (د) إذا كانت $a > 0$ ، وضح أن

$$\lim_n \int_a^\pi \frac{\sin nx}{nx}\,dx = 0$$

ماذا يحدث إذا كانت $a = 0$ ؟ .

٣١ - (هـ) بفرض أن $f_n(x) = nx(1+nx)^{-1}$ عند $x \in [0, 1]$ ، وبفرض أن $f(x) = 0$ عند $x = 0$ وأن $f(x) = 1$ عند $x \in (0, 1]$ أثبت $f_n(x) \to f(x)$ لجميع $x \in [0, 1]$ وأن

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx$$

٣١ - (و) بفرض أن $h_n(x) = nx\,e^{-nx^2}$ عند $x \in [0, 1]$ وبفرض أن $h(x) = 0$ أثبت أن

$$0=\int_0^1 h(x)\,dx \neq \lim \int_0^1 h_n(x)\,dx=\frac{1}{2}$$

٣١ – (ز) نفرض أن (g_n) متتابعة لدوال متزايدة فى $[a, b]$ والتى تتقارب بانتظام إلى دالة g فى $[a, b]$. إذا كانت دالة متزايدة f قابلة للتكامل بالنسبة إلى g_n لكل $n \in N$ أثبت أن f تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى g وأن

$$\int_a^b f\,dg=\lim \int_a^b f\,dg_n$$

٣١ – (ح) أعط مثالا لتوضح أن الاستنتاج فى المثال السابق ربما يفشل إذا كان التقارب ليس منتظما .

٣١ – (ط) إذا كانت $\alpha > 0$ وضح أن $\int_0^1 t^{\alpha}(\log t)^2\,dt=2/(\alpha+1)^3$

٣١ – (ى) بفرض أن f ومشتقتها الجزئية f_t متصلة فإن عند (x, t) فى $[a, b] \times [c, d]$ استخدم نظرية التبديل ٣١ – ٩ إلى

$$\int_c^t \left\{\int_a^b f_t(x, t)\,dx\right\} dt, \qquad c \leq t \leq d$$

وفاضل للحصول على برهان آخر لنظرية ٣١ – ٧ .

٣١ – (ك) استخدم النظرية الأساسية ٣٠ – ٨ لتوضيح أنه إذا كانت متتابعة (f_n) لدوال تتقارب فى J لدالة f وإذا كانت المشتقات (f_n') متصلة وتتقارب بانتظام فى J لدالة g فإن f' موجودة وتساوى g (هذه النتيجة تكون أقل عموما من نظرية ٢٨ – ٥ ، لكن من السهل إثباتها) .

٣١ – (ل) نفرض أن $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ هى سرد لأعداد قياسية فى I . نفرض أن f_n معرفة بأن تكون مساوية للواحد الصحيح إذا كانت $x \in \{r_1, \ldots, r_n\}$ ومساوية صفرا خلاف ذلك . حينئذ f_n قابلة لتكامل ريمان فى I والمتتابعة (f_n) تتقارب باطراد لدالة ديرشلت غير المتصلة التى تكون مساوية واحدا صحيحاً فى $I \cap Q$ ومساوية صفرا فى $I \setminus Q$ ، . ومن ثم النهاية الاطرادية لمتتابعة دوال قابلة لتكامل ريمان لا تحتاج لكونها قابلة لتكامل ريمان .

٣١ – (م) بفرض أن g دالة ثابتة متزايدة باطراد فى $J=[a, b]$. إذا كانت f أى دالة قابلة للتكامل بالنسبة إلى g فى J ، فإننا نعرف $\|f\|_1$ بأنها

$$\|f\|_1=\int_a^b |f|\,dg$$

وضح أن « الخواص للعمود » الآتية تكون صحيحة .

(أ) $\|f\|_1 \geq 0$

(ب) إذا كانت $f(x) = 0$ لجميع $x \in J$ ، فإن $\|f\|_1 = 0$ ؛

(ج) إذا كانت $c \in R$ ، فإن $\|cf\|_1 = |c| \, \|f\|_1$

(د) $| \|f\|_1 - \|h\|_1 | \leq \|f \pm h\|_1 \leq \|f\|_1 + \|h\|_1$.

لكن ، من الممكن أن يكون $\|f\|_1 = 0$ بدون كون $f(x) = 0$ لجميع $x \in J$ (هل هذا يمكن أن يحدث عند $g(x) = x$ ؟) .

٣١ – (ن) إذا كانت g متزايدة باطراد فى J ، وإذا كانت $f_n, n \in N$ و f ، دالتين قابلتين للتكامل بالنسبة إلى g ، فإننا نقول أن المتتابعة (f_n) تتقارب فى المتوسط (بالنسبة إلى g) فى حالة كون

$$\|f_n - f\|_1 \to 0$$

(الدلالة هنا هى كما فى التمرين السابق) . أثبت أنه إذا كانت (f_n) تتقارب فى المتوسط إلى f ، فإن

$$\int_a^b f_n \, dg \to \int_a^b f \, dg$$

أثبت أنه إذا كانت (f_n) متتابعة لدوال قابلة للتكامل وتتقارب بانتظام فى J إلى f ، فإنها تتقارب أيضاً فى المتوسط إلى f . فى الحقيقة يكون

$$\|f_n - f\|_1 \leq \{g(b) - g(a)\} \|f_n - f\|_J$$

لكن ، إذا كانت f_n تدل على الدالة فى مثال ٣١–١ ، وإذا كانت $g_n = (1/n) f_n$ فإن المتتابعة (g_n) تتقارب فى المتوسط [بالنسبة إلى $g(x) = x$] إلى الدالة صفر ، لكن التقارب ليس منتظما فى I .

٣١ – (س) بفرض أن $g(x) = x$ فى $J = [0, 2]$ وبفرض أن (I_n) متتابعة لفترات مغلقة فى J بحيث أن (i) طول I_n هو $1/n$ ، (ii) $I_n \cap I_{n+1} = \emptyset$ ، (iii) كل نقطة x فى J تنتمى إلى كثير لانهائى من I_n . نفرض f_n معرفة بأنها

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1, \qquad x \in I_n, \\ &= 0, \qquad x \notin I_n \end{aligned}$$

أثبت أن المتتابعة (f_n) تتقارب فى المتوسط [بالنسبة إلى $g(x) = x$] إلى دالة الصفر فى J ، لكن المتتابعة (f_n) لا تتقارب بانتظام . فى الحقيقة ، لا تتقارب المتتابعة (f_n) عند أى نقطة .

٣١ – (ع) بفرض أن g متزايدة باطراد فى $J = [a, b]$ إذا كانت h و f قابلتين

للتكامل بالنسبة إلى g فى J إلى R تعرف حاصل الضرب الداخل (f, h) للدالتين h , f . بالقانون.

$$(f, h) = \int_a^b f(x)h(x)\, dg(x)$$

أثبت أن كل الخواص لتعريف ٨ — ٣ تكون متحققة ماعدا (ii) . إذا كانت $f = h$ هى دالة الصفر فى J ، فإن $(f, f) = 0$ ، لكن ، ربما يحدث أن $(f, f) = 0$ لدالة f لا تتلاشى فى أى مكان فى J .

٣١ — (ف) عرف $\|f\|_2$ بأنها .

$$\|f\|_2 = \left\{ \int_a^b |f(x)|^2\, dg(x) \right\}^{1/2}$$

بحيث أن $\|f\|_2 = (f, f)^{1/2}$. أثبت متباينة اشفارتز

$$|(f, h)| \leq \|f\|_2 \|h\|_2$$

(نظرية ٨ — ٧ ، نظرية ٨ — ٨) : وضح أن الخواص العمودية ٨ — ٥ تظل قائمة ، ماعدا أن $\|f\|_2 = 0$ لا تدل على أن $f(x) = 0$ لكل x فى J . أثبت أن

$$\|f\|_1 \leq \{g(b) - g(a)\}^{1/2} \|f\|_2$$

٣١ — (ص) بفرض أن $n \in N$ وأن f_n و f قابلتان للتكامل فى J بالنسبة إلى دالة متزايدة g فنقول أن المتتابعة (f_n) تقترب فى متوسط تربيع (بالنسبة إلى g فى J) إلى f إذا كانت $\|f_n - f\|_2 \to 0$

(ا) وضح أنه إذا كانت المتتابعة تقاربية بانتظام فى J ، فانها أيضا تقترب فى متوسط تربيع إلى نفس الدالة .

(ب) وضح أنه إذا كانت المتتابعة تقترب فى متوسط تربيع فإنها تقترب فى المتوسط إلى نفس الدالة .

(ج) وضح أن تمرين ٣١ — س يبرهن أن التقارب فى متوسط تربيع لا يدل على تقارب عند أى نقطة للفترة J .

(د) إذا أخذنا ، فى تمرين ٣١ — س ، I_n طولها $1/n^2$ وإذا وضعنا $h_n = nf_n$ ، فإن المتتابعة (h_n) تتقارب فى المتوسط ، لكن لا تتقارب فى متوسط تربيع ، إلى دالة الصفر .

٣١ — (ق) أثبت أنه ، إذا كانت المشتقة النونية $f^{(n)}$ متصلة فى $[a, b]$ ، فإن صورة التكامل لنظرية تايلور ٣١ — ٥ والنظرية الأولى للقيمة المتوسطة ٣٠ — ٩ يمكن استخدامها للحصول على صورة لاجرانج للباقى المعطاة فى ٢٨ — ٦ .

٣١ — (ر) إذا كانت $J_2 = [c, d]$. $J_1 = [a, b]$ وإذا كانت f متصلة فى $J_1 \times J_2$

إلى R وكانت g قابلة لتكامل ريمان فى J_1 ، فإن الدالة F ، المعرفة فى J_2 بأنها

$$F(t)=\int_a^b f(x,t)g(x)\,dx$$

متصلة فى J_2 .

٣١ – (ش) بفرض أن g دالة متزايدة فى $J_1=[a,b]$ إلى R ونفرض أنه لكل t ثابتة فى $J_2=[c,d]$ ، يكون التكامل

$$F(t)=\int_a^b f(x,t)\,dg(x)$$

موجود . إذا كانت المشتقة الجزئية f_t متصلة فى $J_1\times J_2$ ، فإن المشتقة F' موجودة فى J_2 ومعطاة كما يلى .

$$F'(t)=\int_a^b f_t(x,t)\,dg(x)$$

٣١ – (ت) بفرض أن $J_1=[a,b]$ و $J_2=[c,d]$. وبفرض أن القيمة الحقيقية لدالة g تكون اطرادية فى J_1 وأن h اطرادية فى J_2 ، وأن f متصلة فى $J_1\times J_2$. عرف G فى J_2 ، H على J_1 بالتعريفين

$$G(t)=\int_a^b f(x,t)\,dg(x),\qquad H(x)=\int_c^d f(x,t)\,dh(t)$$

أثبت أن G قابلة للتكامل بالنسبة إلى h فى J_2 ، وأن H قابلة للتكامل بالنسبة إلى g فى J_1 وأن

$$\int_c^d G(t)\,dh(t)=\int_a^b H(x)\,dg(x)$$

يمكننا لتأكيد هذه المعادلة الأخيرة فى الصورة .

$$\int_c^d\left\{\int_a^b f(x,t)\,dg(x)\right\}dh(t)=\int_a^b\left\{\int_c^d f(x,t)\,dh(t)\right\}dg(x)$$

٣١ – (ث) بفرض أن J_2 و J_1 , f كما فى تمرين ٣١ – ت . إذا كانت φ فى $C(J_1)$ (أى أن ، φ دالة متصلة فى J_1 إلى R) بفرض أن $T(\varphi)$ دالة معرفة فى J_2 بالقانون

$$T(\varphi)(t)=\int_a^b f(x,t)\varphi(x)\,dx$$

أثبت أن T هى تحويل خطى فى $C(J_1)$ إلى $C(J_2)$ بمعنى أنه إذا كانت φ, ψ ، تنتميان إلى $C(J_1)$ ، فإن

(أ) $T(\varphi)$ تنتمى إلى $C(J_2)$.

(ب) $T(\varphi+\psi)=T(\varphi)+T(\psi)$

(ج) $T(c\varphi)=cT(\varphi)$ عند $c\in \mathbf{R}$.

إذا كانت $M=\sup\{|f(x,t)|:(x,t)\in J_1\times J_2\}$ ، فإن T محدودة بمعنى أنه

(د) $\|T(\varphi)\|_{J_2}\le M\,\|\varphi\|_{J_1}$ عند $\varphi\in C(J_1)$.

٣١ – (خ) بالاستمرار فى دلالة التمرين السابق ، وضح أنه إذا كانت $0<r$ ، فإن T ترسل المجموعة

$$B_r=\{\varphi\in C(J_1):\|\varphi\|_{J_1}\le r\}$$

إلى فئة متساوية الاتصال بانتظام لدوال فى $C(J_2)$ (أنظر تعريف ٢٨ – ٦) لذلك ، إذا كانت (φ_n) أى متتابعة لدوال فى B_r ، فإنه توجد متتابعة جزئية (φ_{n_k}) بحيث أن المتتابعة $(T(\varphi_{n_k}))$ تتقارب بانتظام فى J_2 .

٣١ – (ذ) بفرض أن J_1 و J_2 معرفان كما سبق وبفرض ان f متصلة فى $\mathbf{R}\times J_2$ إلى $\mathbf{R}$. إذا كانت φ فى $C(J_1)$ ، ونفرض أن $S(\varphi)$ هى الدالة المعرفة فى J_2 بالقانون

$$S(\varphi)(t)=\int_a^b f(\varphi(x),t)\,dx$$

وضح أن $S(\varphi)$ تنتمى إلى $C(J_2)$ ، لكن ، فى الحالة العامة ، S ليست تحويلا خطيا بمعنى تمرين ٣١ – ث . وبالرغم من ذلك أثبت أن S ترسل المجموعة B_r فى تمرين ٣١ – خ إلى فئة متساوية الاتصال بانتظام لدوال فى $C(J_2)$. أيضاً ، إذا كانت (φ_n) أى متتابعة فى B_r ، فستوجد متتابعة جزئية بحيث أن $(S(\varphi_{n_k}))$ تتقارب بانتظام فى J_2 (هذه النتيجة هامة فى نظرية المعادلة التكاملية غير الخطية) .

٣١ – (ض) وضح أنه إذا عرفنا G_2 و G_1 و G_0 عند f فى $C(I)$ بأنها

$$G_0(f)=f(0),\qquad G_1(f)=2\int_0^{1/2} f(x)\,dx,$$

$$G_2(f)=\tfrac{1}{2}\{f(0)+f(1)\}$$

فإن G_2 و G_1 و G_0 داليات خطية موجبة محدودة فى $C(I)$. اعط دوال متزايدة باطراد g_2 و g_1 و g_0 تمثل هذه الداليات الخطية كتكاملات ريمان اشتلتجز . وضح أن الاختيار للدوال g_i ليس محددا وحيداً ما لم يكن $g_i(0)=0$ وأن g_i متصلة من اليمين عند كل نقطة داخلية من I .

مشروعات :

٣١ (α) هذا المشروع يثبت الوجود لحل وحيد لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى تحت وجود شرط لبشتز . نفرض أن $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^2$ مفتوحة ونفرض أن $f:\Omega \to \boldsymbol{R}$ متصلة وتحقق شرط لبشتز : $|f(x, y)-f(x, y')| \le K|y-y'|$ لجميع نقط $(x, y), (x, y')$ فى Ω . نفرض I خلية مغلقة

$$I=\{(x, y): |x-a| \le \alpha,\ |y-b| \le \beta\}$$

محتوية فى Ω ونفرض أن $M\alpha \le \beta$ ، حيث $|f(x, y)| \le M$ عند $(x, y) \in I$

(أ) إذا كانت $J=[a-\alpha, a+\alpha]$ فإننا نعرف $\varphi_0(x)=b$ عند $x \in J$ وإذا كانت $n \in N$ ، فنعرف

$$\varphi_n(x)=b+\int_a^x f(t, \varphi_{n-1}(t))\, dt$$

عند $x \in J$. أثبت بالاستنتاج أن المتتابعة (φ_n) معرفة جيدا فى J وأن

(i) $$|\varphi_n(x)-b| \le \beta$$

(ii) $$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)| \le \frac{MK^{n-1}}{(n-1)!}|x-a|^{n-1}$$

لكل $x \in J$.

(ب) أثبت أن كلا من الدوال φ_n متصلة فى J وأن المتتابعة (φ_n) تتقارب بانتظام فى J إلى دالة φ .

(ج) استنتج أن الدالة φ متصلة فى J ، وتحقق $\varphi(a)=b$ ، وأن

$$\varphi(x)=b+\int_a^x f(t, \varphi(t))\, dt$$

لجميع $x \in J$. استنتج أن φ قابلة للتفاضل فى J وتحقق

$$\varphi'(x)=f(x, \varphi(x)) \qquad \text{for } x \in J$$

(د) إذا كانت ψ متصلة فى J وتحقق

$$\psi(a)=b, \qquad \psi'(t)=f(x, \psi(x))$$

عند كل $x \in J$ أثبت أن

$$\psi(x)=b+\int_a^b f(t, \psi(t))\, dt \qquad \text{for } x \in J$$

(هـ) إذا كانت φ كما فى (ج) وكانت ψ كما فى (د) ، أثبت بالاستنتاج أن

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \le K \left| \int_a^x |\varphi(t)-\psi(t)|\, dt \right|$$
$$\le \frac{K^n}{n!} \|\varphi-\psi\|_J \, |x-a|^n$$

ومن ثم $\|\varphi-\psi\|_J \le \|\varphi-\psi\|_J K^n\alpha^n/n!$ ، ومن ذلك ينتج أن $\varphi(x)=\psi(x)$ لكل $x \in J$

الباب الثانى والثلاثون — تكاملات غير معينة ولا نهائية :

كان يوجد فى الأبواب الثلاثة السابقة فرضان دائماً : كنا نتطلب كون الدوال محدودة وكنا نتطلب كون نطاق التكامل مدمجا . إذا أسقطنا أيا من هذين الفرضين فإن نظرية التكامل القادمة لا تستخدم بدون بعض التغيير ، بما أنه عدد من التطبيقات الهامة التى يكون فيها من المستحسن السماح لأحد أو كلتا هذه الظواهر الجديدة . سنشير هنا إلى التغييرات التى يمكن إجراؤها .

دوال غير محدودة :

نفرض أن $J=[a,b]$ فترة فى R ونفرض أن f دالة حقيقية القيمة ومعرفة على الأقل عندما x تحقق $a<x\le b$. إذا كانت f قابلة لتكامل ريمان فى الفترة $[c,b]$ لكل c تحقق $a<c\le b$ ، ونفرض أن

$$I_c = \int_c^b f \tag{32.1}$$

سنعرف التكامل غير المعين للدالة f فى $J=[a,b]$ بأنه نهاية المقدار I_c عندما $c \to a$.

٣٢ – ١ تعريف . نفرض أن تكامل ريمان فى (٣٢ – ١) موجود لكل c فى $(a,b]$. نفرض أنه يوجد عدد حقيقى I بحيث أنه عند كل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta(\varepsilon)>0$ بحيث أنه إذا كانت $a<c<a+\delta(\varepsilon)$ فإن $|I_c-I|<\varepsilon$. فى هذه الحالة نقول أن I هى التكامل غير المعين للدالة f فى $J=[a,b]$ وأحيانا نرمز للقيمة I لهذا التكامل غير المعين بأنه

$$\int_{a+}^b f \qquad \text{or by} \qquad \int_{a+}^b f(x)\,dx \tag{32.2}$$

مع أنه من المعتاد بكثرة عدم كتابة إشارة + فى الحد الأسفل .

٣٢ – ٢ أمثلة . (أ) نفرض أن الدالة f معرفة فى $(a,b]$ ومحدودة فى هذه الفترة . إذا كانت f قابلة لتكامل ريمان فى كل فترة $[c,b]$ حيث $a<c\le b$ ، فإنه من السهل

ملاحظة (تمرين ٣٢ – أ) أن التكامل غير المعين (٣٢ – ٢) موجود . أى أن الدالة $f(x) = \sin(1/x)$ لها تكامل غير معين فى الفترة [1 و 0] .

(ب) إذا كانت $f(x) = 1/x$ عند x فى الفترة $(0, 1]$ وإذا كانت c فى الفترة $(0, 1]$ فينتج من النظرية الأساسية ٣٠ – ٨ ومن حقيقة كون f هى المشتقة للوغاريتم أن

$$I_c = \int_c^1 f = \log 1 - \log c = -\log c$$

بما أن $\log c$ يصبح غير محدودة عند $c \to 0$ ، فإن التكامل غير المعين للدالة f فى الفترة $[0, 1]$ غير موجود .

(ج) نفرض أن $f(x) = x^\alpha$ عند x فى $(0, 1]$. إذا كانت $\alpha<0$ ،فإن الدالة متصلة لكنها غير محدودة فى [1 و 0) . إذا كانت $\alpha \neq -1$ ، فإن f هى مشتقة للدالة .

$$g(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$$

ينتج من النظرية الأساسية ٣٠ – ٨ أن

$$\int_c^1 x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1}(1 - c^{\alpha+1})$$

إذا كانت α تحقق $-1 < \alpha < 0$ ، فإن $c^{\alpha+1} \to 0$ عندما $c \to 0$ ويكون للدالة f تكامل غير معين ومن الناحية الأخرى ، إذا كانت $\alpha < -1$ فإن $c^{\alpha+1}$ ليس لها نهاية محدودة عندما $c \to 0$ ومن ثم فإن الدالة f ليس لها تكامل غير معين .

تتعلق المناقشة السابقة بدالة غير معروفة أو ليست محدودة عند النقطة الطرفية اليسرى للفترة . من الواضح كيفية معالجة السلوك المماثل عند النقطة الطرفية اليمنى . أحياناً تهتم أكثر بالحالة التى يكون فيها الدالة ليست معرفة وليست محدودة عند نقطة داخلية للفترة ، ونفرض أن p هى نقطة داخلية للفترة $[a, b]$ ونفرض أن f معرفة عند كل نقطة للفترة $[a, b]$ ماعدا ربما عند p . إذا كان كلا التكاملين غير المعينين

$$\int_a^{p-} f, \qquad \int_{p+}^b f$$

موجودين فإننا نعرف التكامل غير المعين للدالة f فى الفترة $[a, b]$ بأنه حاصل جمعهما وبمفهوم النهاية ، نعرف التكامل غير المعين للدالة f فى الفترة $[a, b]$ بأنه

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_a^{p-\epsilon} f(x)\, dx + \lim_{\delta \to 0+} \int_{p+\delta}^b f(x)\, dx \qquad (32.3)$$

من الواضح أنه إذا كانت هاتان النهايتان موجودتين ، فإن النهاية الواحدة

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{\int_a^{p-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{p+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right\} \tag{32.4}$$

موجودة أيضاً ولها نفس القيمة . لكن ، وجود النهاية (٣٢ - ٤) لايتضمن وجود (٣٢-٣) . فمثلا ، إذا كانت f معرفة عند $x \in [-1, 1], x \neq 0$ بأنها $f(x) = 1/x^3$ ، فإنه من السهل ملاحظة أن

$$\int_{-1}^{-\varepsilon}\left(\frac{1}{x^3}\right)dx+\int_{\varepsilon}^{1}\left(\frac{1}{x^3}\right)dx=\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right)+\left(\frac{-1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)=0$$

لكل ε تحقق $0 < \varepsilon < 1$. لكن ، قد رأينا فى مثال (٣٢ - ٢) (ج) أنه إذا كانت $\alpha = -3$ ، فإن التكاملين غير المعينين

$$\int_{-1}^{0-}\frac{1}{x^3}\,dx, \qquad \int_{0+}^{1}\frac{1}{x^3}\,dx$$

غير موجودين .

الشرح السابق يوضح أن النهاية فى (٣٢ - ٤) ربما يكون موجوداً بدون كون النهاية فى (٣٢ - ٣) موجودة . عرفنا التكامل غير المعين (الذى أحياناً يسمى تكامل كوشى) للدالة f المعطى بالصيغة (٣٢ - ٣) . النهاية الموجودة فى (٣٢ - ٤) مهمة أيضاً وتسمى بالقيمة الأساسية لكوشى للتكامل ويرمز له بالرمز

$$(\text{CPV})\int_a^b f(x)\,dx$$

من الواضح أن دالة لها عدد محدود من نقط ليست معرفة أو محدودة عندها يمكن معالجتها بتجزء الفترة إلى فترات جزئية بهذه النقط كنقط طرفية .

تكاملات لا نهائية :

من المهم على امتداد التكامل لدوال معينة معرفة فى فئات غير محدودة مثال ذلك ، إذا كانت f معرفة فى $\{x \in \mathbf{R} : x \geq a\}$ إلى $\mathbf{R}$ وكانت قابلة لتكامل ريمان فى $[a, c]$ لكل $c > a$ ، فنفرض أن I_c هو التكامل الجزئى المعطى بأنه

$$I_c = \int_a^c f \tag{32.5}$$

سنعرف الآن « التكامل اللانهائى » للدالة f عند $x \geq a$ بأنه النهاية للتكامل I_c عندما c تزداد .

٣٢ - ٣ تعريف . إذا كانت f قابلة لتكامل ريمان على $[a, c]$ لكل $c > a$ ، فنفرض أن I_c أنه التكامل الجزئى المعطى بالصيغة (٣٢ - ٥) . يقال لعدد حقيقى I أنه تكامل لانهائى للدالة

على $\{x : x \geq a\}$ f إذا كان يوجد لكل $0 < \varepsilon$ ، عدد حقيق $M(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $c > M(\varepsilon)$ فإن $|I - I_c| < \varepsilon$ فى هذه الحالة ترمز إلى I بالرمز

$$\int_a^{+\infty} f \quad \text{or} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \tag{32.6}$$

يجب ملاحظة أن تكاملاتلانهائية تسمى أحياناً « تكاملات غير معينة من النوع الأول » نفضل المصطلح الحالى ، الذى يرجع إلى هاردى(*) ، لأنه أسهل ومواز للاصطلاح المستخدم فى حالة المتسلسلات اللانهائية .

٣٢ - ٤ أمثلة . (أ) إذا كانت $f(x) = 1/x$ عند $x > a > 0$ فإن التكاملات الجزئية هى

$$I_c = \int_a^c \frac{1}{x}\, dx = \log c - \log a$$

بما أن $\log c$ تصبح غير محدودة عندما $c \to +\infty$ فإن التكامل اللانهائى للدالة f غير موجودة .

(ب) نفرض أن $f(x) = x^\alpha$ عند $x \geq a > 0$ وأن $\alpha \neq -1$. إذن

$$I_c = \int_a^c x^\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha+1}(c^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})$$

إذا كانت $\alpha > -1$ ، فإن $\alpha + 1 > 0$ والتكامل اللانهائى لايوجد . لكن ، إذا كانت $\alpha < -1$ ، فإن

$$\int_a^{+\infty} x^\alpha\, dx = -\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

(ج) نفرض أن $f(x) = e^{-x}$ عند $x \geq 0$ بإذن

$$\int_0^c e^{-x}\, dx = -(e^{-c} - 1)$$

ومن ثم التكامل اللانهائى للدالة f فى $\{x : x \geq 0\}$ موجود ويساوى الواحد الصحيح .

من الممكن أيضاً اعتبار التكامل لدالة معرفة فى كل R . فى هذه الحالة نتطلب أن f تكون قابلة لتكامل ريمان على كل فترة محدودة فى R وتعتبر النهايتين

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \lim_{b \to -\infty} \int_b^a f(x)\, dx, \tag{32.7a}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\, dx \tag{32.7b}$$

(*) جيفرى هاردى (١٨٧٧ — ١٩٤٧) كان أستاذا بكمبردج وكان عميد الرياضيات الانجليزية لوقت طويل . قدم مساهمات كثيرة وعميقة الى التحليل الرياضى .

من السهل أن نرى أنه إذا كانت كلتا هاتين النهايتين موجودتين لقيمة واحدة للمقدار a ، فإن كلتا النهايتين موجودتان لكل قيم a . فى هذه الحالة نعرف التكامل اللانهائى للدالة f على الفراغ R بأنه حاصل جمع هذين التكاملين اللانهائيين

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{a} f(x)\, dx + \lim_{c\to+\infty} \int_{a}^{c} f(x)\, dx \tag{32.8}$$

وكما فى حالة التكاملات غير المعينة يكون وجود كلتا النهايتين فى (٣٢ - ٨) متضمناً وجود النهاية

$$\lim_{c\to+\infty} \left\{ \int_{-c}^{a} f(x)\, dx + \int_{a}^{c} f(x)\, dx \right\} = \lim_{c\to+\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\, dx \tag{32.9}$$

وتساوى (٣٢ -٨) ، (٣٢ - ٩) . تسمى النهاية فى (٣٢ - ٩) ، أن وجدت ، غالباً بالقيمة الأساسية لكوشى للتكامل اللانهائى على الفراغ R ويرمز له بالرمز

$$(\text{CPV}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \tag{32.10}$$

لكن ، وجود القيمة الأساسية لكوشى لا يتضمن وجود التكامل اللانهائى (٣٢ - ٨) يلاحظ هذا باعتبار $f(x) = x$ ، لذلك

$$\cdot \int_{-c}^{c} x\, dx = \tfrac{1}{2}(c^2 - c^2) = 0$$

لجميع c أى أن القيمة الأساسية لكوشى للتكامل اللانهائى عند $f(x) = x$ موجودة وتساوى الصفر ، لكن التكامل اللانهائى لهذه الدالة غير موجودة ، حيث لايوجد أى من التكاملات اللانهائية فى (٣٢ - ٧) .

وجود التكامل اللانهائى :

سنحصل الآن على شروط قليلة لوجود التكامل اللانهائى فى الفئة $\{x : x \geq a\}$. هذه النتائج يمكن استخدامها أيضاً لتعطى شروطاً للتكامل اللانهائى فى الفراغ R ، حيث أن الأخير يشمل اعتبار التكاملات اللانهائية على الفئتين $\{x : x \geq a\}$ و $\{x : x \leq a\}$ ندون أول معيار كوشى .

٣٢ - ٥ معيار كوشى . نفرض أن f قابلة للتكامل على $[a, c]$ لكل $c \geq a$. إذن التكامل اللانهائى

$$\int_{a}^{+\infty} f$$

موجود إذا وإذا فقط كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ ، $K(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $b \geq c \geq K(\varepsilon)$ فإن

$$\left| \int_c^b f \right| < \varepsilon \qquad (32.11)$$

البرهان . تثبت ضرورية الشرط بالطريقة العادية . نفرض أن الشرط متحقق ونفرض أن I_n تكامل جزئي معرف عند $n \in N$ بأنه

$$I_n = \int_a^{a+n} f$$

يلاحظ أن (I_n) هي متتابعة كوشي لأعداد حقيقية . إذا كانت $I = \lim (I_n)$ ، وكانت $\varepsilon > 0$ ، فإنه يوجد $N(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $n \geq N(\varepsilon)$ ، فإن $|I - I_n| < \varepsilon$. نفرض أن $M(\varepsilon) = \sup \{K(\varepsilon), a + N(\varepsilon)\} + 1$ وأن $c > M(\varepsilon)$. إذن يوجد عدد طبيعي $n \geq N(\varepsilon)$ بحيث أن $K(\varepsilon) \leq a + n < c$ لذلك يعطى التكامل الجزئي I_c كما يلي

$$I_c = \int_a^c f = \int_a^{a+n} f + \int_{a+n}^c f$$

ومنها ينتج أن $|I - I_c| < 2\varepsilon$ وهو المطلوب إثباته

في الحالة الهامة حيث $f(x) \geq 0$ لجميع $x \geq a$ تمدنا النتيجة الآتية باختبار مفيد .

٣٢ – ٦ نظرية . نفرض أن $f(x) \geq 0$ لكل $x \geq a$ وأن f قابلة للتكامل على $[a, c]$ لكل $c \geq a$. إذن التكامل اللانهائي للدالة f موجود إذا إذا فقط كانت الفئة $\{I_c : c \leq a\}$ محدودة . في هذه الحالة

$$\int_a^{+\infty} f = \sup \left\{ \int_a^c f : c \geq a \right\}$$

البرهان : الفرض بأن $f(x) \geq 0$ يدل على أن I_c دالة متزايدة بإطراد العدد c . لذلك ، يكون وجود $\lim I_c$ مكافئاً لمحدودية $\{I_c : c \geq a\}$

٣٢ – ٧ اختبار مقارنة . نفرض أن g و f قابلتان للتكامل على $[a, c]$ لكل $c \geq a$ وأن $|f(x)| \leq g(x)$ لكل $x \geq a$. إذا كان التكامل اللانهائي للدالة g موجوداً ، فإن التكامل اللانهائي للدالة f موجود وأن

$$\left| \int_a^{+\infty} f \right| \leq \int_a^{+\infty} g$$

البرهان . إذا كانت $a \leq c < b$ ، فينتج من مفترض (٣٠ – ٥) أن $|f|$ قابلة للتكامل على $[c, b]$ وأن

$$\left| \int_c^b f \right| \leq \int_c^b |f| \leq \int_c^b g$$

ينتج من معيار كوشى (٣٢ — ٥) أن التكاملين اللانهائيين للدالة f ، $|f|$ موجودان وبالإضافة إلى ذلك نجد أن

$$\left|\int_a^{+\infty} f\right| \le \int_a^{+\infty} |f| \le \int_a^{+\infty} g$$

وهو المطلوب إثبـاته

٣٢ — ٨ اختبار مقارنة للنهاية . نفرض أن g و f موجبان وقابلان للتكامل على $[a, c]$ لكل $c \ge a$ وأنه

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0 \qquad (32.12)$$

حينئذ يكون كل من أولا أحد من التكاملين اللانهائيين $\int_a^{+\infty} f, \int_a^{+\infty} g$ موجود .

البرهان . وحسب العلاقة (٣٢ — ١٢) نستنتج أنه توجد أعداد موجبة $A < B$ ، $K \ge a$ بحيث أن

$$Ag(x) \le f(x) \le Bg(x) \qquad \text{for } x \ge K$$

اختبار المقارنة (٣٢ — ٧) وهذه العلاقة يوضحان أن كلا من أولا أحد من التكاملات النهائية $\int_K^{+\infty} f, \int_K^{+\infty} g$ موجود . بما أن كلا من g و f قابلة للتكامل فى $[a, K]$ ، فينتج المطلوب .

وهو المطلوب إثباته

٣٢ — ٩ اختبار ديرشلت . نفرض أن f متصلة عند $x \ge a$ ونفرض أن التكاملات الجزئية

$$I_c = \int_a^c f, \qquad c \ge a$$

محدودة ، وأن φ تتناقص بإطراد إلى صفر عندما $x \to +\infty$. إذن التكامل اللانهائى $\int_a^{+\infty} f\varphi$ موجود .

البرهان . نفرض أن A حداً للفئة $\{|I_c| : c \ge a\}$. إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، فنفرض $K(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $x \ge K(\varepsilon)$ ، فإن $0 \le \varphi(x) \le \varepsilon/2A$. إذا كانت $b \ge c \ge K(\varepsilon)$ ، فينتج من تمرين (٣٠ — ن) أنه يوجد عدد ξ فى الفترة $[c, b]$ بحيث أن

$$\int_c^b f\varphi = \varphi(c)\int_c^{\xi} f$$

حسب التقدير

$$\left|\int_c^{\xi} f\right| = |I_{\xi} - I_c| \le 2A$$

ينتج أن

$$\left| \int_c^b f\varphi \right| < \varepsilon$$

عند $b \geq c$ وكان كلا منهما يزيد عن المقدار $K(\varepsilon)$. إذن يمكننا استخدام معيار كوشى (٣٢ - ٥) وهو المطلوب إثباته

٣٢ - ١٠ أمثلة . (أ) إذا كانت $f(x) = 1/(1 + x^2)$ و $g(x) = 1/x^2$ عند $x \geq a > 0$ فإن $0 \leq f(x) \leq g(x)$. بما أننا قد رأينا حالا فى مثال (٣٢ - ٤) (ب) أن التكامل اللانهائى $\int_1^{+\infty} (1/x^2)\, dx$ موجودة فينتج من اختبار المقارنة (٣٢ - ٧) أن التكامل اللانهائى $\int_1^{+\infty} (1/(1+x^2))\, dx$ موجود أيضاً (يمكن توضيح هذا مباشرة بملاحظة أن

$$\int_1^c \frac{1}{1+x^2}\, dx = \text{Arc tan } c - \text{Arc tan } 1$$

وأن $\text{Arc tan } c \to \pi/2$ عندما $c \to +\infty$)

(ب) إذا كانت $h(x) = e^{-x^2}$ و $g(x) = e^{-x}$ ، فإن $0 \leq h(x) \leq g(x)$ عند $x \geq 1$. لاحظنا فى مثال (٣٢ - ٤) (ج) أن التكامل اللانهائى $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$ موجود ، ومن ثم ينتج من اختبار المقارنة (٣٢-٧) أن التكامل اللانهائى $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ موجود أيضاً . هذه المرة ، يكون حساباً مباشراً للتكاملات الجزئية ليس ممكناً ، باستخدام دوال أساسية . لكن ، سيرى فيما بعد أن هذا التكامل اللانهائى يساوى $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

(ج) نفرض أن $p > 0$ ونعتبر وجود التكامل اللانهائى

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$$

إذا كانت $p > 1$ ، فإن الدالة المراد تكاملها يكون المقدار $1/x^p$ مسيطراً عليها ، وقد لاحظنا فى مثال (٣٢ - ٤) (ب) أنه تقارب . فى هذه الحالة بدل اختبار المقارنة على أن التكامل اللانهائى يتقارب . إذا كانت $0 < p \leq 1$ ؛ فإن هذا الاستدلال يفشل ، لكن ، إذا وضعنا $f(x) = \sin x$ ، $\varphi(x) = 1/x^p$ فإن اختبار ديرشلت (٣٢-٩) يوضح أن التكامل اللانهائى موجود .

(د) نفرض $f(x) = \sin x^2$ عند $x \geq 0$ ونعتبر تكامل فريسنل(*)

(*) أوجستن فريسنل (١٧٨٨ — ١٨٢٧) كان فرنسيا فيزيائيا رياضيا ، وساعد فى اعادة اثبات النظرية الموجبة للضوء التى قد قدمتقبل ذلك بواسطة هيجينز .

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx$$

من الواضح أن التكامل على $[0, 1]$ موجود ، لذلك سوف نختبر فقط التكامل على $\{x : x \geq 1\}$.
إذا أجرينا التعويض $t = x^2$ واستخدمنا نظرية تغير المتغير (٣٠ – ١٢) ، نحصل على

$$\int_1^c \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_1^{c^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt$$

المثال السابق يوضح أن التكامل الموجود فى الطرف الأيمن يتقارب عند $c \to +\infty$ ؛ ومن ينتج أن $\int_1^{+\infty} \sin x^2 \, dx$ موجود . (يجب ملاحظة أن الدالة المراد تكاملها لاتقترب من صفر عندما $x \to +\infty$)

(ﻫ) نفرض أن $\alpha \geq 1$ ونفرض أن $\Gamma(\alpha)$ معرفة بالتكامل

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha - 1} \, dx \tag{32.13}$$

لإثبات وجود هذا التكامل اللانهائى ، نعتبر الدالة $g(x) = 1/x^2$ عند $x \geq 1$. وحيث أن

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} x^{\alpha-1}}{x^{-2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{e^x} = 0$$

ينتج أنه إذا كانت $\varepsilon > 0$ فإنه توجد $K(\varepsilon)$ بحيث أن

$$0 < e^{-x} x^{\alpha-1} \leq \varepsilon x^{-2} \qquad \text{for } x \leq K(\varepsilon)$$

بما أن التكامل اللانهائى $\int_K^{+\infty} x^{-2} \, dx$ موجود ، فنستنتج أن التكامل (٣٢ – ١٣) يتقارب أيضاً . الدالة الهامة المعرفة عند $\alpha \geq 1$ بالقانون (٣٢ – ١٣) تسمى دالة جاما . سنبين حالا أنه إذا كانت $\alpha < 1$ ، فإن الدالة المراد تكاملها أى $e^{-x} x^{\alpha-1}$ تصبح غير محدودة فى جوار $x = 0$ لكن ، إذا كانت α تحقق $0 < \alpha < 1$ ، فقد رأينا فى مثال ٣٢ – ٢ (ج) أن الدالة $x^{\alpha-1}$ لها تكامل غير معين على الفترة $[0, 1]$. بما أن $0 < e^{-x} \leq 1$ لجميع $x \geq 0$ ، فقد أثبتنا حالا أن التكامل غير المعين

$$\int_{0+}^{1} e^{-x} x^{\alpha-1} \, dx$$

موجود عند $0 < \alpha < 1$. ومن ثم ، يمكننا مد التعريف لدالة جاما المعطاة لكل $\alpha > 0$ بتكامل على الصورة (٣٢ – ١٣) بشرط تفسيره كحاصل جمع

$$\int_{0+}^{a} e^{-x} x^{\alpha-1} \, dx + \int_a^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} \, dx$$

لتكامل غير معين وتكامل لانهائى

تقارب مطلق :

إذا كانت f قابلة لتكامل ريمان فى $[a, c]$ لكل $c \geq a$ ، فينتج من نظرية (٣٠ – ٤) (أ) أن $|f|$ ، القيمة المطلقة للدالة f ، تكون أيضاً قابلة لتكامل ريمان فى $[a, c]$ عند $c \geq a$.
ينتج من اختبار المقارنة (٣٢ – ٧) أنه إذا كانت التكامل اللانهائى

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx \tag{32.14}$$

موجود ، فإن التكامل اللانهائى

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \tag{32.15}$$

موجود أيضاً ويكون محدداً بالقيمة المطلقة (٣٢ – ١٤) .

٣٢ – ١١ تعريف . إذا كان التكامل اللانهائى (٣٢ – ١٤) موجود ، فنقول أن f قابلة للتكامل مطلقاً على $\{x : x \geq a\}$ ، أو أن التكامل اللانهائى (٣٢ – ١٥) متقارب تقارباً مطلقاً .

قد لاحظنا أنه إذا كانت f قابلة للتكامل مطلقاً على $\{ x : x \geq a \}$ ، فإن التكامل اللانهائى (٣٢ – ١٥) موجود . العكس ليس ، صحيحاً ، لكن ، كما يلاحظ باعتبار التكامل

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

أثبتنا التقارب لهذا التكامل فى مثال (٣٢ – ١٠) (ج) . ، لكن ، من السهل ملاحظة أنه فى كل فترة $[k\pi, (k+1)\pi], k \in \mathbf{N}$ توجد فترة جزئية طولها $b > 0$ التى فيها

$$|\sin x| \geq \tfrac{1}{2}$$

(فى الحقيقة ، يمكن أخذ $b = 2\pi/3$) . لذلك ، نجد أن

$$\int_\pi^{k\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_\pi^{2\pi} + \cdots + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \geq \frac{b}{2}\left\{ \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{3\pi} + \cdots + \frac{1}{k\pi} \right\}$$

وإذن ينتج أنظر (١٦ – ١١ (ج)) أن الدالة $f(x) = \sin x/x$ ليست قابلة للتكامل مطلقاً فوق $\{x : x \geq \pi\}$.

نلاحظ أن اختبار المقارنة (٣٢ – ٧) يثبت فى الحقيقة التقارب المطلق للتكامل اللانهائى للدالة f على الفترة $[a, +\infty)$.

تمـــارين :

٣٢ – (أ) بفرض أن f دالة حقيقية القيمة محدودة فى الفترة $J = [a, b]$ وأن f قابلة للتكامل فى $[c, b]$ لكل $c > a$. أثبت أن التكامل غير المعين للدالة f فى J موجود .

٣٢ – (ب) بفرض أن f قابلة للتكامل فى $[c, b]$ لكل $c > a$ وأن التكامل غير المعين $\int_{a+}^{b}|f|$ موجود . وضح أن التكامل غير المعين $\int_{a+}^{b} f$ موجود ، لكن العكس ربما لا يكون صحيحاً .

٣٢ – (ج) نفرض أن f و g قابلة للتكامل فى $[c, b]$ لجميع $c \in (a, b)$. إذا كانت $|f(x)| \leq g(x)$ عند $x \in J = [a, b]$ وإذا إذا كانت g لها تكامل غير معين فى J ، فإن الدالة f يكون لها تكامل غير معين .

٣٢ – (د) ناقش التقارب أو التباعد التكاملات غير المعينة الآتية :

(أ) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+x^2)^{1/2}}$ (ب) $\int_0^1 \frac{dx}{(x-x^2)^{1/2}}$

(ج) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1-x^3)}$ (د) $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$

(هـ) $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}\,dx$ (و) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1-x^3)^{1/2}}$

٣٢ – (هـ) حدد قيم q و p التى عندها تتقارب التكاملات الآتية :

(أ) $\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$ (ب) $\int_0^{\pi/2} x^p(\sin x)^q\,dx$

(ج) $\int_1^2 (\log x)^p\,dx$ (د) $\int_0^1 x^p(-\log x)^q\,dx$

٣٢ – (و) ناقش التقارب أو التباعد للتكاملات الآتية . أى التكاملات تتقارب مطلقاً :

(أ) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$ (ب) $\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^2+1}\,dx$

(ج) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x}\,dx$ (د) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$

(هـ) $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}\,dx$ (و) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\sin 2x}{x}\,dx$

٣٢ – (ز) لأى قيم q و p تتقارب التكاملات الآتية ؟ . لأى قيم يكون التقارب مطلقاً ؟

(أ) $\int_1^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q}\,dx$ (ب) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^q}\,dx$

(ج) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^p}{x}\,dx$ (د) $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^q}\,dx$

٣٢ – (ح) إذا كانت f قابلة للتكامل فى أى فترة $[0, c]$ عند $c > 0$ ، أثبت التكامل $\int_0^{+\infty} f$ اللانهائى موجود إذا وإذاً فقط كان التكامل اللانهائى $\int_5^{+\infty} f$ موجوداً .

٣٢ – (ط) اعط مثالا يكون فيه التكامل اللانهائى $\int_0^{+\infty} f$ موجوداً لكن فيه الدالة f ليست محدودة فى الفئة $\{x : x \geq 0\}$.

٣٢ – (ى) إذا كانت f إطرادية وكان التكامل اللانهائى $\int_0^{+\infty} f$ موجوداً ، فإن $xf(x) \to 0$ عند $x \to +\infty$.

الباب الثالث والثلاثون – تقارب منتظم وتكاملات لا نهائية :

من المهم فى تطبيقات كثيرة اعتبار تكاملات لانهائية فيها الدالة المراد تكاملها تعتمد على بارامتر . ولمعالجة هذه الحالة بسهولة نذكر أن ، المفهوم لتقارب منتظم للتكامل بالنسبة إلى البارامتر له أهمية أولى . سنبحث أولا الحالة التى فيها البارامتر ينتمى إلى فترة $J = [\alpha, \beta]$.

٣٣ – ١ تعريف . نفرض أن f دالة حقيقية القيمة ، ومعرفة عند (x, t) حيث $x \geq a$ ، $\alpha \leq t \leq \beta$. نفرض أنه لكل t فى الفترة $J = [\alpha, \beta]$ يكون التكامل اللانهائى

$$F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)\, dx \tag{33.1}$$

موجوداً . نقول أن هذا التقارب منتظم على J إذا كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد $N(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $c \geq N(\varepsilon)$ و $t \in J$ ، فإن

$$\left| F(t) - \int_a^c f(x, t)\, dx \right| < \varepsilon$$

التمييز بين التقارب العادى للتكاملات اللانهائية المعطاة فى (٣٣ – ١) والتقارب المنتظم هو أن $M(\varepsilon)$ يمكن اختياره بحيث لايتوقف على القيمة t فى J . سنترك للقارىء كتابة التعريف لتقارب منتظم للتكاملات اللانهائية عندما ينتمى البارامتر t إلى الفئة $\{t : t \geq \alpha\}$ أو إلى الفئة N .

من المفيد وجود بعض اختبارات للتقارب المنتظم للتكامل اللانهائى .

٣٣ – ٢ معيار كوشى . نفرض أنه لكل $t \in J$ ، يكون التكامل اللانهائى (٣٣ – ١) موجوداً . حينئذ التقارب يكون منتظماً فى J إذا وإذا فقط كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد $K(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $b \geq c \geq K(\varepsilon)$ و $t \in J$ ، فإن

$$\left| \int_c^b f(x, t)\, dx \right| < \varepsilon \tag{33.2}$$

نترك البرهان كتمرين .

٣٣ – ٣ اختبار M لڤيراشتراس . نفرض أن f قابلة لتكامل ريمان على الفترة : $[a, c]$ لكل $c \geq a$ وكل $t \in J$. نفرض أنه يوجد دالة موجبة M معرفة عند $x \geq a$ بحيث أن

$$|f(x, t)| \leq M(x) \qquad for \ x \geq a, \ t \in J$$

وبحيث أن التكامل اللانهائى $\int_a^{+\infty} M(x)\, dx$ موجود . حينئذ ، لكل $t \in J$ ، يكون التكامل فى (٣٣–١) تقاربياً مطلقاً ويكون التقارب منتظماً فى J .

البرهان . التقارب للتكامل

$$\int_a^{+\infty} |f(x, t)|\, dx \qquad for \ \ t \in J$$

نتيجة مباشرة لاختبار المقارنة والفروض ، لذلك ، يكون التكامل المنتج للدالة $F(t)$ تقاربياً مطلقاً عند $t \in J$. إذا استخدمنا معيار كوشى مع التقدير .

$$\left| \int_c^b f(x, t)\, dx \right| \leq \int_c^b |f(x, t)|\, dx \leq \int_c^b M(x) \cdot dx$$

يمكننا بسهولة إثبات التقارب المنتظم فى J . وهو المطلوب إثباته

اختبار M لڤيراشتراس مفيد عند ما يكون التقارب مطلقاً وأيضاً منتظماً ، لكن بحث الحالة التى فيها التقارب ليس تقاربياً مطلقاً منتظماً ليس دقيقاً بدرجة كافية . لهذا ، نرجع إلى اختيار مناظر لاختيار ديرشلت (٣٢ – ٩) .

٣٣ – ٤ اختبار ديرشلت . نفرض أن f متصلة فى (x, t) عند $x \geq a$ وعند t فى الفترة J ونفرض أنه يوجد مقدار ثابت A بحيث أن

$$\left| \int_a^c f(x, t)\, dx \right| \leq A \qquad for \ c \geq a, \quad t \in J$$

نفرض أنه لكل $t \in J$ ، تكون الدالة $\varphi(x, t)$ متناقصة بإطراد عند $x \geq a$ وتقترب إلى 0 عندما $x \to +\infty$ بانتظام حيث $t \in J$. إذن التكامل

$$F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) \varphi(x, t)\, dx$$

يتقارب بانتظام فى J .

البرهان . نفرض أن $\varepsilon > 0$ ونختار $K(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $x \geq K(\varepsilon)$ وأن $t \in J$ ، فإن $\varphi(x, t) < \varepsilon/2A$. إذا كانت $b \geq c \geq K(\varepsilon)$ ، فينتج من تمرين (٣٠ – ن) أنه يوجد لكل $t \in J$ ، عدد $\xi(t)$ فى الفترة $[c, b]$ بحيث أن

$$\int_c^b f(x,t)\varphi(x,t)\,dx = \varphi(c,t)\int_c^{\xi(t)} f(x,t)\,dx$$

لذلك ، إذا كان $b \geq c \geq K(\varepsilon)$ وكان $t \in J$ ، فنحصل على

$$\left|\int_c^b f(x,t)\varphi(x,t)\,dx\right| \leq \varphi(c,t)2A < \varepsilon$$

وإذن ينتج انتظام التقارب من معيار كوشى (٣٣ – ٢) . وهو المطلوب إثباته

٣٣ – ٥ أمثلة . (أ) إذا كانت f معطاة بالتعبير

$$f(x,t) = \frac{\cos tx}{1+x^2}, \qquad x \geq 0, \quad t \in \mathbf{R}$$

وإذا عرفنا $M(x) = (1+x^2)^{-1}$ ، فإن $|f(x,t)| \leq M(x)$ ، بما أن التكامل اللانهائى للدالة M فى الفترة $[0, +\infty)$ موجود ، فينتج من اختبار M لڤيراشتراس أن التكامل اللانهائى

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2}\,dx$$

يتقارب بانتظام عند $t \in \mathbf{R}$.

(ب) نفرض أن $f(x,t) = e^{-x}x^t$ عند $x \geq 0$ ، $t \geq 0$. يلاحظ أن التكامل

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^t\,dx$$

يتقارب بانتظام عند t فى الفترة $[0, \beta]$ لأى $\beta > 0$. لكن ، التقارب ليس منتظماً فى $\{t \in \mathbf{R} : t \geq 0\}$. (انظر تمرين ٣٣ – أ) .

(ج) إذا كانت $f(x,t) = e^{-tx} \sin x$ عند $x \geq 0$ و $t \geq \gamma > 0$ ، فإن

$$|f(x,t)| \leq e^{-tx} \leq e^{-\gamma x}$$

إذا وضعنا $M(x) = e^{-\gamma x}$ ، فإن اختبار M لڤيراشتراس يثبت أن التكامل

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x\,dx$$

تتقارب بانتظام عند $t \geq \gamma > 0$ وحساب بسيط يثبت أنه يتقارب إلى $(1+t^2)^{-1}$. (لاحظ أنه إذا كانت $t = 0$ ، فإن التكامل لايتقارب أبداً) .

(د) اعتبر التكامل اللانهائى

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx \qquad for\ t \geq 0$$

حيث نفسر الدالة المراد تكاملها بأنها تساوى واحـــداً صحيحاً عند $x = 0$. بما أن الدالة المراد تكاملها يسيطر عليها،فيكفى إثبات أن التكامل على $x \leq \varepsilon$ يتقارب بانتظام عند $t \geq 0$.لايستخدم اختبار M لڤيراشتراس لهذه الدالة المراد تكاملها . لكن إذا أخذنا $f(x, t) = \sin x$ و $\varphi(x, t) = e^{-tx}/x$ ، فإن فروض اختبار ديرشلت تكون متحققة .

تكاملات لا نهائية تتوقف على بارامتر :

نفرض أن f الدالة متصلة عند (x, t) ومعرفة عند $x \geq a$ وعند t فى الفترة $J = [\alpha, \beta]$. وبالإضافة إلى ذلك، نفرض أن التكامل اللانهائى

$$F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)\, dx \tag{33.1}$$

موجود لكل $t \in J$. سنوضح الآن أنه إذا كان هذا التقارب منتظماً ، فإن F تكون متصلة فى J ويمكن حساب تكاملها بتبادل ترتيب التكامل . سنثبت نتيجة مماثلة للمشتقة .

٣٣ – ٦ نظرية . نفرض أن f متصلة فى (x, t) حيث $x \geq a$ وأن t تقع فى الفترة $J = [\alpha, \beta]$ وأن التقارب فى (٣٣ – ١) يكون منتظماً فى J . حينئذ F متصلة فى J .

البرهان . إذا كانت $n \in N$ ، نفرض أن F_n معرفة فى J بأنها

$$F_n(t) = \int_a^{a+n} f(x, t)\, dx$$

ينتج من نظرية (٣١ – ٦) أن F_n متصلة فى J . بما أن المتتابعة (F_n) تتقارب بانتظام إلى F فى J ، ينتج من نظرية (٢٤ – ١) أن F متصلة فى J . وهو المطلوب إثباته

٣٣ – ٧ نظرية . تحت الفرض للنظرية السابقة ، يكون

$$\int_\alpha^\beta F(t)\, dt = \int_a^{+\infty} \left\{ \int_\alpha^\beta f(x, t)\, dt \right\} dx$$

التى يمكن كتابتها فى الصورة

$$\int_\alpha^\beta \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t)\, dx \right\} dt = \int_a^{+\infty} \left\{ \int_\alpha^\beta f(x, t)\, dt \right\} dx \tag{33.3}$$

البرهان . إذا كانت F_n معرفة كما فى البرهان السابق ، فينتج من نظرية (٣١ – ٩) أن

$$\int_\alpha^\beta F_n(t)\, dt = \int_a^{a+n} \left\{ \int_\alpha^\beta f(x, t)\, dt \right\} dx$$

حيث (F_n) تتقارب بانتظام إلى F فى J ، حينئذ نظرية (٣١ – ٢) تثبت أن

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(t)\, dt = \lim_{n} \int_{\alpha}^{\beta} F_n(t)\, dt$$

بربط العلاقتين الأخيرتين ، نحصل على (٣٢ – ٣) وهو المطلوب إثباته

٣٣ – ٨ نظرية . نفرض أن f ومشتقاتها الجزئية f_t متصلة فى (x, t) عند $x \geq a$ ، t فى الفترة $J = [\alpha, \beta]$. نفرض أن (٣٣ – ١) موجودة لكل $t \in J$ وأن

$$G(t) = \int_{a}^{+\infty} f_t(x, t)\, dx$$

يتقارب بانتظام فى J . إذن F تكون قابلة للتفاضل فى J وأن $F' = G$. بالرموز : يكون

$$\frac{d}{dt} \int_{a}^{+\infty} f(x, t)\, dx = \int_{a}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, dx$$

البرهان . إذا كانت F_n معرفة عند $t \in J$ بأنها

$$F_n(t) = \int_{a}^{a+n} f(x, t)\, dx$$

فينتج من نظرية (٣١ – ٧) أن F_n قابلة للتفاضل وأن

$$F_n'(t) = \int_{a}^{a+n} f_t(x, t)\, dx$$

من الفرض نجد أن المتتابعة (F_n) تتقارب فى J إلى F وأن المتتابعة (F_n') تتقارب بانتظام فى J إلى G . ينتج من نظرية (٢٨ – ٥) أن F قابلة للتفاضل فى J وأن $F' = G$.

وهو المطلوب إثباته

٣٣ – ٩ أمثلة . (أ) نلاحظ أنه إذا كانت $t > 0$ ، فإن

$$\frac{1}{t} = \int_{0}^{+\infty} e^{-tx}\, dx$$

وأن التقارب يكون منتظماً عند $t \geq t_0 > 0$. إذا كاملنا كلا الطرفين لهذه العلاقة بالنسبة إلى t على فترة $[\alpha, \beta]$ حيث $0 < \alpha < \beta$ واستعملنا نظرية (٣٣ – ٧) ، نحصل على القانون

$$\log(\beta/\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} e^{-tx}\, dt \right\} dx$$
$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\, dx$$

(لاحظ أن الدالة المرّاد تكاملها الأخيرة يمكن تعريفها بأن متصلة عند $x = 0$) .

(ب) بدلا من التكامل بالنسبة إلى t ، نفاضل فنحصل رسمياً على .

$$\frac{1}{t^2}=\int_0^{+\infty} xe^{-tx}\,dx$$

بما أن هذا التكامل الأخير يتقارب بانتظام بالنسبة إلى t ، بشرط $t \geq t_0 > 0$ ، فإن القانون يظل صحيحاً عند $t > 0$. بالاستنتاج نحصل على

$$\frac{n!}{t^{n+1}}=\int_0^{+\infty} x^n e^{-tx}\,dx \quad \text{for} \quad t>0$$

بالإشارة إلى تعريف الدالة جاما ، المعطاة في مثال (٣٢ — ١٠) (هـ) ، نلاحظ أن $\Gamma(n+1)=n!$.

(ج) إذا كانت $\alpha > 1$ عدداً حقيقياً وكانت $x > 0$ ، فإن $x^{\alpha-1}=e^{(\alpha-1)\log x}$ ومن ثم تكون $f(\alpha)=x^{\alpha-1}$ دالة متصلة عند (α, x) . وبالإضافة إلى ذلك، يلاحظ أنه يوجد جوار للمقدار α التي يكون فيه التكامل

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

تقاربياً بانتظام . ينتج من نظرية (٣٣ — ٦) أن الدالة جاما تكون متصلة على الأقل إذا كانت $\alpha > 1$. (إذا كانت $0 < \alpha \leq 1$ ، فإن نفس الاستنتاج يمكن إجراؤه ، لكن حقيقة كون التكامل غير معين عند $x = 0$ يجب أن يؤخذ في الاعتبار) .

(د) نفرض أن $t \geq 0$ ، $u \geq 0$ ونفرض أن F معرفة بأنها

$$F(u)=\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin ux}{x}\,dx$$

إذا كانت $t > 0$ ، فإن هذا التكامل يتقارب بانتظام عند $u \geq 0$ وإذن يكون كذلك التكامل

$$F'(u)=\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos ux\,dx$$

وبالإضافة إلى ذلك ، يثبت التكامل بالتجزىء أن

$$\int_0^{A} e^{-tx}\cos ux\,dx=\left[\frac{e^{-tx}[u\sin ux-t\cos ux]}{t^2+u^2}\right]_{x=0}^{x=A}$$

إذا فرضنا $A \rightarrow +\infty$ ، نحصل على القانون

$$F'(u)=\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos ux\,dx=\frac{t}{t^2+u^2}, \qquad u\geq 0$$

لذلك ، يوجد مقدار ثابت C بحيث أن

$$F(u)=\text{Arc}\tan(u/t)+C \quad \text{for} \quad u\geq 0$$

لحساب الثابت C ، نستخدم الحقيقة التى تقول أن $F(0) = 0$ وأن $\text{Arc tan}(0) = 0$. ونستنتج أن $C = 0$. ومن ثم ، إذا كانت $t > 0$ و $u \geq 0$ ، فإن

$$\text{Arc tan}(u/t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin ux}{x}\, dx.$$

(هـ) الآن نجعل $u > 0$ ثابتة فى القانون الأخير ونلاحظ ، كما فى مثال (٣٣-٥) (د) أن التكامل يتقارب بانتظام عند $t \geq 0$ أى أن النهاية متصلة عند $t \geq 0$. إذا فرضنا أن $t \to 0+$ نحصل على القانون الهام

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ux}{x}\, dx, \qquad u > 0. \tag{33.4}$$

تكاملات لا نهائية لمتتابعات :

نفرض أن (f_n) متتابعة لدوال حقيقية القيمة التى تكون معرفة عند $x \geq a$. سنفرض أن التكاملات اللانهائية $\int_a^{+\infty} f_n$ موجودة جميعها وأن $\text{limit } f(x) = \lim (f_n(x))$ موجودة لجميع $x \geq a$. نرغب فى أن نتمكن من استنتاج أن التكامل اللانهائى للدالة f موجود وأن

$$\int_a^{+\infty} f = \lim \int_a^{+\infty} f_n. \tag{33.5}$$

برهنا فى نظرية (٣١ - ٢) على أنه إذا كانت (f_n) متتابعة لدوال قابلة لتكامل ريمان تتقارب بانتظام فى فترة $[a, c]$ إلى دالة f ، فإن f تكون قابلة لتكامل ريمان وأن التكامل للدالة f هو النهاية لتكاملات الدالة f_n . النتيجة المناظرة ليست بالضرورة صحيحة فى حالة التكاملات لانهائية ، سنلاحظ فى تمرين (٣٣ - ى) أن الدالة النهائية لاتحتاج إلى تكامل لانهائى لها . وبالإضافة إلى ذلك ربما يفشل التساوى حتى إذا كان التكامل اللانهائى موجوداً وكان لكل من الطرفين فى (٣٣-٥) معنى ، (تمرين ٣٣ - ك) . بالمثل ، الامتداد الواضح لنظرية التقارب المحدودة (٣١ - ٣) ربما تفشل لتكاملات لانهائية . لكن ، توجد نتيجتان مفيدتان هامتان وتعطيان شروطاً تظل تحتها معادلة (٣٣ - ٥) صحيحة . سنستفيد لبرهنتهما من نظرية التقارب المحدودة (٣١ - ٣) . النتيجة الأولى هى حالة خاصة من النظرية المشهورة التى ترجع إلى ليبيج (حيث أننا نبحث حالة تكاملات ريمان اللانهائية ، فإننا نحتاج لإضافة الفرض بأن النهاية قابلة للتكامل فى الحالة الأكثر عموماً لنظرية ليبيج للتكامل ، يكون هذا الفرض الإضافى غير مطلوب) .

٣٣ - ١٠ **نظرية تقارب مسيطرة.** نفرض أن (f_n) متتابعة محـــدودة لدوال حقيقية القيمة ، وأن $f(x) = \lim (f_n(x))$ ، لكل $x \geq a$ وأن f_n و f ، $n \in N$ قابلة لتكامل ريمان فى $[a, c]$ لكل $c > a$ ونفرض أنه توجد دالة M لها تكامل على $x \geq a$ وأن

$$|f_n(x)| \leq M(x) \quad \text{عند} \quad n \in N, \quad x \geq a,$$

حينئذ f لها تكامل عند $x \geq a$ وأن

$$\int_a^{+\infty} f = \lim \int_a^{+\infty} f_n \qquad (33.5)$$

البرهان . ينتج من اختبار المقارنة (٣٢ – ٧) أن التكاملات اللانهائية

$$\int_a^{+\infty} f; \qquad \int_a^{+\infty} f_n, \qquad n \in N$$

موجودة . إذا كانت $\varepsilon > 0$ فنفرض K تكون مختارة بحيث أن $\int_K^{+\infty} M < \varepsilon$ التي منها ينتج أن

$$\left| \int_K^{+\infty} f \right| < \varepsilon \qquad \text{و} \qquad \left| \int_K^{+\infty} f_n \right| < \varepsilon, \qquad n \in N$$

بما أن $f(x) = \lim (f_n(x))$ لكل $x \in [a, K]$ فينتج من نظرية التقارب المحدودة (٣١–٣) أن $\int_a^K f = \lim_n \int_a^K f_n$. وإذن نجد أن

$$\left| \int_a^{+\infty} f - \int_a^{+\infty} f_n \right| \leq \left| \int_a^K f - \int_a^K f_n \right| + 2\varepsilon$$

الذى يكون أقل من 3ε عندما n تكون كبيرة كبرا كافياً وهو المطلوب إثباته

٣١ – ١١ نظرية تقارب إطرادية . نفرض أن (f_n) متتابعة محدودة لدوال موجبة فى الفئة $\{x : a \geq a\}$ المتزايدة بإطراد بمعنى أن $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ عند $n \in N$ وأن $x \geq a$ وبحيث أن f وكل f_n لها تكامل على $[a$ و $c]$ لكل $c > a$. إذن الدالة النهائية f لها تكامل على الفئة $\{x : x \geq a\}$ إذا وإذاً فقط كانت الفئة $\{\int_a^{+\infty} f_n : n \in N\}$ محدودة . فى هذه الحالة

$$\int_a^{+\infty} f = \sup_n \left\{ \int_a^{+\infty} f_n \right\} = \lim_n \int_a^{+\infty} f_n$$

البرهان . بما أن المتتابعة (f_n) متزايدة بإطراد ، فنستنتج أن المتتابعة $(\int_a^{+\infty} f_n : n \in N)$ هى أيضاً متزايدة بإطراد . إذا كان للدالة f تكامل على الفئة $\{x : x \geq a\}$ ، فإن نظرية التقارب السيطرة (حيث $M = f$) تثبت أن

$$\int_a^{+\infty} f = \lim \int_a^{+\infty} f_n$$

وبالعكس ، نفرض أن الفئة لتكاملات لانهائية محدودة ونفرض أن S هى الأعلى لهذه الفئة . إذا كانت $c > a$ ، فإن نظرية التقارب الإطرادية ٣١ – ٤ تثبت أن

$$\int_a^c f = \lim_n \int_a^c f_n = \sup_n \left\{ \int_a^c f_n \right\}$$

بما أن $f_n \geq 0$ ، فينتج أن $\int_a^c f_n \leq \int_a^{+\infty} f_n \leq S$ ومن ثم $\int_a^c f \leq S$ حسب نظرية (٣٢ – ٦) يكون التكامل اللانهائى للدالة f موجوداً وأن

$$\int_a^{+\infty} f = \sup_c \int_a^c f = \sup_c \left\{ \sup_n \int_a^c f_n \right\}$$
$$= \sup_n \left\{ \sup_c \int_a^c f_n \right\} = \sup_n \int_a^{+\infty} f_n.$$

وهو المطلوب إثباته

تكاملات لا نهائية مكررة :

حصلنا فى نظرية (٣٣ - ٧) على نتيجة بررت تبادل ترتيب التكامل على المنطقة $\{(x, t) : a \le x, \alpha \le t \le \beta\}$. من المرغوب فيه أيضاً إمكانية تبادل ترتيب التكامل لتكامل لانهائى مكرر . أى أن ، نرغب فى إثبات المتساوية

$$\int_\alpha^{+\infty} \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t)\, dx \right\} dt = \int_a^{+\infty} \left\{ \int_\alpha^{+\infty} f(x, t)\, dt \right\} dx, \tag{33.6}$$

تحت فروض مناسبة . كان نتيجة ذلك أن شرطاً بسيطاً يمكن إعطاؤه بحيث يثبت أيضاً التقارب المطلق للتكاملات . لكن ، لكى نبحث التكاملات اللانهائية المكررة التى لاتكون بالضرورة تقاربية مطلقة ، نحتاج إلى مجموعة أكبر تعقيداً من الشروط .

٣٣ - ١٢ نظرية . نفرض أن f دالة موجبة معرفة عند (x, t) وتحقق $t \ge \alpha$, $x \ge a$. نفرض أن

$$\int_a^b \left\{ \int_\alpha^{+\infty} f(x, t)\, dt \right\} dx = \int_\alpha^{+\infty} \left\{ \int_a^b f(x, t)\, dx \right\} dt \tag{33.7}$$

لكل $b \ge a$ وأن

$$\int_\alpha^\beta \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t)\, dx \right\} dt = \int_a^{+\infty} \left\{ \int_\alpha^\beta f(x, t)\, dt \right\} dx \tag{33.7'}$$

لكل $\beta \ge \alpha$. إذن ، إذا كانت أحد التكاملين المكررين فى معادلة (٣٣ - ٦) موجوداً ، فإن الآخر يكون موجوداً أيضاً ويكونان متساويين

البرهان . نفرض أن التكامل الموجود فى الطرف الأيسر من (٣٣ - ٦) موجود . بما أن f موجبة ، يكون

$$\int_a^b f(x, t)\, dx \le \int_a^{+\infty} f(x, t)\, dx$$

لكل $b \ge a$ و $t \ge \alpha$. لذلك ، ينتج من اختبار المقارنة (٣٢ - ٧) ، أن

$$\int_\alpha^{+\infty} \left\{ \int_a^b f(x, t)\, dx \right\} dt \le \int_\alpha^{+\infty} \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t)\, dx \right\} dt$$

باستخدام علاقة (٣٣ — ٧) ، نستنتج أن

$$\int_a^b \left\{ \int_\alpha^{+\infty} f(x, t)\, dt \right\} dx \le \int_\alpha^{+\infty} \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t)\, dx \right\} dt$$

لكل $b \ge a$. وبتطبيق نظرية (٣٢ — ٦) نجد أنه يمكننا أخذ النهاية عندما $b \to +\infty$ ، وإذن التكامل المكرر الآخر موجود أيضاً ويكون

$$\int_a^{+\infty} \left\{ \int_\alpha^{+\infty} f(x, t)\, dt \right\} dx \le \int_\alpha^{+\infty} \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t)\, dx \right\} dt$$

إذا كررنا هذه المناقشة واستخدمنا معادلة (٣٣ — ٧') ، نحصل على المتباينة العكسية لذلك ، يجب أن تظل المتباينة صحيحة وهو المطلوب إثباته

٣٣ — ١٣ نظرية . نفرض أن — متصلة عند $x \ge a, t \ge \alpha$ وأنه يوجد دالتان موجبتان N و M بحيث أن التكاملين اللانهائيين $\int_\alpha^{+\infty} N$ و $\int_a^{+\infty} M$ موجودان . إذا ظلت المتباينة

$$|f(x, t)| \le M(x)N(t), \qquad x \ge a, \quad t \ge \alpha \tag{33.8}$$

صحيحة ، فإن التكاملين المكررين فى (٣٣ — ٦) موجوادن ويكونان متساويين .

البرهان . نفرض أن g معرفة عند $x \ge a, t \ge \alpha$ بأنها $g(x,t)=f(x,t)+M(x)\,N(t)$ بحيث أن

$$0 \le g(x, t) \le 2M(x)N(t)$$

بما أن N محدودة فى كل فترة $[\alpha, \beta]$ ، ينتج من المتباينة (٣٣ — ٨) واختبار M لڤير اشتراس (٣٣ — ٣) أن التكامل

$$\int_a^{+\infty} g(x, t)\, dx$$

موجود بانتظام عند $t \in [\alpha, \beta]$. باستخدام نظرية (٣٣—٧) ، نلاحظ أن معادلة (٣٣—٧') تظل صحيحة (حيث f حل محلها g) لكل $\beta \ge \alpha$. أيضاً اختبار المقارنة (٣٢ — ٧) يثبت أن التكاملين المكررين فى (٣٣—٦) موجودان (بعد كتابة g بدلا من f). نستنتج من نظرية ٣٣—١٢ أن هذين التكاملين المكررين للدالة g متساويان . لكن هذا يثبت أن التكاملين المكررين للدالة f موجودان ومتساويان . وهو المطلوب إثباته

النتائج السابقة تبحث الحالة التى يكون فيها التكاملان المكرران تقاربيان تقارباً مطلقاً . الآن تقدم نتيجة تبحث حالة تقارب غير مطلق .

٣٣ — ١٤ نظرية . نفرض أن الدالة f حقيقية القيمة ومتصلة فى الفترة (x, t) عند $x \ge a$ ، $t \ge \alpha$ وأن التكاملين اللانهائيين

(33.9) $$\int_a^{+\infty} f(x, t)\, dx, \qquad \int_a^{+\infty} f(x, t)\, dt$$

تتقارب بانتظام عند $x \geq a$ ، $t \geq \alpha$ ، على الترتيب . وبالإضافة إلى ذلك ، نفرض أن F معرفة عند $x \geq a, \beta \geq \alpha,$ بأنها .

$$F(x, \beta) = \int_\alpha^\beta f(x, t)\, dt$$

ونفرض أن التكامل اللانهائى

(33.10) $$\int_a^{+\infty} F(x, \beta)\, dx$$

يتقارب بانتظام عند $\beta \geq \alpha$. حينئذ كلا التكاملين اللانهائيين المكررين موجودان ومتساويان .

البرهان . بما أن التكامل اللانهائى (٣٣ – ١٠) يكون تقاربياً بانتظام عند $\beta \geq \alpha$ ، إذا كانت $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد $A_\varepsilon \geq a$ بحيث أنه إذا كانت $A \geq A_\varepsilon$ فإن

(33.11) $$\left| \int_a^A F(x, \beta)\, dx - \int_a^{+\infty} F(x, \beta)\, dx \right| < \varepsilon$$

لكل $\beta \geq \alpha$ نلاحظ أيضاً أن

$$\int_a^A F(x, \beta)\, dx = \int_a^A \left\{ \int_\alpha^\beta f(x, t)\, dt \right\} dx$$
$$= \int_\alpha^\beta \left\{ \int_a^A f(x, t)\, dx \right\} dt.$$

حسب نظرية (٣٣ – ٧) والتقارب المنتظم للتكامل الثانى فى (٣٣ – ٩) ، نستنتج أن

$$\lim_{\beta \to +\infty} \int_a^A F(x, \beta)\, dx = \int_a^A \left\{ \int_\alpha^{+\infty} f(x, t)\, dt \right\} dx$$

ومن ثم يوجد عدد $B \geq \alpha$ بحيث أنه إذا كانت $\beta_2 \geq \beta_1 \geq B$ ، فإن

(33.12) $$\left| \int_a^A F(x, \beta_2)\, dx - \int_a^A F(x, \beta_1)\, dx \right| < \varepsilon$$

بربط (٣٣ – ١١) ، (٣٣ – ١٢) ، نلاحظ أنه إذا كانت $\beta_2 \geq \beta_1 \geq B$ ، فإن

$$\left| \int_a^{+\infty} F(x, \beta_2)\, dx - \int_a^{+\infty} F(x, \beta_1)\, dx \right| < 3\varepsilon$$

ومنها ينتج أن نهاية $\int_a^{+\infty} F(x, \beta)\, dx$ موجودة عندما $\beta \to +\infty$ بعد استخدام نظرية (٣٣–٧) للتقارب المنتظم للتكامل الأول فى (٣٣ – ٩) ، نجد أن

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{+\infty} F(x,\beta)\,dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{+\infty}\left\{\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt\right\}dx$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty}\int_\alpha^{\beta}\left\{\int_a^{+\infty} f(x,t)\,dx\right\}dt$$

$$= \int_\alpha^{+\infty}\left\{\int_a^{+\infty} f(x,t)\,dx\right\}dt.$$

بما أن كلا الحدين الموجودين فى الطرف الأيسر (٣٣ – ١١) لها نهايتان عندما $\beta \to +\infty$ فنستنتج بالوصول إلى النهاية ، أن

$$\left|\int_a^{A}\left\{\int_\alpha^{+\infty} f(x,t)\,dt\right\}dx - \int_\alpha^{+\infty}\left\{\int_a^{+\infty} f(x,t)\,dx\right\}dt\right| \le \varepsilon$$

إذا فرضنا أن $A \to +\infty$ ، نحصل على تساوى التكاملات غير المعينة المكررة .

وهو المطلوب إثباته

النظريات المعطاة أعلى والمسوغة لتبديل ترتيب التكامل مفيدة غالباً ، لكن مازالت تترك مجالا فسيحاً للبراعة . وتستعمل مراراً لارتباطها بنظريات التقارب الإطرادية أو المسيطرة (٣٣ – ١٠) . (٣٣ – ١١) .

٣٣ – ١٥ أمثلة . (أ) إذا كانت $f(x,t) = e^{-(x+t)}$ ، فإنه يمكننا أخذ $N(t) = e^{-t}$ ، $M(x) = e^{-x}$ ونستخدم نظرية (٣٣ – ١٣) لنستنتج أن

$$\int_0^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-(x+t)}\sin xt\,dx\right\}dt = \int_0^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-(x+t)}\sin xt\,dt\right\}dx$$

(ب) إذا كانت $g(x,t) = e^{-xt}$ عند $x \ge 0$ ، $t \ge 0$ ، فتوجد متسقة عند اعتبار الخطين $t = 0$ و $x = 0$. لكن ، إذا كانت $a > 0, \alpha > 0$ و $x \ge a$ و $t \ge \alpha$ ، فنلاحظ أن

$$e^{-xt} = e^{-xt/2}e^{-xt/2} \le e^{-\alpha x/2}e^{-at/2}$$

إذا وضعنا $M(x) = e^{-\alpha x/2}$ و $N(t) = e^{-at/2}$ ، فإن نظرية (٣٣ – ١٣) تثبت أن

$$\int_\alpha^{+\infty}\left\{\int_a^{+\infty} e^{-xt}\,dx\right\}dt = \int_a^{+\infty}\left\{\int_\alpha^{+\infty} e^{-xt}\,dt\right\}dx$$

(ج) اعتبر الدالة $f(x,y) = xe^{-x^2(1+y^2)}$ عند $y \ge 0$ و $x \ge a > 0$. إذا وضعنا $N(y) = e^{-a^2y^2}$ و $M(x) = xe^{-x^2}$ فيمكننا تبديل ترتيب التكامل على $a \le x$ ، $0 \le y$. بما أن

$$\int_a^{+\infty} xe^{-(1+y^2)x^2}\,dx = \frac{-e^{-(1+y^2)x^2}}{2(1+y^2)}\Bigg|_{x=a}^{x\to+\infty} = \frac{e^{-a^2(1+y^2)}}{2(1+y^2)}$$

فينتج أن

$$\tfrac{1}{2}e^{-a^2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a^2y^2}}{1+y^2}\,dy=\int_a^{+\infty}e^{-x^2}\left\{\int_0^{+\infty}xe^{-x^2y^2}\,dy\right\}dx$$

إذا غيرنا المتغير $t = xy$ ، نجد أن

$$\int_0^{+\infty}xe^{-x^2y^2}\,dy=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=I$$

وإذن ينتج أن

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a^2y^2}}{1+y^2}\,dy=2e^{a^2}I\int_a^{+\infty}e^{-x^2}\,dx$$

إذا جعلنا $a \to 0$ فنجد أن التعبير الموجود فى الطرف الأيمن يقترب إلى $2I^2$. تلاحظ فى الطرف الأيسر أن الدالة المراد تكاملها تكون مسيطرة بالدالة القابلة للتكامل $(1+y^2)^{-1}$. باستخدام نظرية التقارب المسيطرة ، نحصل على

$$\tfrac{1}{2}\pi=\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}=\lim_{a\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a^2y^2}}{1+y^2}\,dy=2I^2$$

لذلك نجد أن $I^2 = \pi/4$ ، التى تنتج اشتقاقاً للقانون

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

(د) إذا كاملنا بالتجزىء مرتين ، نحصل على القانون

$$\int_a^{+\infty}e^{-xy}\sin x\,dx=\frac{e^{-ay}}{1+y^2}\cos a+\frac{ye^{-ay}}{1+y^2}\sin a \tag{33.13}$$

إذا كانت $y \geq \alpha > 0$ و $x \geq a > 0$ فإنه يمكننا المناقشة كما فى مثال (ب) لإثبات أن

$$\int_\alpha^{+\infty}\frac{e^{-ay}\cos a}{1+y^2}\,dy+\int_\alpha^{+\infty}\frac{ye^{-ay}\sin a}{1+y^2}\,dy$$
$$=\int_a^{+\infty}\left\{\int_\alpha^{+\infty}e^{-xy}\sin x\,dy\right\}dx=\int_a^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}\,dx$$

نريد إيجاد النهاية عندما $a \to 0$. وهذا يمكن إجراؤه بوضوح فى التكامل السابق ونحصل على $\int_0^{+\infty}(e^{-\alpha x}\sin x/x)\,dx$. ومن حقيقة كون $e^{-ay}\cos a$ مسيطرة بالواحد الصحيح عند $y \geq 0$ ، وكون التكامل $\int_\alpha^{+\infty}(1/(1+y^2))\,dy$ موجودا ، فيمكننا استخدام نظرية التقارب المسيطرة (٣٣ — ١٠) لنستنتج أن

$$\lim_{a\to 0}\int_\alpha^{+\infty}\frac{e^{-ay}\cos a}{1+y^2}\,dy=\int_\alpha^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}$$

التكامل الثانى أكثر مشقة قليلا لأن نفس النمط من التقدير يوضح أن

$$\left|\frac{ye^{-ay}\sin a}{1+y^2}\right| \leq \frac{y}{1+y^2}$$

والدالة المسيطرة ليست قابلة للتكامل ، ومن ثم يجب علينا عمل أفضل من هذا . بما أن $u \leq e^u$ ، $|\sin u| \leq u$ عند $u \geq 0$ ، فنستنتج أن $|e^{-ay}\sin a| \leq 1/y$ ، ومنها نحصل على تقدير أدق

$$\left|\frac{ye^{-ay}\sin a}{1+y^2}\right| \leq \frac{1}{1+y^2}$$

يمكننا الآن استخدام نظرية التقارب المسيطرة لأخذ النهاية تحت علامة التكامل ، لنحصل على

$$\lim_{a\to 0}\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{ye^{-ay}\sin a}{1+y^2}\,dy = 0$$

قد وصلنا إلى القانون

$$\tfrac{1}{2}\pi - \text{Arc}\tan\alpha = \int_{\alpha}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2} = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}\,dx$$

نريد الآن أن نأخذ النهاية عندما $\alpha \to 0$. لايمكننا هذه المرة استخدام نظرية التقارب المسيطرة لأن $\int_0^{+\infty} x^{-1}\sin x\,dx$ ليس مطلق التقارب . مع أن التقارب $e^{-\alpha x}$ إلى الواحد الصحيح عندما $\alpha \to 0$ إطرادى ، فإن حقيقة كون $\sin x$ تأخذ كلتا الإشارتين تثبت أن التقارب للدالة المراد تكاملها الداخلية ليست إطرادياً . لحسن الحظ ، قد رأينا سابقاً فى مثال (٣٣ – ٥) (د) أن التقارب للتكامل يكون منتظماً عند $\alpha \geq 0$. حسب نظرية (٣٣ – ٦) ، للمرة الثانية يكون التكامل متصلا عند $\alpha \geq 0$ ومن ثم نحصل على القانون الآتى

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi \qquad (33.14)$$

تمرينـــات :

٣٣ – (أ) أثبت أن التكامل $\int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\,dx$ يتقارب بانتظام عند t فى فترة $[0, \beta]$ لكن سوف لاتتقارب بانتظام عند $t \geq 0$.

٣٣ – (ب) أثبت أن التكامل

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x}\,dx$$

تتقارب بانتظام عند $t \geq 1$ ، لكن لا يتقارب تقارباً مطلقاً عند أى من هذه القيم المقدار t .

٣٣ – (ج) لأى قيم للمقدار t تتقارب التكاملات اللانهائية الآتية بانتظام .

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+t} \quad \text{(ب)} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+t^2} \quad \text{(أ)}$$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} \cos tx\, dx \quad \text{(د)} \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos tx\, dx \quad \text{(ج)}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2} e^{-x^2-t^2/x^2}\, dx \quad \text{(و)} \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x^2-t^2/x^2}\, dx \quad \text{(ه)}$$

٣٣ (د) استخدم قانون (٣٣ – ١٤) لإثبات أن $\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}$

٣٣ – (ه) استخدم قانون (٣٣–١٤) لإثبات أن $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/t}$ عند $t > 0$.
حقق التفاضل وأثبت أن

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}$$

٣٣ (و) أثبت الوجود للتكامل $\int_0^{+\infty} (1-e^{-x^2})x^{-2}\, dx$ (لاحظ أن الدالة المراد تكاملها يمكن تعريفها بأنها متصلة عند $x = 0$) . أحسب هذا التكامل

(أ) بإبدال e^{-x^2} بالمقدار e^{-tx^2} ثم التفاضل بالنسبة إلى t ،

(ب) بتكامل $\int_1^{+\infty} e^{-tx^2}\, dx$ بالنسبة إلى t . حقق كل الخطوات

٣٣ – (ز) بفرض أن F معطاة عند $t \in R$ بأنها

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos tx\, dx$$

فاضل بالنسبة إلى t ثم كامل بالتجزيء لتثبت أن $F'(t) = (-1/2)tF(t)$. حينئذ أوجد $F(t)$ بعد تغيير متغير ، أثبت القانون

$$\int_0^{+\infty} e^{-cx^2} \cos tx\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/c}\, e^{-t^2/4c}, \qquad c>0$$

٣٣ (ح) بفرض أن G معرفة عند $t > 0$ بأنها

$$G(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2-t^2/x^2}\, dx$$

فاضل ثم غير متغيرات لتوضيح أن $G'(t) = -2G(t)$. حينئذ أوجد $G(t)$ وأثبت القانون

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2-t^2/x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2|t|}$$

٣٣ (ط) استخدم (٣٣–٤) ، وقوانين حساب المثلثات الأولية ، والممارسة لإثبات أن

(أ)
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\,dx = 1, \qquad a>0,$$
$$= 0, \qquad a = 0,$$
$$= -1, \qquad a<0.$$

(ب)
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos ax}{x}\,dx = 1, \qquad |a|<1,$$
$$= \tfrac{1}{2}, \qquad |a| = 1,$$
$$= 0, \qquad |a|>1.$$

(ج)
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin ax}{x}\,dx = \frac{1}{\pi}\log\frac{a+1}{1-a}, \qquad |a|<1$$
$$= \frac{1}{\pi}\log\frac{a+1}{a-1}, \qquad |a|>1$$

(د)
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sin x}{x}\right]^2 dx = 1$$

٣٣ – (ى) عند $n \in N$ نفرض أن f_n معرفة بأنها

$$f_n(x) = 1/x, \qquad 1 \le x \le n,$$
$$= 0, \qquad x > n$$

أثبت أن كل f_n لها تكامل عند $x \ge 1$ والمتتابعة (f_n) محدودة ، متزايدة باطراد ، وتتقارب بانتظام إلى دالة متصلة ليست قابلة للتكامل على $\{x \in \mathbf{R} : x \ge 1\}$.

٣٣ – (ك) بفرض أن g_n معرفة بأنها

$$g_n(x) = 1/n, \qquad 0 \le x \le n^2,$$
$$= 0, \qquad x > n^2$$

أثبت كل g_n لها تكامل عند $x \ge 0$ والمتتابعة (g_n) محدودة وتتقارب إلى دالة g لها تكامل على $x \ge 0$ ، لكن ليس صحيحا أن

$$\lim \int_0^{+\infty} g_n = \int_0^{+\infty} g$$

هل التقارب اطرادى ؟ .

٣٣ – (ل) إذا كانت $f(x, t) = (x - t)/(x + t)^3$ ، أثبت أن

$$\int_1^A \left\{ \int_1^{+\infty} f(x, t)\,dx \right\} dt > 0 \qquad \text{for} \quad A \ge 1;$$
$$\int_1^B \left\{ \int_1^{+\infty} f(x, t)\,dt \right\} dx < 0 \qquad \text{for} \quad B \ge 1$$

ومن ثم ، استنتج أن

$$\int_1^{+\infty}\left\{\int_1^{+\infty} f(x, t)\, dx\right\} dt \neq \int_1^{+\infty}\left\{\int_1^{+\infty} f(x, t)\, dt\right\} dx.$$

۳۳ – (م) استخدم مناقشة مماثلة إلى التى فى مثال (۳۲–۱٥) (ج) وقوانينا من تمرينات ۳۳ (ز) ، ۳۳ (خ) ، لإثبات

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ty}{1+y^2}\, dy = \frac{\pi}{2} e^{-|t|}$$

۳۳ – (ن) باعتبار التكاملات المكررة للدالة $e^{-(a+y)x} \sin y$ على الربع $x \geq 0, y \geq 0$ أثبت القانون

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{a+y}\, dy, \qquad a > 0$$

مشروعات :

۳۳ – (α) هذا المشروع يدرس دالة جاما ، التى قدمت فى مثال (۳۲ – ۱۰) (هـ) . تذكر أن Γ معرفة عند x فى $P = \{x \in \boldsymbol{R} : x > 0\}$ بواسطة التكامل

$$\Gamma(x) = \int_{0+}^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

قد رأينا تواً أن هذا التكامل يتقارب عند $x \in P$ وأن $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

(أ) وضح أن Γ متصلة فى P .

(ب) أثبت أن $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ عند $x \in P$ (إرشاد : كامل بالتجزىء فى الفترة $([\varepsilon, c])$.

(ج) أثبت أن $\Gamma(n+1) = n!$ عند $n \in \boldsymbol{N}$.

(د) أثبت أن $\lim_{x\to 0+} x\Gamma(x) = 1$. ومن ثم ينتج أن Γ ليست محدودة على يمين $x = 0$.

(هـ) أثبت أن Γ قابل للتفاضل فى P وأن المشتقة الثانية تكون دائماً موجبة . (ومن ثم تكون Γ دالة محدبة فى P) .

(و) بتغيير المتغير t أثبت أن

$$\Gamma(x) = 2\int_{0+}^{+\infty} e^{-s^2} s^{2x-1}\, ds = u^x \int_{0+}^{+\infty} e^{-us} s^{x-1}\, ds$$

۳۳ – (β) نقدم دالة بيتاً لأويلر . نفرض أن $B(x, y)$ معرفة عند x, y فى $P = \{x \in \boldsymbol{R} : x > 0\}$ بأنها

$$B(x, y) = \int_{0+}^{1-} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$$

إذا كانت $y \geq 1$ و $x \geq 1$ ، فإن هذا التكامل يكون معيناً ، لكن إذا كانت $0 < x < 1$ أو $0 < y < 1$ فإن التكامل يكون غير معين .

(أ) أثبت تقارب التكامل عند x, y في P .

(ب) أثبت أن $B(x, y) = B(y, x)$

(ج) أثبت أنه إذا كانت x, y تنتميان إلى P ، فإن

$$B(x, y) = 2\int_{0+}^{(\pi/2)-} (\sin t)^{2x-1}(\cos t)^{2y-1}\, dt$$

و

$$B(x, y) = \int_{0+}^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, du.$$

(د) بتكامل الدالة الموجبة

$$f(t, u) = e^{-t^2-u^2} t^{2x-1} u^{2y-1}$$

على $\{(t, u) : t^2 + u^2 = R^2,\ t \geq 0,\ u \geq 0\}$ ثم مقارنة هذا التكامل بالتكامل على المربعات الداخلية والخارجية ، استنبط القانون الهام

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

(هـ) أثبت قانوني التكامل الآتيين :

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{2\Gamma(n+1)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{2\Gamma(n+\frac{3}{2})} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$$

٣٣ (γ) – هذا المشروع والمشروع الآتي يعطي قليلا من خواص تحويل لابلاس(*) ؛ وهي هامة لكلتا الرياضيات النظرية والتطبيقية . لتبسيط المناقشة ، سنركز اهتمامنا للدوال المتصلة f المعرفة في $\{t \in \mathbf{R} : t \geq 0\}$ إلى الفراغ $\mathbf{R}$. تحويل لابلاس لدالة f هو الدالة $\hat{f}$ المعرفة عند العدد الحقيقي s بالقانون

$$\hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

طالما يتقارب هذا التكامل . أحياناً للدالة $\hat{f}$ بالرمز $\mathscr{L}(f)$.

(أ) نفترض أنه يوجد عدد حقيقي c بحيث أن $|f(t)| \leq e^{ct}$ عندما t تكون كبيرة كبراً

(*) بيير – سيمون لابلاس (١٧٤٩ – ١٨٢٧) ، كان الابن لفلاح نورماندى ، ثم أصبح أستاذاً في المدرسة العسكرية في باريس وانتخب لأكاديمية العلوم .
هو مشهور بعمله في الميكانيكا السماوية والاحتمالات .

كافياً . حينئذ التكامل الذى يعرف تحويل لابلاس $\hat{f}$ يتقارب عندما $s > c$. وبالإضافة إلى ذلك ، فإنه يتقارب بانتظام عندما $s \geq c + \delta$ إذا كانت $\delta > 0$.

(ب) إذا كانت f تحقق شرط كونها محدودة المذكور فى جزء (أ) ، فإن $\hat{f}$ تكون متصلة ولها مشتقة عند $s > c$ ومعطاة بالقانون

$$\hat{f}'(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}(-t)f(t)\,dt$$

[أى أن المشتقة لتحويل لابلاس للدالة f هى تحويل لابلاس للدالة $g(t) = -tf(t)$] .

(ج) بالاستنتاج ، أثبت أنه تحت شرط المحدودية فى (أ) يكون للدالة لها مشتقات من كل الرتب عند $s > c$ وأن

$$\hat{f}^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}(-t)^n f(t)\,dt$$

(د) نفرض أن g و f دالتان متصلتان حيث تحويل لابلاس لها هما أى الدالتان $\hat{g}$ و $\hat{f}$ تتقاربان عند $s > s_0$ ، وإذا كانت b و a عددين حقيقيين فإن للدالة $af + bg$ تحويل لابلاس يتقارب عند $s > s_0$ ويساوى $a\hat{f} + b\hat{g}$.

(هـ) إذا كانت $a > 0$ ، وكانت $g(t) = f(at)$ ، فإن $\hat{g}$ تتقارب عند $s > as_0$ وأن

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{a}\hat{f}(s/a)$$

بالمثل ، إذا كانت $h(t) = (1/a)f(t/a)$ ، فإن $\hat{h}$ تتقارب عند $s > s_0/a$ وأن

$$\hat{h}(s) = \hat{f}(as)$$

(و) نفرض أن تحويل لابلاس $\hat{f}$ للدالة f موجود عند $s > s_0$ ونفرض أن f معرفة عند $t < 0$ بأنها مساوية للصفر . إذا كانت $b > 0$ وكانت $g(t) = f(t - b)$ ، فإن $\hat{g}$ تتقارب عند $s > s_0$ وأن

$$\hat{g}(s) = e^{-bs}\hat{f}(s)$$

بالمثل ، إذا كانت $h(t) = e^{bt}f(t)$ لأى مقدار حقيقى b ، فإن $\hat{h}$ تتقارب عندما $s > s_0 + b$ وأن

$$\hat{h}(s) = \hat{f}(s - b)$$

٣٣ (δ) – هذا المشروع استمرار للمشروع السابق ويستخدم نتائجه . .

(أ) أثبت الجدول القصير الآتى لتحويلات لابلاس

$f(t)$	$\hat{f}(s)$	فترة التقارب
1	$1/s$	$s>0,$
t^n	$n!/s^{n+1}$	$s>0,$
e^{at}	$(s-a)^{-1}$	$s>a,$
$t^n e^{at}$	$n!/(s-a)^{n+1}$	$s>a,$
$\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	all s,
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	all s,
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	$s>a,$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$s>a,$
$\dfrac{\sin t}{t}$	Arc tan $(1/s)$	$s>0.$

(ب) نفرض أن f' و f متصلتان عند $t \geq 0$ وأن $\hat{f}$ تتقارب عندما $s > s_0$ وأن $e^{-st}f(t) \to 0$ عند $t \to +\infty$ لجميع $s > s_0$. إذن يكون تحويل لابلاس للدالة f' موجوداً عند S_0 يكون

$$\widehat{f'}(s) = s\hat{f}(s) - f(0).$$

(ارشاد : كامل بالتجزىء) .

(ج) نفرض أن f'' و f' و f متصلة عند $t \geq 0$ وأن $\hat{f}$ تتقارب عند $s > s_0$. بالإضافة إلى ذلك نفرض أن $e^{-st}f'(t)$ و $e^{-st}f(t)$ تقترب من 0 عندما $t \to +\infty$ لكل $s > s_0$ إذن يكون تحويل لابلاس للدالة f'' موجوداً عند $s > s_0$ ويكون

$$\widehat{f''}(s) = s^2\hat{f}(s) - sf(0) - f'(0)$$

(د) إذا لاحظنا أن كل أو جزء الدالة المراد تكاملها هو تحويل لابلاس ، فإن التكامل يمكن حسابه أحياناً بتغيير ترتيب التكامل . استخدم هذه الطريقة لحساب التكامل

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{s}\, ds = \tfrac{1}{2}\pi$$

(هـ) من المرغوب حل المعادلة التفاضلية

$$y'(t) + 2y(t) = 3\sin t, \qquad y(0) = 1$$

نفرض أن هذه المعادلة لها حل y بحيث أن تحويل لابلاس للحل y ، y' موجودان عندما s تكون كبيرة كبراً كافياً . فى هذه الحالة يجب أن يحقق تحويل y المعادلة

$$s\hat{y}(s) - y(0) + 2\hat{y}(s) = 4/(s-1), \qquad s > 1$$

التى منها ينتج أن

$$\hat{y}(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s-1)}$$

استخدم كسوراً جزئية والجدول ف (أ) لحصول على $y(t) = \frac{4}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{\;2t}$ ، الذى يمكن إثباته مباشرة كحل للمعادلة التفاضلية

(و) أوجد الحل للمعادلة

$$y'' + y' = 0, \qquad y(0) = a, \qquad y'(0) = b$$

باستخدام تحويل لابلاس

(ز) أثبت أن معادلة تفاضلية متجانسة خطية معادلات ثابتة يمكن حلها باستخدام تحويل لابلاس . والأسلوب الاصطلاحى لتحليل دالة قياسية إلى كسور جزئية .

الفصل السادس

المتسلسلات اللانهائية

يختص هذا الفصل بإثبات النظريات الأكثر أهمية فى نظرية المتسلسلات اللانهائية . وبالرغم من وجود نتائج هامشية قليلة هنا ، فسنوجه انتباهنا إلى الفروض الأساسية . يرجع القارىء إلى مقالات أكثر شمولا لنتائج وتطبيقات متقدمة .

سنقدم فى الباب الأول النظريات الأساسية المتعلقة بالتقارب للمتسلسلات النهائية فى الفراغ سوف نحصل على بعض نتائج لها طبيعة عامة وتساعد فى إثبات التقارب لمتسلسلات وتحقق ممارسة خاصة للمتسلسلات .

سنعطى فى باب ٣٥ بعض « اختبارات » مألوفة للتقارب المطلق للمتسلسلات وبالإضافة إلى ذلك فإن كلا من هذه الاختبارات ينتج تقديراً كمياً يختص بسرعة التقارب وذلك لضمان تقارب المتسلسلات التى تطبق هذه الاختبارات عليها .

يمدنا الباب الآتى ببعض اختبارات مفيدة للتقارب الشرطى ، ويزودنا بمناقشة قصيرة للمتسلسلات المزدوجة وحاصل ضرب المتسلسلات .

نقدم فى باب ٣٧ الدراسة لمتسلسلات الدوال ونثبت الخواص الأساسية لمتسلسلات القوى بينما فى الباب الأخير من هذا الفصل سنثبت بعض النتائج الأساسية لنظرية متسلسلة فوريه

الباب الرابع والثلاثون ـ تقارب متسلسلات لا نهائية :

فى مقررات أولية ، « تعرف » متسلسلة لانهائية أحياناً بأنها « تعبير فى الصورة

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots \qquad (34.1)$$

هذا « تعريف » ينقصه وضوح ، لكن ، بما أنه لايوجد قيمة خاصة يمكننا ربطها قبل هذا النظام من الرموز لتدل على إجراء عدد لانهائى من عمليات الجمع بالرغم من وجود تعريفات أخرى مناسبة ، فسنعتبر المتسلسلة النهائية مثل المتتابعة لحواصل جمع جزئية .

٣٤ – ١ **تعريف** . إذا كانت $X = (x_n)$ متتابعة فى الفراغ R^p ، فإن المتسلسلة اللانهائية (أو ببساطة المتسلسلة) المولدة بواسطة X هى المتتابعة $S = (s_k)$ المعرفة بواسطة

$$s_1 = x_1,$$
$$s_2 = s_1 + x_2 \quad (= x_1 + x_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_k = s_{k-1} + x_k \quad (= x_1 + x_2 + \cdots + x_k),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

إذا كانت S تتقارب ، فنشير إلى $\lim S$ بأنه حاصل جمع المتسلسلة اللانهائية . تسمى العناصر x_n الحدود وتسمى العناصر s_k حواصل جمع جزئية لهذه المتسلسلة اللانهائية .

من المناسب استعمال التعبير (٣٤ – ١) أو أى من أحد هذه الرموز

$$\sum (x_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (x_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

كل يشير إلى المتسلسلة اللانهائية المولدة بواسطة المتتابعة $X = (x_n)$ وأيضاً لتشير إلى $\lim S$ فى حالة كون هذه المتسلسلة اللانهائية تقاربية . بالممارسة الحقيقية ، الاستعمال الزوجى لهذه الرموز لايؤدى إلى إبهام ، طالما كان من المفهوم وجوب إثبات تقارب المتسلسلة .

ويجب على القارىء الاحتراس منعاً للابهام بين الكلمتين (متتابعة) ، « متسلسلة » . وبلغة غير رياضية تكون هاتان الكلمتان قابلتين لتبديل كل منهما مكان الأخرى ، لكن ، فى الرياضة ، لايكونان مترادفين حسب تعريفنا ، تكون متسلسلة لانهائية هى متتابعة S حصلنا عليها من متتابعة معطاة X طبقاً لعملية خاصة ذكرناها أعلاه . توجد طرق أخرى كثيرة لتوليد متتابعات جديدة و « حواصل جمع » ملتصقة للمتتابعة المعطاة X . يجب على القارىء أن يبحث فى كتب على المتسلسلات التباعدية ، المتسلسلات المقاربة ، قابلية المتسلسلات للجمع على أمثلة لمثل هذه النظريات .

توجد كلمة أخيرة عن مسائل رمزية . مع أننا نفهرس غالباً العناصر المتسلسلة بأعداد طبيعية ، يكون ، من المناسب أحياناً بدرجة أكثر أن نبدأ من $n = 0$ ، من $n = 5$ ، أو من $n = k$ فى مثل هذه الحالة سنرمز للمتسلسلات الناتجة أو لخواص جمعها برموز مثل

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \qquad \sum_{n=5}^{\infty} x_n, \qquad \sum_{n=k}^{\infty} x_n$$

عرفنا فى تعريف (١٤ – ٢) ، حاصل الجمع وباقى الطرح لمتتابعتين X, Y فى R^p . بالمثل ، إذا كانت c عدداً حقيقياً وإذا كانت w عنصراً فى R^p ، فقد عرفنا المتتابعتين $cX = (cx_n)$, $(w \cdot x_n)$ فى R R^p ، على الترتيب . نختبر الآن المتسلسلات المتولدة بهذه المتتابعات .

٣٤ – ٢ نظرية . (أ) إذا كانت المتسلسلتان $\sum (x_n)$ ، $\sum (y_n)$ تقـاربيتين فإن $\sum (x_n + y_n)$ تتقارب وأن حواصل الجمع تكون مرتبطة بالقانون .

$$\sum (x_n + y_n) = \sum (x_n) + \sum (y_n)$$

نتيجة مشابهة تظل صحيحة للمتسلسلة المنتجة بواسطة $X - Y$.

(ب) إذا كانت المتسلسلة $\sum (x_n)$ تقاربية ، c عدداً حقيقياً ، w عنصراً ثابتاً من R^p ، فإن المتسلسلتين $\sum (cx_n)$ ، $\sum (w \cdot x_n)$ تتقاربان ويكون

$$\sum (cx_n) = c \sum (x_n), \qquad \sum (w \cdot x_n) = w \cdot \sum (x_n)$$

البرهان . تنتج هذه النتيجة مباشرة من نظرية (١٥ – ٦) ومن تعريف (٣٤ – ١) .
وهو المطلوب إثباته

ربما يكون متوقعاً أنه إذا كانت المتتابعتان $X = (x_n)$ ، $Y = (y_n)$ تولدان متسلسلتين تقاربيتين ، فإن المتتابعة $X \cdot Y = (x_n \cdot y_n)$ تولد أيضاً متسلسلة تقاربية . وللاحظة أن هذا لايكون دائماً صحيحاً نأخذ $X = Y = ((-1)^n/\sqrt{n})$ فى الفراغ R .

الآن نقدم شرطاً ضرورياً بسيطاً لتقارب متسلسلة . ومع ذلك فهو ليس كاف .

٣٤ – ٣ مفترض . إذا كانت $\sum (x_n)$ تتقارب فى R^p فإن $\lim (x_n) = 0$.

البرهان . من التعريف نجد أن ، التقارب للمتسلسلة $\Sigma (x_n)$ يعنى أن $\lim (s_k)$ موجود . لكن ، بما أن

$x_k = s_k - s_{k-1}$ فإن $\lim (x_k) = \lim (s_k) - \lim (s_{k-1}) = 0$

وهو المطلوب إثباته

النتيجة الآتية ، لها أهمية كبيرة بالرغم من أنها محدودة فى مجال.

٣٤ – ٤ نظرية . نفرض أن (x_n) متتابعة لأعداد حقيقية موجبة . إذن المتسلسلة $\Sigma(x_n)$ تتقارب إذا وإذا فقط كانت المتتابعة $S = (s_k)$ لحواصل جمع جزئية محدودة . فى هذه الحالة يكون

$$\sum x_n = \lim (s_k) = \sup \{s_k\}$$

البرهان . بما أن $x_n \geq 0$ ، فإن المتتابعة لحواصل جمع جزئية متزايدة باطراد

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_k \leq \cdots$$

حسب نظرية التقارب الاطرادى (١٦ – ١) ، نجد أن المتتابعة S تتقارب إذا وإذا فقط كانت محدودة .
وهو المطلوب إثباته

بما أن معيار كوشى الآتى هو بالضبط صياغة ثانية لنظرية ١٦ – ١٠ ، فسوف نحذف برهانه .

٣٤ – ٥ معيار كوشى للمتسلسلات . تتقارب المتسلسلات $\sum(x_n)$ فى $\boldsymbol{R}^p$ إذا وإذا فقط كان يوجد لكل عدد $\varepsilon > 0$ عدد طبيعى $M(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $m \geq n \geq M(\varepsilon)$ فإن

$$\|s_m - s_n\| = \|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m\| < \varepsilon$$

مفهوم التقارب المطلق يكون غالباً ذو أهمية عظمى فى دراسة المتسلسلات ، كما سنوضح فيما بعد .

٣٤ – ٦ تعريف . نفرض أن $x = (x_n)$ متتابعة فى $\boldsymbol{R}^p$. نقول إن المتسلسلة $\sum(x_n)$ تقاربية تقارباً مطلقاً (أو تقاربية مطلقة) إذا كانت المتسلسلة $\sum(\|x_n\|)$ تقاربية فى الفراغ $\boldsymbol{R}$.

يقال للمتسلسلة أنها تقاربية مشروطة إذا كانت تقاربية ولكن ليست تقاربية مطلقة .

من المؤكد أنه لايوجد تمييز بين التقارب العادى والتقارب المطلق للمتسلسلات التى عناصرها أعداد حقيقية موجبة . لكن ، ربما يوجد فرق بين التقاربين لمتسلسلات أخرى .

٣٤ – ٧ نظرية . إذا كانت متسلسلة فى $\boldsymbol{R}^p$ تقاربية مطلقة فإنها تكون تقاربية .

البرهان . من الفرض ، تتقارب المتسلسلة $\sum(\|x_n\|)$. لذلك ، ينتج من لزوم معيار كوشى (٣٤ – ٥) أنه بإعطاء $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد طبيعى $M(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $m \geq n \geq M(\varepsilon)$ ، حينئذ

$$\|x_{n+1}\| + \|x_{n+2}\| + \cdots + \|x_m\| < \varepsilon$$

طبقاً لمتباينة المثلث ، يسيطر الطرف الأيسر لهذه العلاقة على

$$\|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m\|$$

نستخدم الكفاية لمعيار كوشى لنستنتج أن $\sum(x_n)$ يجب أن تتقارب .

وهو المطلوب إثباته

٣٤ – ٨ أمثلة . (أ) نعتبر المتتابعة الحقيقية $X = (a^n)$ ، التى تولد المتسلسلة الهندسية

$$a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots \qquad (34.2)$$

شرط كاف للتقارب هو أن $\lim(a^n) = 0$ ، التى تتطلب أن $|a| < 1$. إذا كانت $m \geq n$ ، فإن

$$a^{n+1}+a^{n+2}+\cdots+a^{m}=\frac{a^{n+1}-a^{m+1}}{1-a} \qquad (34.3)$$

التى يمكن تحقيقها بضرب كلا الطرفين بالمقدار $1-a$ وملاحظة الظاهرة التلسكوبية على الطرف الأيسر . إذن حواصل الجمع الجزئية تحقق

$$|s_m-s_n|=|a^{n+1}+\cdots+a^{m}|\le\frac{|a^{n+1}|+|a^{m+1}|}{|1-a|}, \qquad m\ge n$$

إذا كانت $|a|<1$ ، فإن $|a^{n+1}|\to 0$ لذلك يدل معيار كوشى على أن المتسلسلة الهندسية (٣٤ – ٢) تتقارب إذا وإذا فقط كان $|a|<1$. نفرض أن $n=0$ فى (٣٤ – ٣) وبإيجاد النهاية بالنسبة إلى m نجد أن (٣٤ – ٢) تتقارب إلى النهاية $a/(1-a)$ عندما $|a|<1$.

(ب) نعتبر المتسلسلة التوافقية $\sum(1/n)$ ، المعروفة بأنهـا تتباعد . بمـا أن $\lim(1/n)=0$ ، لايمكننا استخدام مفترض (٣٤ – ٣) لإثبات هذا التباعد ، لكى يجب تنفيذ استدلال أكثر دقة ، التى سيستنتج من نظرية (٣٤ – ٤) .

سنوضح أن متتابعة جزئية لحواصل جمع جزئية ليست محدودة . فى الحقيقة ، إذا كانت $k_1=2$ ، فإن

$$s_{k_1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}$$

وإذا كانت $k_2=2^2$ ، فإن

$$s_{k_2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=s_{k_1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>s_{k_1}+2\left(\frac{1}{4}\right)=1+\frac{2}{2}$$

بالاستنتاج الرياضى ، نستنتج أنه إذا كانت $k_r=2^r$ ، فإن

$$s_{k_r}>s_{k_{r-1}}+2^{r-1}\left(\frac{1}{2^r}\right)=s_{k_{r-1}}+\frac{1}{2}\ge 1+\frac{r}{2}$$

لذلك ، تكون المتتابعة الجزئية (s_{k_n}) ليست محدودة والمتسلسلة التوافقية لاتتقارب .

(ج) تدرس الآن المتسلسلة– p التى هى $\sum(1/n^p)$ حيث $0<p\le 1$ ونستعمل المتباينة الأساسية $n^p\le n$ ، عند $n\in N$. من هذا ينتج أنه ، عند $0<p\le 1$ ، فإن

$$\frac{1}{n}\le\frac{1}{n^p}, \qquad n\in N$$

وحيث أن حواصل الجمع الجزئية المتسلسلة التوافقية ليست محدودة ، فإن هذه المتباينة توضح أن حواصل الجمع الجزئية للمتسلسلة $\sum(1/n^p)$ ليست محدودة عند $0<p\le 1$. ومن ثم المتسلسلة تكون تباعدية عند هذه القيم للعدد p .

(د) اعتبر المتسلسلة — p عندما $p > 1$. بما أن حواصل الجمع الجزئية اطرادية ، فيكفى أن نوضح أن متتابعة جزئية ما تظل محدودة لكى نثبت التقارب للمتسلسلة . إذا كانت $k_1 = 2^1 - 1 = 1$ ، فإن $s_{k_1} = 1$. إذا كانت $k_2 = 2^2 - 1 = 3$ ، ونجد أن

$$s_{k_2} = \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) < 1 + \frac{2}{2^p} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}}$$

وإذا كانت $k_3 = 2^3 - 1$ ، فنحصل على

$$s_{k_3} = s_{k_2} + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) < s_{k_2} + \frac{4}{4^p} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}}$$

نفرض $a = 1/2^{p-1}$ ؛ بما أن $p > 1$ ، فيلاحظ أن $0 < a < 1$. بالاستنتاج الرياضى ، نجد أنه إذا كانت $k_r = 2^r - 1$ ، فإن

$$0 < s_{k_r} < 1 + a + a^2 + \cdots + a^{r-1}$$

ومن ثم يكون العدد $1/(1-a)$ هو الحد الأعلى لحواصل الجمع الجزئية للمتسلسلة $p-$ حيث $1 < p$. ينتج من نظرية (٣٤-٤) أن عند مثل هذه القيم للمقدار p ، تتقارب المتسلسلة $p-$.

(هـ) اعتبر المتسلسلة $\sum (1/(n^2+n))$ باستخدام كسور جزئية ، يمكننا أن نكتب

$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

هذا تعبير يوضح أن حواصل الجمع الجزئية تلسكوبية ومن ثم

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

ينتج أن المتتابعة (s_n) تتقارب إلى الواحد الصحيح .

اعادة تنظيمات متسلسلات :

بعبارة غير دقيقة يكون معنى إعادة تنظيم المتسلسلة هو متسلسلة أخرى نحصل عليها من المتسلسلة المعطاة باستخدام كل الحدود مرة واحدة تماماً ، لكن بتغيير الترتيب الذى تؤخذ فيه الحدود . مثل ذلك ، المتسلسلة التوافقية

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

لها إعادة تنظيمات

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}+\cdots,$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$$

نحصل على إعادة التنظيم الأول بتبادل الحدين الأول والثانى ، والحدين الثالث والرابع إلى آخره . بينما نحصل على إعادة التنظيم الثانى من المتسلسلة التوافقية . بأخذ « حد فردى » ، واحد ثم « حدين زوجين » ، « ثلاثة حدود فردية » وهكذا . من الواضح أنه يوجد إعادة تنظيمات أخرى كثيرة ممكنة عددها لانهائى للمتسلسلة التوافقية .

٣٤ — ٩ تعريف . متسلسلة $\sum(y_m)$ فى $\boldsymbol{R}^p$ تكون إعادة تنظيم المتسلسلة $\sum(x_n)$ إذا كان يوجد تناظر أحادى f للمقدار $\boldsymbol{N}$ على $\boldsymbol{N}$ بحيث إن $y_m = x_{f(m)}$ لجميع $m \in \boldsymbol{N}$.

توجد ملاحظة تسترعى الانتباه ترجع إلى ريمان ، وهى أنه إذا كانت $\sum(x_n)$ متسلسلة تقاربية شرطية فى $\boldsymbol{R}$ (أى إنها تقاربية لكن ليست تقاربية مطلقة) وإذا كانت c عدداً حقيقياً اختيارياً ، فإنه يوجد إعادة تنظيم المتسلسلة $\sum(x_n)$ التى تتقارب إلى c . فكرة البرهان لهذا الغرض أولية جداً . نأخذ حدوداً موجبة إلى أن نحصل على حاصل جمع جزئى يزيد عن c ، حينئذ نأخذ حدوداً سالبة من المتسلسلة المعطاة حتى نحصل على حاصل جمع جزئى للحدود يكون أقل من c ، وهكذا . وحيث إن $\lim(x_n) = 0$ ، فليس صعباً ملاحظة أنه يمكن تركيب إعادة تنظيم للمتسلسلة بحيث يتقارب إلى c .

بمعالجتنا للمتسلسلات ، نجد فى الحالة العامة ، أنه من المناسب التأكد من أن إعادة التنظيمات لاتؤثر فى التقارب أو قيمة النهاية .

٣٤ — ١٠ نظرية إعادة تنظيم . بفرض أن $\sum(x_n)$ متسلسلة تقاربية مطلقة فى $\boldsymbol{R}^p$. إذن أى إعادة تنظيم للمتسلسلة $\sum(x_n)$ يتقارب بانتظام إلى نفس القيمة .

البرهان . نفرض أن $x = \sum(x_n)$ ، نفرض $\sum(y_m)$ هى إعادة تنظيم للمتسلسلة $\sum(x_n)$ ونفرض أن K حداً أعلى لحواصل الجمع الجزئية من $\sum(\|x_n\|)$ واضح أنه إذا كانت $t_r = y_1 + \cdots + y_r$ هو حاصل جمع جزئى للمتسلسلة $\sum(y_m)$ ، حينئذ

$$\|y_1\| + \cdots + \|y_r\| \le K$$

ومنها نجد أن $\sum(y_m)$ تتقارب تقارباً مطلقاً لعنصر ما y فى الفراغ $\boldsymbol{R}^p$ نرغب فى إثبات أن $x = y$. إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، ونفرض أن $N(\varepsilon)$ بحيث إنه إذا كانت $m > n \ge N(\varepsilon)$ و $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ فإن $\|x - s_n\| < \varepsilon$ ويكون

$$\sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \varepsilon$$

باختيار حاصل جمع جزئی t_r للمتسلسلة $\sum(y_m)$ بحيث إن $\|y-t_r\|<\varepsilon$ وبحيث إن كل $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تقع فی t_r . وبإجراء هذا ، نختار $m>n$ كبيرة لدرجة أن كل y_k التي تظهر فی t_r تظهر أيضاً فی s_m . وإذن

$$\|x-y\| \leq \|x-s_m\|+\|s_m-t_r\|+\|t_r-y\|<\varepsilon+\sum_{n+1}^{m}\|x_k\|+\varepsilon<3\varepsilon$$

بما أن $\varepsilon>0$ اختيارية ، فنستنتج أن $x=y$. وهو المطلوب إثباته

تمرينـــات :

٣٤ – (أ) نفرض أن $\sum(a_n)$ متسلسلة معطاة ونفرض أن $\sum(b_n)$ هی المتسلسلة التی فيها حدودها هی نفس الحدود فی المتسلسلة $\sum(a_n)$ ، بعد حذف الحدود التی فيها $a_n=0$.

أثبت أن $\sum(a_n)$ تتقارب إلى عدد A إذا وإذاً فقط كانت $\sum(b_n)$ تتقارب إلى A .

٣٤ – (ب) وضح أن التقارب لمتسلسلة لاتتأثر بتغيير عدد محدود من حدودها . (طبعاً ، ربما يتغير حاصل الجمع) .

٣٤ – (ج) أثبت أن مجموعات الحدود لمتسلسلة تقاربية الناتجة بإدخال أقواساً تحتوی علی عدد محدود من الحدود ، لاتهدم التقارب أوقيمة النهاية . لكن ، مجموعات حدود فی متسلسلة تباعدية يمكن أن تنتج تقارباً .

٣٤ – (د) أثبت أنه إذا كانت متسلسلة تقاربية لأعداد حقيقية تحتوی فقط علی عدد محدود من حدود سالبة ، فإنها تكون تقاربية مطلقة .

٣٤ – (هـ) وضح أنه إذا كانت متسلسلة لأعداد حقيقية تقاربية شرطية ، فإن المتسلسلة لحدود موجبة تباعدية والمتسلسلة لحدود سالبة تباعدية .

٣٤ – (و) باستخدام كسور جزئية ، أثبت أن

(أ) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}=\frac{1}{\alpha} \quad \text{if } \alpha>0$$

(ب) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}.$$

٣٤ – (ز) إذا كانت $\sum(a_n)$ متسلسلة تقاربية لأعداد حقيقية ، هل $\sum(a_n^2)$ تكون تقاربية دائماً ؟ إذا كانت $a_n \geq 0$ ، هل صحيح أن $\sum(\sqrt{a_n})$ تكون دائماً تقاربية ؟

٣٤ – (ح) إذا كانت $\sum(a_n)$ تقاربية وأن $a_n \geq 0$ ، حينئذ هل $\sum(\sqrt{a_n a_{n+1}})$ تقاربية ؟

٣٤ – (ط) نفرض أن $\sum(a_n)$ متسلسلة لأعداد موجبة مضبوطة ونفرض أن

$b_n,\ n \in \mathbf{N}$ معرفة بأن تكون $b_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$. أثبت أن $\sum (b_n)$ تكون دائماً تباعدية .

٣٤ – (ى) نفرض أن $\sum (a_n)$ متسلسلة تقــاربية ونفرض أن $c_n,\ n \in \mathbf{N}$ ، معرفة بأنها المتوسطات الموزونة أى

$$c_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)}$$

إذن $\sum (c_n)$ تتقارب وتتساوى $\sum (a_n)$.

٣٤ – (ك) نفرض أن $\sum (a_n)$ هى متسلسلة لأعداد موجبة ومتناقصة باطراد أثبت أن $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)$ تتقارب إذا وإذاً فقط كانت المتسلسلة .

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

تتقارب . تسمى هذه النتيجة أحياناً باختبار تكثيف لكوشى . [إرشاد : ضم الحدود فى مجموعات كما فى مثال (٣٤ – ٨) (ب ، د)] .

٣٤ – (ل) استخدم اختبار التكثيف لكوشى لمناقشة التقارب للمتسلسلة – p $\sum (1/n^p)$

٣٤ – (م) استخدم اختبار التكثيف لكوشى لإثبات أن المتسلسلات

$$\sum \frac{1}{n \log n}, \qquad \sum \frac{1}{n(\log n)(\log \log n)},$$

$$\sum \frac{1}{n(\log n)(\log \log n)(\log \log \log n)}$$

تباعدية .

٣٤ – (ن) أثبت أنه إذا كانت $c > 1$ ، فإن المتسلسلتين

$$\sum \frac{1}{n(\log n)^c}, \qquad \sum \frac{1}{n(\log n)(\log \log n)^c}$$

تقاربيتان

٣٤ – (س) نفرض أن (a_n) متتابعة متناقصة باطراد لأعداد موجبة . أثبت أنه إذا كانت المتسلسلة $\sum (a_n)$ تقاربية ، فإن $\lim (na_n) = 0$. هل العكس صحيح ؟

٣٤ – (ع) إذا كانت $\lim (a_n) = 0$ فإن $\sum (a_n)$ و $\sum (a_n + 2a_{n+1})$ تتقاربان معاً أو تتباعدان معاً .

الباب الخامس والثلاثون — اختبارات لتقارب مطلق :

حصلنا فى الباب السابق على بعض نتائج متعلقة بدراسة المتسلسلات اللانهائية ، وخاصة الحالة الهامة التى فيها تكون المتسلسلات تقاربية مطلقة . لكن ، باستثناء معيار كوشى وحقيقة كون حدود متسلسلة تقاربية تقترب إلى صفر ، لم نثبت أى شروط ضرورية أو كافية لتقارب المتسلسلات اللانهائية .

سنعطى الآن بعض نتائج بحيث يمكن استخدامها لإثبات التقارب أو التباعد لمتسلسلات لانهائية. وبسبب أهميتها ، سنعير انتباهاً خاصاً للتقارب المطلق . بما أن التقارب المطلق للمتسلسلة $\sum (x_n)$ فى R^p يكون مكافئاً لتقارب المتسلسلة $\sum (\|x_n\|)$ لعناصر موجبة فى الفراغ R ، فن الواضح أن النتائج التى تثبت التقارب لمتسلسلات حقيقية موجبة لها فائدة خاصة .

يوضح اختبارنا الأول أنه إذا كانت الحدود لمتسلسلة حقيقية موجبة تكون مسيطرة بالحدود المناظرة لمتسلسلة تقاربية ، فإن المتسلسلة الأولى تكون تقاربية . وتعطى اختباراً للتقارب المطلق الذى يجب أن يصوغه القارىء .

٣٥ — ١ اختبار المقارنة . نفرض أن $X = (x_n)$ و $Y = (y_n)$ متتابعتين حقيقيتين موجبتين ونفرض أنه لأى عدد حقيق K يكون

$$x_n \leq y_n \qquad for\ n \geq K \tag{35.1}$$

حينئذ التقارب للمتتابعة $\sum (y_n)$ يضمن التقارب للمتتابعة $\sum (x_n)$.

البرهان . إذا كانت $m \geq n \geq \sup \{K, M(\varepsilon)\}$ فإن

$$x_{n+1} + \cdots + x_m \leq y_{n+1} + \cdots + y_m < \varepsilon$$

التى منها يكون المطلوب إثباته واضحاً وهو المطلوب إثباته

٣٥ — ٢ نهاية اختبار مقارنة . نفرض أن $X = (x_n)$ و $Y = (y_n)$ متتابعتين حقيقيتين موجبتين .

(أ) إذا كانت العلاقة

$$\lim (x_n/y_n) \neq 0 \tag{35.2}$$

صحيحة ، فإن $\sum (x_n)$ تكون تقاربية إذا وإذا فقط كانت $\sum (y_n)$ تقاربية .

(ب) إذا كانت النهاية فى (٣٥ — ٢) صفراً وكانت $\sum (y_n)$ تقاربية ، فإن $\sum (x_n)$ تقاربية .

البرهان . ينتج من (٣٥ — ٢) أنه لعدد حقيق ما $c > 1$ وعدد طبيعى ما K ، يكون

$$(1/c)y_n \leq x_n \leq cy_n \qquad \text{for} \qquad n \geq K$$

إذا استخدمنا اختبار المقارنة (٣٥ – ١) مرتين ، نحصل على المطلوب إثباته والمذكور فى جزء (أ) . برهان الجزء (ب) يكون مماثلا وسوف يحذف . وهو المطلوب إثباته

اختبـــار الجذر والنسبة :

الآن يعطى اختباراً هاماً يرجع لكوشى .

٣٥ – ٣ اختبار جذر : (أ) إذا كانت $X = (x_n)$ متتابعة فى R^p وكان يوجد عدد موجب $r < 1$ وعدد طبيعى K بحيث إن

$$\|x_n\|^{1/n} \leq r \qquad \text{for } n \geq K \tag{35.3}$$

فإن المتسلسلة $\sum(x_n)$ تكون تقاربية مطلقة .

(ب) إذا كان يوجد عدد $r > 1$ وعدد طبيعى K بحيث إن

$$\|x_n\|^{1/n} \geq r \qquad \text{for } n \geq K \tag{35.4}$$

فإن المتسلسلة $\sum(x_n)$ تكون تباعدية

البرهان . (أ) إذا كانت (٣٥ – ٣) تظل صحيحة ، فنحصل على $\|x_n\| \leq r^n$. الآن عند $0 \leq r \leq 1$ ، تكون المتسلسلة $\sum(r^n)$ تقاربية ، كما لاحظنا فى مثال (٣٤ – ٨) (أ) ومن ثم ينتج من اختبار المقارنة أن $\sum(x_n)$ تقاربية مطلقة .

(ب) إذا كانت (٣٥ – ٤) تظل قائمة ، فإن $\|x_n\| \geq r^n$. لكن ، بما أن $r \geq 1$ ، فن الخطأ أن $\lim(\|x_n\|) = 0$ وهو المطلوب إثباته

وبالإضافة إلى ذلك ، نجد لإثبات التقارب للمتسلسلة $\sum(x_n)$ ، أن اختبار الجذر يمكن استخدامه لحصول على تقدير لسرعة التقارب . هذا التقدير مفيد فى الحسابات العددية وفى بعض التقويمات النظرية أيضاً .

٣٥ – ٤ نتيجة . إذا كانت r تحقق $0 < r < 1$ وإذا كانت المتتابعة $X = (x_n)$ تحقق (٣٥ – ٣) ، فإن حواصل الجمع الجزئية $s_n, \ n \geq K$ ، تقترب من حاصل الجمع $s = \sum(x_n)$ حسب التقدير

$$\|s - s_n\| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r} \qquad \text{for } n \geq K \tag{35.5}$$

البرهان . إذا كانت $m \geq n \geq K$ فنحصل على

$$\|s_m - s_n\| = \|x_{n+1} + \cdots + x_m\| \leq \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_m\| \leq r^{n+1} + \cdots + r^m < \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

الآن نأخذ النهاية بالنسبة إلى m للحصول على (٣٥ — ٥) .   وهو المطلوب إثباته

من المناسب غالباً الاستفادة من التغيير الآتى لاختبار الجذر .

٣٥ — ٥ نتيجة . نفرض أن $X = (x_n)$ متتابعة فى R^p وضع

$$r = \lim (\|x_n\|^{1/n}) \tag{35.6}$$

طالما تكون هذه النهاية موجودة . إذن $\sum (x_n)$ تكون تقاربية مطلقة عند $r < 1$ وتكون تباعدية عند $r > 1$.

البرهان . ينتج أنه إذا كانت النهاية فى (٣٥ — ٦) موجودة وأقل من واحد صحيح ، فإنه يوجد عدد حقيقى r_1 حيث $r < r_1 < 1$ وعدد طبيعى K بحيث إن

$$\|x_n\|^{1/n} \le r_1 \qquad \text{for } n \ge K$$

فى هذه الحالة تكون المتسلسلة تقاربية مطلقة . إذا كانت هذه النهاية تزيد عن الواحد الصحيح ، فإنه يوجد عدد حقيقى $r_2 > 1$ وعدد طبيعى K بحيث إن

$$\|x_n\|^{1/n} \ge r_2 \qquad \text{for } n \ge K$$

أى إنه فى هذه الحالة تكون المتسلسلة تباعدية .   وهو المطلوب إثباته

هذه النتيجة يمكن تعميمها باستخدام النهاية الأعلى بدلا من النهاية . سنترك التفاصيل كتمرين . بالاختبار الآتى يرجع إلى دالمبيرت (*)

٣٥ — ٦ اختبار نسبة . (أ) إذا كانت $X = (x_n)$ متتابعة لعناصر ليست أصفاراً فى الفراغ R^p وكان يوجد عدد موجب $r < 1$ وعدد طبيعى K بحيث إن

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \le r \qquad \text{for } n \ge K \tag{35.7}$$

فإن المتسلسلة $\sum (x_n)$ تكون تقاربية مطلقة .

(ب) إذا كان يوجد عدد $r \ge 1$ وعدد طبيعى K بحيث إن

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \ge r \qquad \text{for} \qquad n \ge K \tag{35.8}$$

فإن المتسلسلة $\sum (x_n)$ تكون تباعدية .

(*) جين لروند دالمبيرت (١٧١٧ — ١٧٨٣) كان ابن شيفاليرد ستوشز . أصبح سكرتيراً للأكاديمية الفرنسية وموجهاً رياضياً لدائرة المعارف . ساهم فى الديناميكا والمعادلات التفاضلية .

البرهان . (أ) إذا كانت (٣٥ – ٧) تظل صحيحة، فإن مناقشة أولية للاستنتاج تثبت أن $\|x_{K+m}\| \le r^m \|x_K\|$ لكل $m \ge 1$. ينتج أنه عند $n \ge K$ تكون الحدود المتسلسلة مسيطرة بحدود متوالية هندسية بعد ضربها فى ثابت ولتكن $\sum (r^n)$ حيث $0 \le r < 1$.

تستنتج من اختبار المقارنة (٣٥ – ١) ، أن $\sum (x_n)$ تكون تقاربية مطلقة .

(ب) إذا كانت (٣٥ – ٨) صحيحة ، فإن مناقشة أولية للاستنتاج – توضح أن

$$\|x_{K+m}\| \ge r^m \|x_K\| \quad \text{عند} \quad m \ge 1$$

بما أن $r \ge 1$ ، فن غير الممكن أن نحصل على $\lim (\|x_n\|) = 0$ ، لذلك لايمكن للمتسلسلة أن تتقارب . وهو المطلوب إثباته

٣٥ – ٧ نتيجة . إذا كانت r تحقق $0 \le r < 1$ وإذا كانت المتتابعة $X = (x_n)$ تحقق (٣٥ – ٧) عند $n \ge K$ ، فإن حواصل الجمع الجزئية تقترب من حاصل الجمع $s = \sum (x_n)$ حسب التقدير .

$$\|s - s_n\| \le \frac{r}{1-r}\|x_n\| \qquad for\ n \ge K \tag{35.9}$$

البرهان . تدل العلاقة (٣٥ – ٧) على أن $\|x_{n+k}\| \le r^k \|x_n\|$ عند $n \ge K$ لذلك ، إذا كانت $m \ge n \ge K$ فنجد أن

$$\|s_m - s_n\| = \|x_{n+1} + \cdots + x_m\| \le \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_m\|$$
$$\le (r + r^2 + \cdots + r^{m-n}) \|x_n\| < \frac{r}{1-r}\|x_n\|$$

ومرة أخرى نأخذ النهاية بالنسبة إلى m لنحصل على (٣٥ – ٩) . وهو المطلوب إثباته

٣٥ – ٨ نتيجة . نفرض أن $X = (x_n)$ متتابعة فى R^p ونضع

$$r = \lim\left(\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|}\right)$$

طالما وجدت النهاية . إذن المتسلسلة $\sum (x_n)$ تكون تقاربية مطلقة عند $r < 1$ وتباعدية عند $r > 1$.

البرهان . نفرض أن النهاية موجودة وأن $r < 1$. إذا كانت r_1 تحقق $r < r_1 < 1$، فعندئذ يوجد عدد طبيعى K بحيث إن

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} < r_1 \qquad \text{for} \quad n \ge K$$

فى هذه الحالة تثبت نظرية (٣٥ – ٦) التقارب المطلق للمتسلسلة . إذا كانت $r > 1$ ، وإذا

كانت r_2 تحقق $1 < r_2 < r$ ، فإنه يوجد عدد طبيعى K بحيث إن

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} > r_2 \qquad \text{for } n \geq K$$

وفى هذه الحالة يوجد تباعد للمتسلسلة . وهو المطلوب إثباته

اختبار راب :

إذا كانت $r = 1$ ، فإن كلا من اختبارى النسبة والجذر يفشل والمتسلسلة إما أن تكون تقاربية أو تكون تباعدية . [أنظر مثال ٣٥ – ١٣ (د)] . يكون من المفيد لبعض أغراض الحصول على صيغة أكثر دقة لاختبار النسبة لحالة التى فيها $r = 1$. النتيجة الآتية ، التى ترجع إلى راب(*) ، تكون عادة مناسبة .

٣٥ – ٩ اختبار راب . (أ) إذا كانت $X = (x_n)$ متتابعة لعناصر غير صفرية من الفراغ R^p وكان يوجد عدد حقيقى $a > 1$ وعدد طبيعى K بحيث إن

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \leq 1 - \frac{a}{n} \qquad \text{for } n \geq K \tag{35.10}$$

فإن المتسلسلة $\sum (x_n)$ تكون تقاربية منتظمة .

(ب) إذا كان يوجد عدد حقيقى $a \leq 1$ وعدد طبيعى K بحيث إن

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \geq 1 - \frac{a}{n} \qquad \text{for } n \geq K \tag{35.11}$$

فإن المتسلسلة $\sum (x_n)$ ليست تقاربية مطلقة .

البرهان . (أ) نفترض أن العلاقة (٣٥ – ١٠) تظل قائمة ، فنحصل على

$$k\,\|x_{k+1}\| \leq (k-1)\,\|x_k\| - (a-1)\,\|x_k\| \qquad \text{for } k \geq K$$

ينتج أن

$$(k-1)\,\|x_k\| - k\,\|x_{k+1}\| \geq (a-1)\,\|x_k\| > 0 \qquad \text{for } k \geq K \tag{35.12}$$

التى منها ينتج أن المتتابعة $(k\,\|x_{k+1}\|)$ تتناقص عند $k \geq K$. بجمع العلاقة (٣٥–١٢) عند $k = K, \ldots, n$ وملاحظة أن الطرف الأيسر يكون تلسكوبياً ، نجد أن

$$(K-1)\,\|x_K\| - n\,\|x_{n+1}\| \geq (a-1)(\|x_K\| + \cdots + \|x_n\|)$$

(*) جوزيف راب (١٨٠١ – ١٨٥٩) ولد فى أكران ودرس فى زيورخ . اشتغل فى كل من الهندسة والتحليل .

مما يوضح أن حواصل الجمع الجزئية من $\sum(\|x_n\|)$ محدودة ويثبت التقارب المطلق للمتسلسلة $\sum(x_n)$

(ب) إذا كانت العلاقة (٣٥ – ١١) تظل قائمة عند $n \geq K$ ، فبما أن $a \leq 1$ ،

$$n\|x_{n+1}\| \geq (n-a)\|x_n\| \geq (n-1)\|x_n\|$$

نجد أن المتتابعة $(n\|x_{n+1}\|)$ تتزايد عند $n \geq K$ ، ويوجد عدد $c > 0$ بحيث إن

$$\|x_{n+1}\| > c/n, \qquad n \geq K$$

بما أن المتسلسلة التوافقية $\sum(1/n)$ تتباعد ، إذن $\sum(x_n)$ لايمكن أن تكون تقاربية مطلقة . وهو المطلوب إثباته

يمكننا أيضاً استخدام اختبار راب لحصول على معلومات عن سرعة التقارب .

٣٥ – ١٠ نتيجة . إذا كانت $a > 1$ وإذا كانت المتتابعة $X = (x_n)$ تحقق (٣٥ – ١٠) ، فإن حواصل الجمع الجزئية تقترب من حاصل جمع s للمتسلسلة $\sum(x_k)$ حسب التقدير

$$\|s - s_n\| \leq \frac{n}{a-1}\|x_{n+1}\| \quad \text{for } n \geq K \tag{35.13}$$

البرهان . نفرض أن $m > n \geq K$ ويجمع المتباينات الناتجة من (٣٥ – ١٢) عند $k = n+1, \ldots, m$ نحصل على

$$n\|x_{n+1}\| - m\|x_{m+1}\| \geq (a-1)(\|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_m\|)$$

و من ثم نجد أن

$$\|s_m - s_n\| \leq \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_m\| \leq \frac{n}{a-1}\|x_{n+1}\|$$

بأخذ النهاية بالنسبة إلى m ، نحصل على (٣٥–١٣) . وهو المطلوب إثباته

فى التطبيق لاختبارات راب ، ربما يكون مناسباً استخدام الصيغة الآتية والأقل حدة للنهاية .

٣٥ – ١١ نتيجة . نفرض أن $X = (x_n)$ متتابعة لعناصر غير صفرية من الفراغ R^p ونضع

$$a = \lim\left(n\left(1 - \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|}\right)\right) \tag{35.14}$$

طالما وجدت هذه النهاية . حينئذ تكون $\sum(x_n)$ تقاربية مطلقة عند $a > 1$ وليست تقاربية مطلقة عند $a < 1$.

البرهان . نفرض أن النهاية (٣٥ – ١٤) موجودة وتحقق $a > 1$. إذا كانت a_1 أى عدد حيث $a > a_1 > 1$ ، فإنه يوجد عدد طبيعى K بحيث إن

$$a_1 < n\left(1 - \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|}\right) \quad \text{for } n \geq K.$$

إذن ، ينتج أن

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} < 1 - \frac{a_1}{n} \quad \text{for } n \geq K$$

وتؤكد نظرية (٣٥ – ٩) التقارب المطلق للمتسلسلة . بالمثل نتناول الحالة التى فيها $a < 1$ ستحذف . وهو المطلوب إثباته

اختبار التكامل :

تقدم الآن اختباراً قوياً ، ينسب إلى ما كلورين(*) ، لمتسلسلة أعداد موجبة .

٣٥ – ١٢ اختبار تكامل . بفرض أن f دالة متصلة ، متناقصة ، وموجبة فى الفترة $\{t : t \geq 1\}$. إذن المتسلسلة $\sum (f(n))$ تتقارب إذا وإذا فقط كان التكامل اللانهائى

$$\int_1^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_n \left(\int_1^n f(t)\, dt\right).$$

موجوداً فى حالة التقارب نجد أن حاصل الجمع الجزئى $s_n = \sum_{k=1}^{n} (f(k))$ وحاصل الجمع $s = \sum_{k=1}^{\infty} (f(k))$ يحققان التقدير

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\, dt \leq s - s_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\, dt \qquad (35.15)$$

البرهان . بما أن f متصلة موجبة وتتناقص فى الفترة $[k - 1, k]$ ، فينتج أن

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \leq f(k-1) \qquad (35.16)$$

بجمع هذه المتباينة عند $k = 2, 3, \ldots, n$ نحصل على العلاقة

$$s_n - f(1) \leq \int_1^n f(t)\, dt \leq s_{n-1}$$

التى توضح أن كلا أولا أحد من النهايتين

(*) كولن ماكلورين (١٦٩٨ – ١٧٤٦) كان تلميذاً لنيوتن وأستاذاً فى أدنبره . وكان الموجه للرياضيات البريطانية فى عصره وساهم فى كل من الهندسة والفيزياء الرياضية .

$$\lim (s_n), \qquad \lim\left(\int_1^n f(t)\, dt\right)$$

موجود . إذا كانا موجودين ، فنحصل بجمع العلاقة (٣٥ – ١٦) عند $k=n+1, \ldots, m$ ، على

$$s_m - s_n \le \int_n^m f(t)\, dt \le s_{m-1} - s_{n-1}$$

ومنها ينتج أن

$$\int_{n+1}^{m+1} f(t)\, dt \le s_m - s_n \le \int_n^m f(t)\, dt$$

إذا أخذنا النهاية بالنسبة إلى m فى هذه المتباينة الأخيرة ، نحصل على (٣٥ – ١٥) . وهو المطلوب إثباته

سنوضح كيفية تطبيق النتائج فى النظريات (٣٥ – ١) إلى (٣٥ – ١٢) على المتسلسلة –P التى قدمناها فى مثال (٣٤ – ٨) (ج) .

٣٥ – ١٣ أمثلة . (أ) سنستخدم أولا اختبار المقارنة . مع العلم أن المتسلسلة التوافقية $\sum (1/n)$ تتباعد ، يلاحظ أنه إذا كانت $p \le 1$ ، فإن $n^p \le n$ ومنها

$$\frac{1}{n} \le \frac{1}{n^p}$$

بعد استخدام اختبار المقارنة (٣٥ – ١) ، نستنتج أن المتسلسلة – p التى هى $\sum (1/n^p)$ تتباعد عند $p \le 1$.

(ب) اعتبر الآن الحالة $p = 2$ ، أى المتسلسلة $\sum (1/n^2)$. نقارن هذه المتسلسلة مع المتسلسلة التقاربية $\sum [1/n(n+1)]$ الموجودة فى مثال (٣٤ – ٨) (هـ) . بما أن العلاقة

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

تظل صحيحة والحدود الموجودة على اليسار تكون متسلسلة تقاربية ، فلايمكننا استخدام نظرية المقارنة مباشرة . لكن ، يمكن استخدام هذه النظرية إذا قارنا الحد النونى من المتسلسلة $\sum [1/n(n+1)]$ بالحد (النونى + ١) من المتسلسلة $\sum (1/n^2)$. بدلا من هذا نستخدم اختبار نهاية المقارنة (٣٥ – ٢) ونلاحظ أن

$$\frac{1}{n(n+1)} \div \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

بما أن النهاية لخارج القسمة هو الواحد الصحيح وبما أن $\sum [1/n(n+1)]$ تتقارب ، فإن المتسلسلة $\sum (1/n^2)$ تتقارب أيضاً .

(ج) نعتبر الحالة $p \geq 2$. إذا لاحظنا أن $n^p \geq n^2$ عند $p \geq 2$ فإن

$$\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$$

فبتطبيق مباشر لاختبار المقارنة نجد أن $\sum (1/n^p)$ تتقارب عند $p \geq 2$. بالتعاقب ، يمكننا استخدام اختبار نهاية المقارنة ونلاحظ أن

$$\frac{1}{n^p} \div \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{n^p} = \frac{1}{n^{p-2}}$$

إذا $p > 2$ ، فإن هذا التعبير يقترب إلى صفر ، وإذن ينتج من نتيجة (٣٥ – ٢) (ب) أن المتسلسلة $\sum (1/n^p)$ تتقارب عند $p \geq 2$.

باستخدام اختبار المقارنة ، لايمكننا الحصول على أى معلومات تتعلق بالمسلسلة – p عند $1 < p < 2$ مالم يمكننا إيجاد متسلسلة معروف صفة تقاربها والتى يمكن مقارنتها بالمتسلسلة فى هذا المدى .

(د) تفرض اختبارى النسبة والجذر بتطبيقهما على المتسلسلة – p . نلاحظ أن

$$\left(\frac{1}{n^p}\right)^{1/n} = (n^{-p})^{1/n} = (n^{1/n})^{-p}$$

من الآن المعروف (انظر مثال ١٤ – ٨) (هـ) أن المتتابعة $(n^{1/n})$ تتقارب إلى الواحد الصحيح . وإذن نحصل على

$$\lim\left(\left(\frac{1}{n^p}\right)^{1/n}\right) = 1$$

ومن هذا نجد أن اختبار الجذر (فى الصورة الموجودة فى النتيجة ٣٥ – ٥) لايمكن تطبيقه .

بنفس الطريقة ، بما أن

$$\frac{1}{(n+1)^p} \div \frac{1}{n^p} = \frac{n^p}{(n+1)^p} = \frac{1}{(1+1/n)^p}$$

وبما أن المتتابعة $((1+1/n)^p)$ تتقارب إلى الواحد الصحيح ، فنجد أن اختبار النسبة (فى الصورة الموجودة فى النتيجة ٣٥ – ٨) لا يطبق .

(هـ) إذا يئسنا ، نستخدم اختبار راب المتسلسلة – p لقيم صحيحة للمقدار p أولا ، نحاول استخدام نتيجة (٣٥ – ١١) . نلاحظ أن

$$n\left(1-\frac{(n+1)^{-p}}{n^{-p}}\right) = n\left(1-\frac{n^p}{(n+1)^p}\right)$$
$$= n\left(1-\frac{(n+1-1)^p}{(n+1)^p}\right) = n\left(1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^p\right)$$

إذا كانت p عدداً صحيحاً ، فإنه يمكننا استخدام نظرية ذات الحدين لحصول على تقدير الحد الأخير . في الحقيقة

$$n\left(1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{p}\right)=n\left(1-1+\frac{p}{n+1}-\frac{p(p-1)}{2(n+1)^{2}}+\cdots\right)$$

إذا أخذنا النهاية بالنسبة إلى n ، نحصل على p . ومن ثم توضح هذه النتيجة لاختبار راب أن المتسلسلة تتقارب لقيم صحيحة من $p \geq 2$ (لكن إذا كانت نظرية ذات الحدين معروفة لقيم غير صحيحة المقدار p ، فيمكن تحسين هذا) .

(و) أخيراً ، نستخدم اختبار التكامل للمتسلسلة p – . نفرض أن $f(t)=t^{-p}$ وتتذكر أن

$$\int_{1}^{n}\frac{1}{t}\,dt=\log(n)-\log(1),$$

$$\int_{1}^{n}\frac{1}{t^{p}}\,dt=\frac{1}{1-p}(n^{1-p}-1)\quad \text{for } p\neq 1$$

من هذه العلاقات نرى أن المتسلسلة – p تتقارب إذا كانت $p>1$ وتتباعد إذا كانت $p\leq 1$.

تمرينـــات :

٣٥ – (أ) أثبت التقارب أو التباعد للمتسلسلة التي حدها النوني معطى كما يلي :

(أ) $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ ، (ب) $\frac{n}{(n+1)(n+2)}$

(ج) $2^{-1/n}$ (د) $n/2^{n}$

(هـ) $[n(n+1)]^{-1/2}$ (و) $[n^{2}(n+1)]^{-1/2}$

(ز) $n!/n^{n}$ (ح) $(-1)^{n}n/(n+1)$

٣٥ – (ب) لكل من المتسلسلات التقاربية في تمرين (٣٥ – أ) ، احسب الباقي في حالة أخذ أربعة حدود فقط . إذا أردنا أن نحدد حاصل الجمع ضمن ١/١٠٠٠ ، كم حداً يجب أن نأخذ ؟ .

٣٥ – (ج) ناقش التقارب أو التباعد للمتسلسلات التي حدها النوني (عنـدما n تكون كبيرة كبراً كافياً) معطى بأنه

(أ) $[\log n]^{-p}$ (ب) $[\log n]^{-n}$

(ج) $[\log n]^{-\log n}$ (د) $[\log n]^{-\log\log n}$

(هـ) $[n\log n]^{-1}$ (و) $[n(\log n)(\log\log n)^{2}]^{-1}$

٣٥ – (د) ناقش التقارب أو التباعد المتسلسلات التي حدها النوني

(أ) $2^n e^{-n}$ (ب) $n^n e^{-n}$

(ج) $1\, e^{-\log n}$ (د) $(\log n)\, e^{\sqrt{n}}$

(ه) $n!\, e^{-n}$ (و) $n!\, e^{-n^2}$

٣٥ – (ه) أثبت أن المتسلسلة

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots$$

تكون تقاربية ، لكن كلا من اختباري النسبة والجذر يفشل في الاستخدام .

٣٥ – (و) إذا كان a, b عددين موجبين ، فإن

$$\sum \frac{1}{(an+b)^p}$$

تتقارب إذا كانت $p > 1$ وتتباعد إذا كانت $p \le 1$.

٣٥ – (ز) اختبر المتسلسلات التي حدها النوني هو

(أ) $\dfrac{n!}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$ (ب) $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

(ج) $\dfrac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}$ (د) $\dfrac{2\cdot 4\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdots(2n+3)}$

٣٥ – (ح) المتسلسلة المعطاة بأنها

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p+\cdots$$

تتقارب عند $p > 2$ وتتباعد عند $p \le 2$.

٣٥ – (ط) نفرض أن $X=(x_n)$ متتابعة في R^p ونفرض أن r معرفة بأنها

$$r = \limsup (\|x_n\|^{1/n})$$

إذن $\sum (x_n)$ تكون تقاربية مطلقة إذا كانت $r < 1$ وتتباعد إذا كانت $r > 1$. [النهاية الأعلى $u = \limsup (b_n)$ لمتتابعة محدودة لأعداد حقيقية عرفناها في باب ١٨ . هي العدد الوحيد u ذو الخواص (i) إذا كانت $u < v$ فإن $b_n \le v$ لجميع $n \in N$ كبيرة كبراً كافياً ، (ii) إذا كانت $w < u$ فإن $w \le b_n$ لأعداد كثيرة عددها لانهائي $n \in N$.

٣٥ – (ى) نفرض أن $X=(x_n)$ متتابعة لعناصر غير صفرية للفراغ R^p ونفرض أن r معرفة بأنها $(\|x_{n+1}\|/\|x_n\|)$

(أ) أثبت أنه إذا كانت $r < 1$ ، فإن المتسلسلة $\sum (x_n)$ تكون تقاربية مطلقاً .

(ب) اعط مثالا لمتسلسلة تقاربية مطلقة حيث $r > 1$.

(ج) إذا كانت $(\|x_{n+1}\|/\|x_n\|) > 1$ ، أثبت أن المتسلسلة $\sum(x_n)$ ليست تقاربية مطلقة .

٣٥ – (ك) نفرض أن $X = (x_n)$ متتابعة لعناصر ليست صفرية للفراغ R^p ونفرض أن a معطاة بواسطة $a = \lim\sup(n(1 - \|x_{n+1}\|/\|x_n\|))$

(أ) إذا كانت $a < 1$ أثبت أن المتسلسلة $\sum(x_n)$ ليست تقاربية مطلقة .

(ب) اعط مثالا لمتسلسلة تباعدية حيث $a > 1$.

(ج) إذا كان $\lim\inf(n(1 - \|x_{n+1}\|/\|x_n\|)) > 1$ أثبت أن المتسلسلة $\sum(x_n)$ تكون تقاربية مطلقة .

٣٥ – (ل) نفرض أن $X = (x_n)$ بحيث أن $x_n > 0$ عند $n \in N$. أثبت أن المتسلسلة $\sum(x_n)$ تكون تباعدية إذا كان

$$\lim\sup\left((\log n)\left[n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) - 1\right]\right) < 1$$

٣٥ – (م) نفرض أن $x_n > 0$ عند $n \in N$ ونفرض أن $n(1 - x_{n+1}/x_n) = a + k_n/n^p$ ، حيث $p > 0$ ، (k_n) محدودة . إذن المتسلسلة $\sum(x_n)$ تتقارب إذا كانت $a > 1$ وتتباعد إذا كانت $a \leq 1$.

٣٥ – (ن) إذا كانت $q > 0$ ، $p > 0$ ، فإن المتسلسلة

$$\sum \frac{(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}{(q+1)(q+2)\cdots(q+n)}$$

تتقارب عند $q > p + 1$ وتتباعد عند $q \leq p + 1$.

٣٥ – (س) أثبت أن المتسلسلة $\sum(2^n n!)^2/(2n+1)!$ تكون تباعدية .

٣٥ – (ع) نفرض أن $x_n > 0$ ونفرض أن $r = \lim\inf(-\log x_n/\log n)$ أثبت أن $\Sigma(x_n)$ تتقارب إذا كانت $r > 1$ وتتباعد إذا كانت $r < 1$.

٣٥ – (ف) نفرض أنه لا أحد من الأعداد a, b, c ليس عدداً صحيحاً سالباً أو صفراً . أثبت أن المتسلسلة فوق الهندسية

$$\frac{ab}{1!c} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)} + \cdots$$

تقاربية مطلقة عند $c > a + b$ وتباعدية عند $c \leq a + b$.

٣٥ – (ص) نفرض أن $a_n > 0$ ونفرض أن $\sum(a_n)$ تتقارب . كون متسلسلة

تقاربية $\sum(b_n)$ حيث $b_n>0$ بحيث أن $\lim(a_n/b_n)=0$ ؛ ومن ثم بين أن $\sum(b_n)$ تتقارب بسرعة أقل من $\sum(a_n)$. (ارشاد : نفرض أن (A_n) هى حواصل الجمع الجزئية للمتسلسلة $\sum(a_n)$ وأن A هى نهايتها . عرف $b_n=\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n}$ و $r_0=A,\ r_n=A-A_n$

٣٥ - (ق) نفرض أن $a_n>0$ ونفرض أن $\sum(a_n)$ تتباعد . كون متسلسلة تباعدية $\sum(b_n)$ حيث $b_n>0$ بحيث أن $\lim(b_n/a_n)=0$ ، ومن ثم $\sum(b_n)$ تتباعد بسرعة أقل عن $\sum(a_n)$ (ارشاد : نفرض أن $b_n=\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n},\ n>1$ و $b_1=\sqrt{a_1}$)

٣٥ - (ر) نفرض أن $\{n_1, n_2, \ldots\}$ ترمز إلى المجموعة لأعداد حقيقية التى لايظهر رقم 6 فى الجزء العشرى لها . أثبت أن المتسلسلة $\Sigma(1/n_k)$ تتقارب إلى عدد أقل من 90 . إذا كانت $\{m_1, m_2, \ldots\}$ هى المجموعة التى تنتهى بالرقم 6 ؛ فإن $\sum(1/m_k)$ تتباعد .

مشروعات :

٣٥ - α بالرغم من أن حواصل الضرب اللانهائية لاتظهر بغالبية مثل المتسلسلات اللانهائية ، فلها أهمية فى اختبارات كثيرة وتطبيقات . للبساطة ، سوف نركز اهتمامنا هنا على حواصل الضرب اللانهائية التى حدودها $a_n>0$. إذا كانت $A=(a_n)$ متتابعة لأعداد حقيقية موجبة دقيقة ، فإن حاصل ضرب لانهائى ، أو المتتابعة لحواصل ضرب جزئية ، المولدة بالمتتابعة A هى المتتابعة $P=(p_n)$ المعرفة بأنها

$$p_1=a_1,\ p_2=p_1a_2(=a_1a_2),\ \ldots,$$
$$p_n=p_{n-1}a_n(=a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n),\ \ldots .$$

إذا كانت المتتابعة P تتقارب إلى عدد ليس صفراً ، فتسمى نهاية P بأنه حاصل الضرب لحاصل الضرب اللانهائى المولد بالمتتابعة A . نقول فى هذه الحالة أن حاصل الضرب اللانهائى يكون تقاربياً ونكتب أما

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \prod(a_n), \qquad \text{أو} \qquad a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$

للدلالة على كلا P ونهاية P .

(ملاحظة : المتطلب أن $\lim P\neq 0$ ليس ضرورياً لكنه تقليدى ، لأنه يثبت أن خواص معينة لحواصل ضرب محدودة تطبق أيضاً على حواصل ضرب لانهائية) .

(أ) وضح أن شرطاً ضرورياً للتقارب لحاصل ضرب لانهائى هو أن $\lim(a_n)=1$

(ب) أثبت أن الشرط الضرورى والكافى للتقارب

$$a_n>0, \qquad \prod_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{هو تقارب}\ \sum_{n=1}^{\infty}\log a_n$$

(ج) حواصل الضرب اللانهائية غالباً لها حدود على الصورة $a_n=1+u_n$. حفظاً

على قيدنا الدائم ، نفرض أن $u_n > -1$ لكل $n \in \mathbf{N}$. إذا كانت $u_n \geq 0$ ، أثبت أن شرطاً ضرورياً كافياً لتقارب حاصل الضرب اللانهائى هو التقارب للمتسلسلة النهائية $\sum(u_n)$ ، (ارشاد : استعمل نهاية اختبار المقارنة ٣٥ – ٢) .

(د) نفرض أن $u_n > -1$. وضح أنه إذا كانت المتسلسلة اللانهائية $\sum(u_n)$ تقاربية مطلقة ، فإن حاصل الضرب اللانهائى $\prod(1+u_n)$ يكون تقاربياً .

(هـ) نفرض أنه $u_n > -1$ وأن المتسلسلة $\sum(u_n)$ تقاربية . إذن شرط ضرورى وكاف لتقارب حاصل الضرب اللانهائى $\prod(1+u_n)$ هو التقارب للمتسلسلة اللانهائية $\sum(u_n^2)$. (ارشاد : استخدم نظرية تايلور ووضح أنه يوجد مقداران ثابتان موجبان A, B بحيث أنه إذا كانت $|u| < \frac{1}{2}$ فإن $Au^2 \leq u - \log(1+u) \leq Bu^2$

الباب السادس والثلاثون – نتائج ابعد للمتسلسلات :

الاختبارات المعطاة فى باب ٣٥ كلها لها الخاصية التى تثبت أنه ، إذا توفرت فروض معينة فإن المتسلسلة $\sum(x_n)$ تكون تقاربية مطلقة . من المعروف الآن أن التقارب المطلق يثبت التقارب العادى ، لكن يتضح حالا من فحص دوال خاصة ، مثل

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}, \qquad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

أن التقارب يمكن حدوثه حتى ولو فشل التقارب المطلق . لذلك يكون من المرغوب به الحصول على اختبار ينتج معلومات عن تقارب عادى . توجد بكثرة مثل هذه الاختبارات التى تستخدم نماذج معينة من المتسلسلات . ربما الاختبارات القابلة للتطبيق فى الحالة العامة بدرجة كبيرة هى التى تنسب إلى أبل(*) ودرشلت .

لإثبات هذه الاختبارات ، نحتاج إلى مفترض يسمى أحياناً قاعدة الجمع الجزئى لأنها تناظر قاعدة التكامل بالتجزىء المألوفة ، فى معظم التطبيقات ، تكون المتتابعتان X, Y متتابعتين فى الفراغ $\mathbf{R}$ ، لكن النتائج تظل صحيحة عند كون Y, X متتابعتين فى الفراغ $\mathbf{R}^p$ ويستخدم حاصل الضرب المددى أو عند كون من X, Y متتابعة حقيقية والأخرى تكون فى $\mathbf{R}^p$.

(*) نيلس هنرك أبل (١٨٠٢ – ١٨٢٩) كان الإبن لرجل دين نرويجى فقير . برهن عندما كان عمره ٢٢سنة فقط عدم إمكانية حل المعادلة من الدرجة الخامسة بواسطة الجذور . هذا العبقرى الذى علم بنفسه أيضاً بحث بحثاً بارزاً فى المتسلسلات والدوال الناقصية قبل موته المبكر بمرض السل .

٣٦ – ١ مفترض أبل . نفرض أن $X=(x_n)$ فى $\mathbf{R}$ ، $Y=(y_n)$ فى $\mathbf{R}^p$ متتابعتان ونفرض أننا نرمز لحواصل الجمع الجزئية $\sum(y_n)$ (بالرمز (s_k) . إذا كانت $m \geq n$ ، فإن

$$\sum_{j=n}^{m} x_j y_j = (x_{m+1}s_m - x_n s_{n-1}) + \sum_{j=n}^{m}(x_j - x_{j+1})s_j \tag{36.1}$$

البرهان . برهان هذه النتيجة يمكن إعطاؤه بملاحظة أن $y_j = s_j - s_{j-1}$ وبمساواة الحدود على كل جانب من المتساوية . سنترك التفاصيل للقارىء . وهوالمطلوب إثباته

نستخدم مفترض أبل لنستنتج أن المتسلسلة $\sum(x_n y_n)$ تكون تقاربية فى حالة كون كلتا المتسلسلتين $\sum(x_n)$ و $\sum(y_n)$ متباعدتين .

٣٦ – ٢ اختبار درشلت . نفرض أن حواصل الجمع الجزئية للمتسلسلة $\sum(y_n)$ محدودة .

(أ) إذا كانت المتتابعة $X=(x_n)$ تقترب من صفر ، وإذا كانت

$$\sum |x_n - x_{n+1}| \tag{36.2}$$

تقاربية ، فإن المتسلسلة $\sum(x_n y_n)$ تقاربية .

(ب) فى الحالة الخاصة ، إذا كانت $X=(x_n)$ متتابعة تناقصية لأعداد حقيقية موجبة وتتقارب إلى صفر ، فإن المتتابعة $\sum(x_n y_n)$ تكون تقاربية .

البرهان . (أ) نفرض أن $\|s_j\| < B$ لكل j . باستخدام (٣٦ – ١) ، نحصل على التقدير

$$\left\|\sum_{j=n}^{m} x_j y_j\right\| \leq \{|x_{m+1}| + |x_n| + \sum_{j=n}^{m}|x_j - x_{j+1}|\}B \tag{36.3}$$

إذا كانت $\lim(x_n) = 0$ ، فإن الحدين الأوليين الموجودين فى الطرف الأيمن يمكن جعلهما صغيرين بدرجة اختيارية بأخذ m, n كبيرين كبراً كافياً . أيضاً إذا تقاربت المتسلسلة (٣٦ – ٢) ، فإن معيار كوشى يؤكد أن الحد الأخير فى هذا الطرف يمكن جعله أقل من ε بأخذ $m \geq n \geq M(\varepsilon)$. ومن ثم يدل معيار كوشى على أن المتسلسلة $\sum(x_n y_n)$ تكون تقاربية .

(ب) إذا كانت $x_1 \geq x_2 \geq \cdots$ ، فإن المتسلسلة فى (٣٦ – ٢) تكون تلسكوبية وتقاربية . وهو المطلوب إثباته

٣٦ – ٣ نتيجة . فى جزء (ب) ، نحصل على تقدير الخطأ

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j - \sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right\| \leq 2x_{n+1}B$$

حيث B هى الحد الأعلى لحواصل الجمع الجزئية $\sum (y_j)$.

البرهان . حصلنا على المطلوب حالا من علاقة (٣٦ – ٣) . وهو المطلوب إثباته

الاختبار الآتى يقوى الفرض على المتسلسلة $\sum (y_n)$ ، لكن يضعف الفرض على $\sum (x_n)$

٣٦ – ٤ اختبار أبل . نفرض أن المتسلسلة $\sum (y_n)$ تتقارب فى R^p

(أ) إذا كانت المتتابعة $X = (x_n)$ فى $\mathbf{R}$ بحيث أن المتسلسلة

$$\sum |x_n - x_{n+1}| \tag{36.2}$$

تقاربية ، فإن المتسلسلة $\sum (x_n y_n)$ تكون تقاربية .

(ب) بوجه خاص ، إذا كانت المتتابعة $X = (x_n)$ إطرادية وتقاربية إلى x فى $\mathbf{R}$ ، حينئذ المتسلسلة $\sum (x_n y_n)$ تقاربية .

البرهان . (أ) من الفرض ، تتقارب حواصل الجمع الجزئية s_k للمتسلسلة $\Sigma(y_n)$ إلى عنصر ما s فى $\mathbf{R}^p$. ومن ثم توجد B محدودة خاصة بالفئة $\{\|s_k\| : k \in N\}$ وبأخذ $\varepsilon > 0$ نجد أنه يوجد $N_1(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $n \geq N_1(\varepsilon)$ ، فإن $\|s_n - s\| < \varepsilon$.

الآن الفرض الآن بأن (٣٦ – ٢) تقاربية يدل على أنه إذا كانت $n \in \mathbf{N}$ فإن ،

$$\begin{aligned} |x_n| &\leq |x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})| \\ &\leq |x_1| + \sum_{k=1}^{n-1} |x_k - x_{k+1}| \end{aligned}$$

وإذن $|x_n| < A$ لقيمة ما $A > 0$. وبالإضافة إلى ذلك ، يوجد $N_2(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $m > n \geq N_2(\varepsilon)$ ، فإن

$$|x_{m+1} - x_n| \leq \sum_{j=n}^{m} |x_{j+1} - x_j| < \varepsilon \tag{36.4}$$

نفرض الآن $N_3(\varepsilon) = \sup \{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ بحيث أنه إذا كانت $m > n > N_3(\varepsilon)$ فنحصل على

$$\begin{aligned} &\|x_{m+1} s_m - x_n s_{n-1}\| \\ &\quad \leq \|x_{m+1} s_m - x_{m+1} s\| + \|x_{m+1} s - x_n s\| + \|x_n s - x_n s_{n-1}\| \\ &\quad \leq |x_{m+1}| \, \|s_m - s\| + |x_{m+1} - x_n| \, \|s\| + |x_n| \, \|s - s_{n-1}\| \\ &\quad \leq A\varepsilon + \varepsilon B + A\varepsilon = (2A + B)\varepsilon \end{aligned}$$

لذلك ، بواسطة مفترض أبل (٣٦ – ١) ، إذا كانت $m > n > N_3(\varepsilon)$ فينتج

$$\left\|\sum_{j=n}^{m} x_j y_j\right\| \le (2A+B)\varepsilon + \left\|\sum_{j=n}^{m} (x_j - x_{j+1}) s_j\right\|$$
$$\le (2A+B)\varepsilon + \left(\sum_{j=n}^{m} |x_j - x_{j+1}|\right) B$$
$$\le 2(A+B)\varepsilon$$

حيث استخدمنا (٣٦ – ٤) فى الخطوة الأولى . وهذا يثبت التقارب للمتسلسلة $\sum (x_j y_j)$ لأن $\varepsilon > 0$ واختيارية .

(ب) إذا كانت المتتابعة (x_n) إطرادية وتقترب إلى x ، فإن المتسلسلة (٣٦ – ٢) تكون تلسكوبية وتقترب إما إلى $x - x_1$ أو إلى $x_1 - x$. وهو المطلوب إثباته

إذا استخدمنا نفس النموذج من المناقشة فيمكننا إثبات تقدير الخطأ الآتى :

٣٦ – ٥ نتيجة . حصلنا فى جزء (ب) ، على تقدير الخطأ

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j - \sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right\| \le |x_{n+1}|\, \|s - s_n\| + 2B\, |x - x_{n+1}|$$

متسلسلات متعاقبة (أو متناوبة) :

يوجد نوع هام بوجه خاص للمتسلسلات الحقيقية التقاربية الشرطية ، أى التى حدودها تكون بالتعاقب موجبة وسالبة .

٣٦ – ٦ تعريف . متتابعة $X = (x_n)$ لأعداد حقيقية غير صفرية تكون متعاقبة إذا كانت الحدود $(-1)^n x_n,\ n = 1, 2, \ldots$ أعدادها حقيقية كلها موجبة (أو كلها سالبة) إذا كانت متتابعة $X = (x_n)$ متعاقبة ، فنقول أن المتسلسلة $\sum (x_n)$ التى تولدها متسلسلة متعاقبة .

من المفيد أن نضع $x_n = (-1)^n z_n$ ونتطلب أن $z_n > 0$ (أو $z_n < 0$) لجميع $n = 1, 2, \ldots$. يمكن دراسة التقارب للمتسلسلات المتناوبة بسهولة إذا أمكن استخدام النتيجة الآتية التى برهنها ليبنتز .

٣٦ – ٧ اختبار متسلسلة متناوبة . نفرض أن $Z = (z_n)$ متتابعة تناقصية لأعداد حقيقية دقيقة حيث $\lim (z_n) = 0$. حينئذ المتسلسلة المتعاقبة $\sum ((-1)^n z_n)$ تقاربية . وبالإضافة إلى ذلك ، إذا كانت s هى حاصل الجمع لهذه المتسلسلة وأن s_n هى حاصل الجمع الجزئى النونى ، فإذن نحصل على التقدير

$$|s - s_n| \le z_{n+1} \qquad (36.5)$$

لسرعة التقارب

البرهان . هذا ينتج مباشرة من اختبار درشلت (٣٦-٢) (ب) إذا أخذنا $y_n = (-1)^n$ لكن تقدير الخطأ المعطى فى نتيجة (٣٦ - ٣) ليس دقيقاً مثل التقدير فى (٣٦-٥) يمكننا أيضاً الشروع مباشرة لتوضيح الاستنتاج الرياضى أنه إذا كانت $m \geq n$ ، فإن

$$|s_m - s_n| = |z_{n+1} - z_{n+2} + \cdots + (-1)^{m-n-1} z_m| \leq |z_{n+1}|$$

هذا ينتج كلا من التقارب والتقدير (٣٦ - ٥) وهو المطلوب إثباته

٣٦ - ٨ أمثلة . (أ) المتسلسلة $\sum((-1)^n/n)$ تسمى أحياناً بالمتسلسلة التوافقية المتعاقبة ، ليست تقاربية مطلقة . لكن ، ينتج من اختبار المتسلسلات المتعاقبة أنها تقاربية .

(ب) بالمثل ، المتسلسلة $\sum((-1)^2/\sqrt{n})$ تقاربية ، لكن ليست تقاربية مطلقة .

(ج) نفرض أن $x \in \mathbf{R}$ ونفرض أن $k \in \mathbf{Z}$. إذن ، بما أن

$$2 \cos kx \sin \tfrac{1}{2}x = \sin (k + \tfrac{1}{2})x - \sin (k - \tfrac{1}{2})x$$

فينتج أن

$$2 \sin \tfrac{1}{2}x[\cos x + \cdots + \cos nx] = \sin (n + \tfrac{1}{2})x - \sin \tfrac{1}{2}x$$

ومن ثم ، إذا كانت x ليست مضاعفاً صحيحاً للمقدار 2π ، فإن

$$\cos x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin (n + \frac{1}{2})x - \sin \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x} \tag{36.6}$$

لذلك ، إذا كانت $x \notin \{2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ ، فإن

$$|\cos x + \cdots + \cos nx| \leq \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}x|}$$

يمكننا حينئذ استخدام اختبار درشلت (٣٦ - ٢) (ب) لنستنتج أن المتسلسلة $\sum (1/n) \cos nx$ تتقارب لكل $x \notin \{2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$. نلاحظ أن هذه المتسلسلة تتباعد عند $x = 2k\pi$ عند بعض $k \in \mathbf{Z}$.

(د) نفرض أن $x \in \mathbf{R}$ ونفرض أن $k \in \mathbf{Z}$. حينئذ بما أن

$$2 \sin kx \sin \tfrac{1}{2}x = \cos (k - \tfrac{1}{2})x - \cos (k + \tfrac{1}{2})x$$

ينتج أن

$$2 \sin \tfrac{1}{2}x[\sin x + \cdots + \sin nx] = \cos \tfrac{1}{2}x - \cos (n + \tfrac{1}{2})x$$

ومن ثم ، إذا كانت x ليست مضاعفاً صحيحاً للمقدار 2π فإن

$$\sin x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos (n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x}$$

لذلك ، إذا كانت $x \notin \{2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ ، فإن

$$|\sin x + \cdots + \sin nx| \le \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}x|}$$

كما سبق ، يثبت اختبار درشلت تقارب المتسلسلة

$$\sum (1/n) \sin nx \quad \text{لجميع} \quad x \notin \{2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$$

نلاحظ أن هذه المتسلسلة تتقارب عند $x = 2k\pi$ عند $k \in \mathbf{Z}$.

(هـ) نفرض أن $Y = (y_n)$ متتابعة فى الفراغ R^2 عناصرها هى

$$y_1 = (1, 0), \qquad y_2 = (0, 1), \qquad y_3 = (-1, 0),$$
$$y_4 = (0, -1), \ldots, y_{n+4} = y_n, \ldots .$$

لاحظنا حالا أن المتسلسلة $\sum (y_n)$ لاتتقارب ، لكن حواصل الجمع الجزئية لها s_n محدودة ، فى الحقيقة يكون $\|s_n\| \le \sqrt{2}$. إذن يوضح اختبار درشلت أن المتسلسلة $\sum (1/n) y_n$ تكون تقاربية فى R^2

متسلسلات مزدوجة :

يكون أحياناً ضرورياً أن نعتبر حواصل جمع لانهائية تعتمد على رقين صحيحين . تتطور النظرية لمثل هذه المتسلسلات المزدوجة باختزالها إلى متتابعات مزدوجة ، أى أن كل النتائج فى باب ١٩ الخاصة بالمتتابعات المزدوجة يمكن تفسيرها للمتسلسلات المزدوجة . لكن ، سوف لانستنتج من نتائج باب ١٩ ، وبدلا من ذلك ، سوف نركز انتباهنا إلى المتسلسلات المزدوجة التقاربية المطلقة ، حيث أن هذه المتسلسلات هى النموذج للمتسلسلات المزدوجة التى تظهر كثيراً جداً .

نفرض أنه لكل زوج (i, j) فى $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ عنصر x_{ij} فى الفراغ R^p . نعرف حاصل الجمع الجزئى الذى رتبته (m, n) أى s_{mn} بأنه

$$s_{mn} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

وكما فى تعريف ٣٤ – ١ ، سوف نقول أن المتسلسلة المزدوجة $\sum (x_{ij})$ تتقارب إلى عنصر x فى R^p إذا كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعى $M(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $m \ge M(\varepsilon)$ وكانت $n \ge M(\varepsilon)$ فإن

$$\|x - s_{mn}\| < \varepsilon$$

وكما فى تعريف ٣٤ – ٦ ، سوف نقول أن المتسلسلة المزدوجة $\sum (x_{ij})$ تكون تقاربية مطلقة إذا كانت المتسلسلة المزدوجة $\sum (\|x_{ij}\|)$ فى $\mathbf{R}$ تقاربية .

نوضح كتمرين أنه إذا كانت المتسلسلة المزدوجة تقاربية مطلقة ، فإنها تقاربية وبالإضافة إلى ذلك ، المتسلسلة المزدوجة تقاربية مطلقة إذا وإذاً فقط كانت الفئة

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\|x_{ij}\| : m, n \in \mathbf{N}\right\} \tag{36.7}$$

فئة محدودة لأعداد حقيقية .

نرغب في ربط المتسلسلات المزدوجة بالمتسلسلات المكررة ، لكن سوف نناقش فقط المتسلسلات التقاربية المطلقة . النتيجة الآتية أولية جداً ، لكنها تعطى معياراً مفيداً للتقارب المطلق للمتسلسلات المزدوجة .

٣٦ – ٩ مفترض . نفرض أن المتسلسلة المكررة $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\|x_{ij}\|$ تتقارب . إذن المتسلسلة المزدوجة $\sum(x_{ij})$ تكون تقاربية مطلقة .

البرهان . من الفرض تتقارب كل متسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_{ij}\|$ إلى عدد موجب $a_j, j \in \mathbf{N}$ وبالإضافة إلى ذلك ، تتقارب المتسلسلة $\sum(a_j)$ إلى عدد A . من الواضح أن A . حد أعلى للفئة (٣٦ – ٧) . وهو المطلوب إثباته

٣٦ – ١٠ نظرية . نفرض أن المتسلسلة المزدوجة $\sum(x_{ij})$ تتقارب مطلقاً إلى x في $\mathbf{R}^p$. حينئذ كلتا المتسلسلتين المكررتين .

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}x_{ij}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_{ij} \tag{36.8}$$

تتقاربان أيضاً إلى x

البرهان . من الفرض نجد أنه يوجد عدد حقيقي موجب A يكون حداً أعلى للفئة في (٣٦ – ٧) . نلاحظ أنه إذا كانت n ثابتة ، أن

$$\sum_{i=1}^{m}\|x_{in}\| \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\|x_{ij}\| \le A$$

لكل m في $\mathbf{N}$. من ذلك ينتج أنه ، لكل $n \in \mathbf{N}$ ، تتقارب المتسلسلة الفردية $\sum_{i=1}^{\infty}(x_{in})$ تقارباً مطلقاً لعنصر y_n في $\mathbf{R}^p$

إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، فنفرض $M(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $m, n \ge M(\varepsilon)$ ، فإن

$$\|s_{mn} - x\| < \varepsilon \tag{36.9}$$

وحسب العلاقة

$$s_{mn} = \sum_{i=1}^{m}x_{i1} + \sum_{i=1}^{m}x_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{m}x_{in}$$

نستنتج أن

$$\lim_m (s_{mn}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i1} + \sum_{i=1}^{\infty} x_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{\infty} x_{in}$$

$$= y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

إذا عبرنا إلى النهاية فى (٣٦ — ٩) بالنسبة إلى m ، نحصل على العلاقة

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} y_j - x \right\| \le \varepsilon, \qquad n \ge M(\varepsilon)$$

مما يثبت أن حاصل الجمع المكرر الأول فى (٣٦ — ٨) موجود ويساوى x . يستخدم برهان مماثل لحاصل الجمع المكرر الثانى . وهو المطلوب إثباته

توجد طريقة إضافية لجمع المتسلسلات المزدوجة التى سنعتبرها ، وذلك بالجمع على الأقطار $i + j = n$.

٣٦ — ١١ نظرية . نفرض أن المتسلسلة المزدوجة $\sum (x_{ij})$ تتقارب مطلقاً إلى x فى R^p . إذا عرفنا

$$t_k = \sum_{i+j=k} x_{ij} = x_{1,k-1} + x_{2,k-2} + \cdots + x_{k-1,1}$$

فإن المتسلسلة $\sum (t_k)$ تتقارب مطلقاً إلى x .

البرهان . إذا فرضنا أن A هى أعلى الفئة فى (٣٦ — ٧) فنلاحظ أن

$$\sum_{k=2}^{n} \|t_k\| \le \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \|x_{ij}\| \le A$$

ومن ثم تكون المتسلسلة $\sum (t_k)$ تقاربية مطلقة ؛ يتبقى أن توضح أنها تتقارب إلى x بفرض أن $\varepsilon > 0$ نفرض أن M بحيث أن

$$A - \varepsilon < \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} \|x_{ij}\| \le A$$

إذا كانت $m, n \ge M$ ، فينتج أن $\|s_{mn} - s_{MM}\|$ لا يكون أكبر من حاصل الجمع $\sum (\|x_{ij}\|)$ المأخوذ على كل الأزواج (i, j) التى تحقق أما $M < i \le m$ أو $M < j \le n$ إذن $\|s_{mn} - s_{MM}\| < \varepsilon$ ، عند $m, n \ge M$. ينتج من هذا أن $\|x - s_{MM}\| \le \varepsilon$ توضح مناقشة مشابهة أنه إذا كانت $n \ge 2M$ فإن

$$\left\| \sum_{k=2}^{n} t_k - s_{MM} \right\| < \varepsilon$$

ومنها ينتج أن $x = \sum t_k$ وهو المطلوب إثباته

حاصل ضرب كوشى :

فى عملية حاصل ضرب متسلسلتين قوى وتجميع الحدود طبقاً للقوى ، ينتج ، طبيعياً جداً ، طريقة جديدة لتوليد متسلسلة من متسلسلتين معطيتين . بهذا الارتباط من المفيد رمزياً أن نأخذ الحدود للمتسلسلة ذات أدلة $0, 1, 2, \ldots$

٣٦ – ١٢ تعريف . إذا كانت $\sum_{i=0}^{\infty}(y_i)$ و $\sum_{j=0}^{\infty}(z_j)$ متسلسلتين لانهائيتين فى الفراغ $\boldsymbol{R}^p$ حاصل ضربهما كوشى هو المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty}(x_k)$ ، حيث

$$x_k = y_0 \cdot z_k + y_1 \cdot z_{k-1} + \cdots + y_k \cdot z_0$$

هنا تدل النقطة على حاصل الضرب القياسى فى $\boldsymbol{R}^p$. يمكننا بطريقة مشابهة تعريف حاصل ضرب كوشى للمتسلسلة فى الفراغ $\boldsymbol{R}$ والمتسلسلة فى الفراغ $\boldsymbol{R}^p$.

ربما يفشل ، مع قليل من الدهشة ، حاصل ضرب كوشى لمتسلسلتين تقاربيتين فى أن تتقارب لكن ، يلاحظ أن المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

تقاربية ، لكن الحد النونى فى حاصل ضرب كوشى لهذه المتسلسلة فى نفسها هو

$$(-1)^n\left[\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{1}}\right]$$

بما أنه يوجد $n+1$ حداً داخل القوسين وكل حد يزيد عن $1/(n+2)$ ، فإن الحدود فى حاصل ضرب كوشى لاتقترب من صفر مما يثبت أن حاصل ضرب كوشى لايمكن أن يتقارب .

٣٦ – ١٣ نظرية . إذا كانت المتسلسلتان $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ ، $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ تتقاربان مطلقاً y, z فى $\boldsymbol{R}^p$ ، فإن حاصل ضرب كوشى لهما يتقارب مطلقاً إلى $z \cdot y$.

البرهان . إذا كانت $i, j = 0, 1, 2, \ldots$ ، فنفرض أن $x_{ij} = y_i \cdot z_j$. تدل المعطيات على أن المتسلسلتين المكررتين $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\|x_{ij}\|$ تتقاربان . من المفترض ٣٦ – ٩ ، تكون المتسلسلة المزدوجة $\sum(x_{ij})$ تقاربية مطلقة للعدد الحقيقى x . باستخدام نظريتى ٣٦ – ١٠ و ٣٦ – ١١ ، نستنتج أن كلا من المتسلسلتين

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} x_{ij}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+j=k} x_{ij}$$

تتقاربان إلى x . برهنا حالا على أن المتسلسلة المكررة تتقارب إلى $z \cdot y$ وأن المتسلسلة القطرية كوشى للمتسلسلتين $\sum(z_i)$ و $\sum(y_i)$ وهو المطلوب إثباته

فى حالة $p=1$ فقد برهن مرتنس(*) على أن التقارب المطلق لأحد المتسلسلتين يكون كافياً لإثبات التقارب لحاصل ضرب كوشى . وبالإضافة إلى ذلك وضح سيزارو أن المتوسطات الحسابية لحواصل الجمع الجزئية لحواصل ضرب كوشى تتقارب إلى yz (أنظر تمرينى ٣٧ – س – ع) .

تمرينـــات :

٣٦ – (أ) اعتبر المتسلسلة

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}++--\dots$$

حيث تؤخذ العلامات مثنى . هل تتقارب ؟

٣٦ – (ب) نفرض أن $a_n \in R$ عند $n \in N$ ونفرض أن $p<q$. إذا كانت المتسلسلة $\sum (a_n/n^p)$ تقاربية ، فإن المتسلسلة $\sum (a_n/n^q)$ تكون أيضاً تقاربية .

٣٦ – (ج) إذا كانا q ، p عددين موجبين مضبوطين ، فإن المتسلسلة

$$\sum (-1)^n \frac{(\log n)^p}{n^q}$$

تقاربية

٣٦ – (د) ناقش المتسلسلات الآتية التى حدها النونى هو

(أ) $(-1)^n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ (ب) $\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

(ج) $(-1)^n \dfrac{(n+1)^n}{n^n}$ (د) $\dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

٣٦ – (هـ) بفرض أن $\sum (a_n)$ متسلسلة تقاربية لأعداد حقيقية . أثبت أنه إما $\sum (b_n)$ تتقارب أو أعط مثالا عكسياً ، عندما تعرف b_n بأنها

(أ) a_n/n (ب) $\sqrt{a_n}/n \quad (a_n \geq 0)$

(ج) $a_n \sin n$ (د) $\sqrt{a_n/n} \quad (a_n \geq 0)$

(هـ) $n^{1/n} a_n$ (و) $a_n/(1+|a_n|)$

٣٦ – (و) أثبت أن المتسلسلة

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}++-\cdots$$

تبـــاعدية .

(*) فرانز (س . ج) مرتنس (١٨٤٠–١٩٢٧) تعلّم فى برلين ودرس فى كراكو وفينا ساهم أساساً فى الهندسة ونظرية العدد والجبر .

٣٦ – (ز) أسقط الفرض بأن (z_n) متناقصة أثبت أن اختيار المتسلسلة المتعاقبة (٣٦ – ٧) ربما يفشل .

٣٦ – (ح) إذا كانت $n \in N$ ، نفرض أن c_n معرفة بأنها

$$c_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

أثبت أن (c_n) متتابعة متناقصة لأعداد موجبة . تسمى النهاية C لهذه المتتابعة بثابت أيلر ويساوى تقريبياً 0.577 . أثبت أنه إذا وضعنا

$$b_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}$$

فإن المتتابعة (b_n) تتقارب إلى $\log 2$ (ارشاد : $b_n = c_{2n} - c_n + \log 2$)

٣٦ – (ط) نفرض أن $\sum(a_{mn})$ متسلسلة مزدوجة معطاة كما يلي

$a_{mn} = +1$	إذا	$m - n = 1$
$= -1$	إذا	$m - n = -1$
$= 0$		خلاف ذلك

أثبت أن كلا حاصل الجمع المكررين موجودان ، لكنهما غير متساويين وأثبت أن حاصل الجمع المزدوج غير موجود . لكن ، إذا دلت (s_{mn}) على حواصل الجمع الجزئية ، فإن $\lim(s_{nn})$ موجودة .

٣٦ – (ى) أثبت أنه إذا كانت المتسلسلة المكررة والمسلسلة المزدوجة للمتسلسلة $\sum(a_{mn})$ موجودتين فإنهما متساويان . أثبت أن وجود المتسلسلة المزدوجة لايدل على وجود المتسلسلة المكررة ، فى الحقيقة لا يدل وجود المتسلسلة المزدوجة حتى على أن $\lim_n(a_{mn}) = 0$ لكل m .

٣٦ – (ك) أثبت أنه إذا كانت $p > 1$ ، $q > 1$ ، فإن المتسلسلة المزدوجة

$$\sum\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^p}\right) \quad \text{و} \quad \sum\left(\frac{1}{m^p n^q}\right)$$

تكون تقاربية .

٣٦ – (ل) بتقسيم $\sum(1/n^2)$ إلى متسلسلتين للأجزاء الفردية والزوجية أثبت أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

٣٦ – (م) إذا كانت $|a| < 1$ و $|b| < 1$ ، أثبت أن المتسلسلة

$$a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$$

تقاربية . ماهى النهاية ؟

٣٦ – (ن) إذا كانت $\sum (b_n^2)$ ، $\sum (a_n^2)$ تقاربيتين ، فإن $\sum (a_n b_n)$ تكون تقاربية مطلقة وأنه

$$\sum a_n b_n \leq \{\sum a_n^2\}^{1/2} \{\sum b_n^2\}^{1/2}$$

وبالإضافة إلى ذلك ، تتقارب $\sum (a_n + b_n)^2$ ويكون

$$\{\sum (a_n + b_n)^2\}^{1/2} \leq \{\sum a_n^2\}^{1/2} + \{\sum b_n^2\}^{1/2}$$

٣٦ – (س) أثبت نظرية مرتنس : إذا كانت $\sum (a_n)$ تتقارب تقارباً مطلقاً إلى A كانت $\sum (b_n)$ تتقارب إلى B ، فإن حاصل ضرب كوشى لها يتقارب إلى AB . (إرشاد : نفرض أنه يرمز لحواصل الجمع الجزئية بالرموز A_n, B_n, C_n على الترتيب أثبت أنه $\lim (C_{2n} - A_n B_n) = 0$ و $\lim (C_{2n+1} - A_n B_n) = 0$.)

٣٦ – (ع) أثبت نظرية سيزارو : نفرض أن $\sum (a_n)$ تتقارب إلى A وأن $\sum (b_n)$ تتقارب إلى B . ونفرض أن $\sum (c_n)$ حاصل ضرب كوشى لها . إذا كانت (C_n) هى المتتابعة لحواصل جمع جزئية من $\sum (c_n)$ فإن .

$$\frac{1}{n}(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) \to AB$$

(إرشاد : اكتب $C_1 + \cdots + C_n = A_1 B_n + \cdots + A_n B_1$ ، قسم هذا الجمع إلى ثلاثة أجزاء ، واستخدم الحقيقة التى تقول إن $A_n \to A$ و $B_n \to B$)

الباب السابع والثلاثون – متسلسلات دوال :

ستقوم الآن مناقشة المتسلسلات اللانهائية لدوال ، وذلك بسبب ظهورها المتكرر وأهميتها – بما أن التقارب لمتسلسلة لانهائية يعامل بفحص المتتابعة لحواصل جمع جزئية فإن الاستفسارات الخاصة بمتسلسلات الدوال تكون الإجابة عليها بفحص الاستفسارات المناظرة لمتتابعة دوال . ولهذا السبب ، يكون جزء من الباب الحاضر هو مجرد ترجمة لحقائق أثبتناها قبل ذلك لمتتابعات ودوال إلى مصطلحات ورموز للمتسلسلات . هذه هى الحالة ، مثال ذلك ، عند جزء الباب المتعلق بالمتسلسلات لدوال عامة . لكن تظهر فقط فى الجزء الثانى من الباب ، حيث نناقش متسلسلات القوى ، بعض صور جديدة بسبب الميزة الخاصة للدوال التى يحتويها .

٣٧ – ١ تعريف . إذا كانت (f_n) متتابعة لدوال معرفة فى فئة جزئية D للفراغ R^p بقيم فى الفراغ R^q ، وكانت المتتابعة لحواصل جمع جزئية (s_n) المتسلسلة اللانهائية $\sum (f_n)$ معرفة عند x فى D بأنها

$$
\begin{aligned}
&s_1(x) = f_1(x),\\
&s_2(x) = s_1(x) + f_2(x) \qquad [= f_1(x) + f_2(x)],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&s_{n+1}(x) = s_n(x) + f_{n+1}(x) \qquad [= f_1(x) + \cdots + f_n(x) + f_{n+1}(x)],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

نقول فى حالة كون المتابعة (s_n) تتقارب فى D لدالة f ، أن المتسلسلة اللانهائية لدوال $\sum(f_n)$ تتقارب إلى f فى D . سنكتب غالباً

$$\sum(f_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(f_n) \quad \text{أو} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n \ .$$

لنرمز إما إلى المتسلسلة أو دالة النهاية ، إن وجدت .

إذا كانت المتسلسلة $\sum(\|f_n(x)\|)$ تتقارب لكل x فى D فنقول إن $\sum(f_n)$ تقاربية مطلقة فى D . إذا كانت المتابعة (s_n) تقاربية منتظمة فى D إلى f ، فنقول إن $\sum(f_n)$ تقاربية منتظمة فى D ، أو أنها تتقارب بانتظام إلى f فى D .

أحد الأسباب الرئيسية للاهتمام بمتسلسلات دوال تقاربية منتظمة هى صحة النتائج الآتية التى تعطى شروط تغيير ترتيب عمليات الجمع وعمليات أخرى للنهايات .

٣٧ – ٢ نظرية . إذا كانت f_n متصلة فى $D \subseteq \mathbf{R}^p$ إلى $\mathbf{R}^q$ لكل $n \in \mathbf{N}$ وإذا كانت $\sum(f_n)$ تتقارب بانتظام إلى f فى D فإن f تكون متصلة فى D .

هذا تحويل مباشر لنظرية (٢٤ – ١) للمتسلسلات . النتيجة الآتية هى ترجمة لنظرية (٣١ – ٢) .

٣٧ – ٣ نظرية . نفرض أن الدوال لقيم حقيقية $f_n, n \in \mathbf{N}$ ، قابلة لتكامل ريمان – اشتلتجز بالنسبة إلى دالة اطرادية g فى الفترة $J = [a, b]$. إذا كانت المتسلسلة $\sum(f_n)$ تتقارب بانتظام إلى f فى J فإن f تكون قابلة لتكامل ريمان – اشتلتجز بالنسبة إلى g وتكون

$$\int_a^b f\,dg = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n\,dg \qquad (37.1)$$

الآن نعيد صياغة نظرية التقارب الاطرادى ٣١ – ٤ إلى صورة المتسلسلات .

٣٧ – ٤ نظرية . إذا كانت الدوال الموجبة f_n قابلة لتكامل ريمان فى الفترة $J = [a, b]$ وإذا كانت حواصل الجمع لها $f = \sum(f_n)$ قابلة لتكامل ريمان ، فإن

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n \qquad (37.2)$$

نتجه بعد ذلك إلى النظرية المناظرة المتعلقة بالتفاضل سنفترض هنا أن التقارب للمتسلسلة التى نحصل عليها بالتفاضل حداً فحداً للمتسلسلة المعطاة يكون منتظماً . هذه النتيجة هى نتيجة مباشرة لنظرية ٢٨ — ٥ .

٣٧ — ٥ نظرية . لكل $n \in N$ ، نفرض أن f_n دالة لقيم موجبة فى الفترة $J = [a, b]$ ولها مشتقة f'_n فى J . نفرض أن المتسلسلة اللانهائية $\sum (f_n)$ تتقارب عند نقطة واحدة على الأقل من الفترة J وأن متسلسلة المشتقات $\sum (f'_n)$ تتقارب بانتظام فى J . إذن توجد دالة حقيقية القيمة f فى J بحيث أن $\sum (f_n)$ تتقارب بانتظام فى J إلى f وبالإضافة إلى ذلك ، تكون f لها مشتقة فى J وأن

$$f' = \sum f'_n \tag{37.3}$$

اختبارات لتقارب منتظم :

بما أننا قد أثبتنا بعض نتائج لتقارب منتظم لمتسلسلات ، فسنقدم الآن اختبارات قليلة يمكن استخدامها لإثبات تقارب منتظم .

٣٧ — ٦ معيار كوشى : نفرض أن (f_n) متتابعة لدوال فى $D \subseteq R^p$ إلى R^q . المتسلسلة النهائية $\sum (f_n)$ تكون تقاربية منتظمة فى D إذا وإذا فقط كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ ، $M(\varepsilon)$ بحيث أنه إذا كانت $m \geq n \geq M(\varepsilon)$ فإن

$$\|f_n + f_{n+1} + \cdots + f_m\|_D < \varepsilon \tag{37.4}$$

برهان هذه النتيجة ينتج فى الحال من (١٧—١١) ، التى هى معيار كوشى المناظر للتقارب المنتظم لمتتابعات .

٣٧ — ٧ اختبار M لفيرشتراس . نفرض أن (M_n) متتابعة لأعداد حقيقية ليست سالبة بحيث أن $\|f_n\|_D \leq M_n$ لكل $n \in N$. إذا كانت المتسلسلة اللانهائية $\sum (M_n)$ تقاربية ، فإن $\sum (f_n)$ ، تكون تقاربية بانتظام فى D .

البرهان . إذا كانت $m > n$ ، فنحصل على العلاقة

$$\|f_n + \cdots + f_m\|_D \leq \|f_n\|_D + \cdots + \|f_m\|_D \leq M_n + \cdots + M_m$$

ينتج النص من معيار كوشى (٣٤ — ٥) ، (٣٧ — ٦) والتقارب للمتسلسلة $\sum (M_n)$. وهو المطلوب إثباته

النتيجتان الآتيتان مفيدتان جداً لإثبات تقارب منتظم عندما يكون التقارب غير مطلق . نحصل على برهانهما بتعديل برهانى (٣٦ — ٢) ، (٣٦ — ٤) وستتركان كتمرين .

٣٧ — ٨ اختبار درشلت . نفرض أن (f_n) متتابعة دوال فى $D \subseteq R^p$ إلى R^q

بحيث تكون جميع حواصل الجمع الجزئية

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} f_j, \qquad n \in N$$

محدودة فى نطاق D – عودى . نفرض أن (φ_n) متتابعة متناقصة لدوال فى D إلى R بحيث تتقارب بانتظام فى D إلى صفر ، حينئذ تتقارب المتسلسلة $\sum(\varphi_n f_n)$ بانتظام فى D .

٣٧ – ٩ اختبار أبل . نفرض أن $\sum(f_n)$ متسلسلة دوال فى $D \subseteq R^p$ إلى R^q بحيث تتقارب بانتظام فى D . نفرض أن (φ_n) متتابعة اطرادية لدوال حقيقية القيمة فى D ومحدودة فى النطاق D – العمودى . حينئذ تتقارب المتسلسلة $\sum(\varphi_n f_n)$ بانتظام فى D .

٣٧ – ١٠ أمثلة . (أ) اعتبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n/n^2)$. إذا كانت $|x| \le 1$ ، فإن $|x^n/n^2| \le 1/n^2$. بما أن المتسلسلة $\sum(1/n^2)$ تقاربية ، فينتج من اختبار M لڤيرشتراس أن المتسلسلة المعطاة تقاربية منتظمة فى الفترة $[-1, 1]$.

(ب) المتسلسلة التى حصلنا عليها بتفاضل المتسلسلة فى (أ) حداً فحداً هى $\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n-1}/n)$ لايستعمل الاختبار M لڤيرشتراس فى الفترة $[-1, 1]$ لذلك لا يمكننا استخدام نظرية (٣٧ – ٥) . فى الحقيقة ، من الواضح أن هذه المتسلسلة للمشتقات لا تتقارب عند $x = 1$. لكن ، إذا كانت $0 < r < 1$ ، فإن المتسلسلة الهندسية $\sum(r^{n-1})$ تتقارب . بما أن

$$\left|\frac{x^{n-1}}{n}\right| \le r^{n-1}$$

عند $|x| \le r$ ، فينتج من اختبار M — أن المتسلسلة الناتجة من التفاضل تكون تقاربية منتظمة فى الفترة $[-r, r]$.

(ج) تطبيق مباشر لاختبار — M (حيث $M_n = 1/n^2$) يثبت أن $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)\sin nx$ تقاربية منتظمة لكل x فى R .

(د) حيث أن المتسلسلة التوافقية $\sum(1/n)$ تتباعد ، فلا يمكننا استخدام اختبار – M إلى

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)\sin nx \tag{37.5}$$

لكن ، ينتج من المناقشة فى مثال (٣٦ – ٨ د) أنه إذا كانت الفترة $J\,[a, b]$ محتواة فى الفترة المفتوحة $(0, 2\pi)$ ، فإن حواصل الجمع الجزئية $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\sin kx$ تكون محدودة بانتظام فى الفترة J . بما أن المتابعة $(1/n)$ تتناقص إلى صفر ، فيثبت اختبار درشلت (٣٧ – ٨) أن المتسلسلة (٣٧ – ٥) هى تقاربية منتظمة فى J .

(ه) اعتبر $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n/n)e^{-nx}$ فى الفترة $I = [0, 1]$. بما أن العمود للحد النونى فى I هو $1/n$ ، فلا يمكننا استخدام اختبار ڤيرشتراس ، ويمكن استخدام اختبار درشلت

إذا أمكننا إثبات أن حواصل الجمع الجزئية $\sum((-1)^n e^{-nx})$ محدودة وبالتعاقب يستخدم اختبار أبل لأن $\sum((-1)^n/n))$ تقاربية والمتابعة المحدودة (e^{-nx}) تتناقص باطراد فى I (لكن ليست تقاربية بانتظام إلى صفر) .

متسلسلات قوى :

سوف نتجه الآن لمناقشة متسلسلات قوى . هذا نوع هام من متسلسلات دوال ويتمتع بخواص ليست صحيحة فى حالة متسلسلات عامة للدوال .

٣٧ – ١١ تعريف : يقال لمتسلسلة لدوال حقيقية $\sum(f_n)$ إنها متسلسلة قوى حول $x = c$ إذا كانت الدالة f_n فى الصورة

$$f_n(x) = a_n(x-c)^n$$

حيث c و a_n تنتمى إلى R وحيث .... $n = 0, 1, 2,$.

لغرض التبسيط لمفهومنا ، سنعتبر فقط الحالة عندما $c = 0$. هذا لايفقد الحالة العامة ، مع ذلك ، لان التعويض $x' = x - c$ يحول متسلسلة قوى حول c إلى متسلسلة قوى حول 0 . أى أن عندما نذكر متسلسلة قوى ، فسوف نقصد متسلسلة فى الصورة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{37.6}$$

وبالرغم من أن الدوال المذكورة فى (٣٧ – ٦) معرفة على كل الفراغ R ، فليس من المتوقع أن تتقارب المتسلسلة (٣٧ – ٦) لجميع x فى R . مثال ذلك ، يمكننا باستخدام اختبار النسبة (٣٥ – ٨) إثبات أن المتسلسلات

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$$

تتقارب عند x فى الفئات

$$\{0\}, \qquad \{x \in R : |x| < 1\}, \qquad R$$

على الترتيب . أى أن الفئة التى فيها تتقارب متسلسلة قوى ربما تكون صغيرة ، متوسطة أو كبيرة . لكن ، لا يمكن لفئة جزئية اختيارية من R أن تكون الفئة الدقيقة التى فيها تتقارب متسلسلة قوى ، كما سنوضح .

إذا كانت (b_n) متابعة محدودة لأعداد حقيقية غير سالبة ، فإننا نعرف النهاية الأعلى المتابعة (b_n) بأن تكون الأدنى لأعداد مثل v بحيث أن $b_n \le v$ لكل $n \in N$ كبيرة . كبراً كافياً . يكون هذا الأدنى محدداً وحيدا . ويرمز له بالرمز

$$\limsup\,(b_n)$$

أعطيت بعض مميزات وخواص للنهاية الأعلى لمتابعة فى باب (١٨) ، لكن الشيء الذى نحتاج لمعرفته فقط هو (i) أنه إذا كانت $v > \limsup (b_n)$ ، فإن $b_n \leq v$ لكل $n \in \mathbf{N}$ كبيرة كبراً كافياً ، (ii) أنه إذا كانت $w < \limsup (b_n)$ فإن $w \leq b_n$ قيم كثيرة عددها لانهائى $n \in \mathbf{N}$

٣٧ – ١٢ تعريف . نفرض أن $\sum (a_n x^n)$ متسلسلة قوى . إذا كانت المتتابعة $(|a_n|^{1/n})$ محدودة ، نضع $\rho = \limsup (|a_n|^{1/n})$ ، إذا كانت هذه المتتابعة ليست محدودة نضع $\rho = +\infty$. نعرف نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum (a_n x^n)$ كما يلى

$$R = 0 \quad \text{إذا} \quad \rho = +\infty$$
$$= 1/\rho \quad \text{إذا} \quad 0 < \rho < +\infty$$
$$= +\infty \quad \text{إذا} \quad \rho = 0$$

فترة التقارب هى الفترة المفتوحة $(-R, R)$.

سوف نبرر الآن التعبير « نصف قطر التقارب » .

٣٧ – ١٣ نظرية كوشى – هادامارد(*) . إذا كان R نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى $\sum (a_n x^n)$ ، فإن المتسلسلة تقاربية مطلقة إذا كانت $|x| < R$ وتباعدية إذا كانت $|x| > R$.

البرهان . سوف نتناول فقط الحالة التى فيها $0 < R < +\infty$ ، تاركين الحالتين $R = 0, \ R = +\infty$ كتمرينين . إذا كانت $0 < |x| < R$ فإنه يوجد عدد موجب $c < 1$ بحيث أن $|x| < c\mathbf{R}$. إذن $\rho < c/|x|$ ولذلك ينتج أنه إذا كانت n كبيرة كبراً كافياً ، فإن $|a_n|^{1/n} \leq c/|x|$. هذا يكافىء النص

$$|a_n x^n| \leq c^n \tag{37.7}$$

لكل n كبيرة كبراً كافياً . بما أن $c < 1$ ، فينتج التقارب المطلق للمتسلسلة $\sum (a_n x^n)$ من اختبار المقارنة (٣٥ – ١) .

إذا كانت $|x| > R = 1/\rho$ ، فإنه توجد قيم كثيرة عددها لانهائى $n \in \mathbf{N}$ التى عندها تكون $|a_n|^{1/n} > 1/|x|$. إذن $|a_n x^n| > 1$ عند قيم n كثيرة عددها لانهائى ، ومن ثم لاتقترب المتتابعة $(a_n x^n)$ إلى صفر . وهو المطلوب إثباته

(*) جاكويز هادامارد (١٨٦٥–١٩٦٣)، كان لوقت طويل عميداً للرياضيين الفرنسيين سمح له بالدخول لمدرسة التكنولوجيا حيث نال أعلى الدرجات خلال القرن الأول . كان خلفاً لهنرى بوينكار لأكاديمية العلوم وبرهن نظرية العدد الأولى فى عام ١٨٩٦ ، بالرغم من أن هذه النظرية قد أثبتها جاوس قبله بسنين كثيرة ، له إسهامات أخرى فى نظرية العدد ، التحليل المركب ، المعادلات التفاضلية الجزئية وحتى علم النفس .

سيلاحظ أن نظرية كوشى – هادامارد لاتنص على ون متسلسلة القوى تتقارب عند $|x| = R$. فى الحقيقة ، أى شىء يمكن يحدث كما يتضح من الأمثلة الآتية :

$$\sum x^n, \quad \sum \frac{1}{n} x^n, \quad \sum \frac{1}{n^2} x^n \tag{37.8}$$

بما أن $\lim (n^{1/n}) = 1$ (١٤ – ٨ (ﻫ)) ، فإن كلا من متسلسلات القوى المذكورة لها نصف قطر التقارب مساو للواحد الصحيح . لا تتقارب متسلسلة القوى الأولى عند النقط $x = +1$ و $x = -1$ ، المتسلسلة الثانية تتقارب عند $x = -1$ وتتباعد عند $x = +1$. ومتسلسلة القوى الثالثة تتقارب عند كل من $x = -1$ ، $x = +1$. (أوجد متسلسلة قوى فيها $R = 1$ وتتقارب عند $x = +1$ لكن تتباعد عند $x = -1$) .

توضح كتمرين أن نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum (a_n x^n)$ هو

$$\lim\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right) \tag{37.9}$$

بشرط وجود هذه النهاية . مراراً ، يكون من المناسب أكثر أن تستعمل (٣٧ – ٩) بدلا من تعريف (٣٧ – ١٢) .

يثبت النقاش المستعمل فى برهان نظرية كوشى – هادامارد التقارب المنتظم لمتسلسلة قوى فى أى فئة جزئية مدمجة ثابتة من فترة التقارب $(-R, R)$

٣٧ – ١٤ نظرية . نفرض أن R نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum (a_n x^n)$ ونفرض أن K فئة جزئية مدمجة فى فترة التقارب $(-R, R)$. إذن متسلسلة القوى تتقارب بانتظام فى K.

البرهان : يثبت الدمج المقدار $K \subseteq (-R, R)$ أنه يوجد مقدار ثابت موجب $c < 1$ بحيث أن $|x| < cR$ لكل $x \in K$ ، (لماذا ؟) . نستنتج من النقاش الموجود فى (٣٧ – ١٣) أنه عندما n تكون كبيرة كبراً كافياً ، فإن التقدير (٣٧ – ٧) يظل صحيحاً لجميع $x \in K$. بما أن $c < 1$ ، فإن التقارب المنتظم للمتسلسلة $\Sigma (a_n x^n)$ فى K نتيجة مباشرة لاختبار M – الفيرشتراس حيث $M_n = c^n$ وهو المطلوب إثباته

٣٧ – ١٥ نظرية . نهاية متسلسلة القوى متصلة فى فترة التقارب . متسلسلة قوى يمكن تكاملها حداً فحداً فى أى فترة مدمجة محتواه فى فترة التقارب .

البرهان . إذا كانت $|x_0| < R$ ، فإن النتيجة السابقة تؤكد أن $\sum (a_n x^n)$ تتقارب بانتظام فى أى حوار مدمج عند x_0 محتوى فى $(-R, R)$. إذن ينتج الاتصال عند x_0 من نظرية (٣٧ – ٢) ، والتكامل حداً فحداً يتحقق من نظرية (٣٧ – ٣) .

وهو المطلوب إثباته .

نوضح الآن أن المتسلسلة قوى يمكن تفاضلها حداً فحداً . لا نحتاج كما هو الحال فى حالة المتسلسلات العامة ، إلى فرض أن المتسلسلة الناتجة من التفاضل تقاربية منتظمة . ومن ثم هذه تكون النتيجة أقوى من النتيجة المناظرة لتفاضل المتسلسلات اللانهائية .

٣٧ – ١٦ نظرية تفاضل . يمكن تفاضل متسلسلة قوى يمكن حداً فحداً داخل فترة تقارب . فى الحقيقة ، إذا كانت

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n) \quad \text{حينئذ} \quad f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(na_nx^{n-1})$$

كلتا المتسلسلتين لهما نفس نصف قطر التقارب .

البرهان . حيث أن $\lim(n^{1/n})=1$ ، فإن المتتابعة $(|na_n|^{1/n})$ تكون محدودة إذا وإذاً فقط كانت المتتابعة $(|a_n|^{1/n})$ محدودة . وبالإضافة إلى ذلك ، يكون من السهل ملاحظة أن

$$\lim\sup(|na_n|^{1/n})=\lim\sup(|a_n|^{1/n})$$

وإذن ، يكون نصف قطر التقارب للمتسلسلتين واحداً ، لذلك تكون المتسلسلة السابقة الناتج من التفاضل تقاربية منتظمة فى كل فئة جزئية مدمجة من فترة التقارب .

حينئذ يمكننا استخدام نظرية (٣٧ – ٥) لنستنتج أن المتسلسلة السابقة الناتجة من التفاضل تتقارب إلى المشتقة للمتسلسلة المعطاة .

يجب ملاحظة أن النظرية لا تعطى تأكيداً عند النقطتين المحدودتين لفترة التقارب . إذا كانت المتسلسلة تقاربية عند نقطة حدودية ، فإن المتسلسلة الناتجة من التفاضل ربما تتقارب عند هذه النقطة . مثال ذلك ، المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)$ تتقارب عند كل من النقطتين النهائيتين $x=-1$ ، $x=+1$. لكن ، المتسلسلة الناتجة من التفاضل

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m+1}$$

تتقارب عند $x=-1$ وتتباعد عند $x=+1$.

وبتكرار تطبيق النتيجة السابقة ، نستنتج أنه إذا كانت k أى عدد طبيعى فإن المتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}(x^n/n^2)$ يمكن تفاضلها حداً فحداً k من المرات لنحصل على

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_nx^{n-k} \tag{37.10}$$

وبالإضافة إلى ذلك ، تتقارب هذه المتسلسلة تقارباً مطلقاً ومنتظماً إلى $f^{(k)}$ عند $|x|<R$ على أى فئة جزئية مدمجة من فترة التقارب .

إذا عرضنا $x = 0$ فى (٣٧ - ١٠) ، نحصل على القانون الهام

$$f^{(k)}(0) = k!\,a_k. \tag{37.11}$$

٣٧ - ١٧ نظرية الانفرادية . إذا كانت $\sum (a_n x^n)$ ، $\sum (b_n x^n)$

تتقارب فى فترة ما $(-r, r), r > 0$ ، إلى نفس الدالة f ، فإن

$a_n = b_n$ لجميع $n \in \mathbf{N}$.

البرهان . توضح ملاحظاتنا السابقة أن $n!\,a_n = f^{(n)}(0) = n!\,b_n$ عند $n \in \mathbf{N}$. وهو المطلوب إثباته .

بعض نتائج اضافية(*) :

يوجد عدد من النتائج الخاصة بارتباطات جبرية مختلفة لمتسلسلات القوى . لكن يمكن برهنة هذه التى تحتوى على تعويض وتعاكس بسهولة أكثر باستخدام مناقشات من التحليل المركب . لهذا السبب سوف لا نتعرض لهذه الأسئلة لكن نكتفى بنتيجة فى هذا الاتجاه . وهى لحسن الحظ من أعظم النتائج المفيدة .

٣٧ - ١٨ نظرية حاصل ضرب . إذا كانت f و g معطيتين فى الفترة $(-r, r)$ بمتسلسلتى القوى

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

فإن حاصل ضربهما يعطى فى هذه الفترة بالمتسلسلة $\sum (c_n x^n)$ ، حيث المعاملات (c_n) هى

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad for \;\; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

البرهان . قد رأينا فى (٣٧ - ١٣) أنه إذا كانت $|x| < r$ ، فإن المتسلسلتين المعطيتين $f(x)$ و $g(x)$ تقاربيتان مطلقتان إذا استخدمنا نظرية (٣٦ - ١٣) ، نحصل على الاستنتاج المطلوب وهو المطلوب إثباته .

نؤكد نظرية حاصل الضرب أن نصف قطر التقارب لحاصل الضرب هو على الأقل يساوى r . لكن من الممكن أن يكون كبيراً كما يلاحظ بسهولة .

قد رأينا أنه ، لكى تمثل دالة f بمتسلسلة قوى فى فترة $(-r, r), r > 0$ ، يكون من الضرورى أن كل مشتقات f موجودة فى هذه الفترة . ربما يشتبه فى أن هذا الشرط كاف أيضاً ، لكن

(*) يمكن حذف بقية هذا الباب عند القراءة لاول مرة .

الأمور ليست بهذه البساطة . مثال ذلك ، الدالة f ، المعطاة بأنها

$$f(x) = e^{-1/x^2}, \qquad x \neq 0 \tag{37.12}$$
$$= 0, \qquad x = 0$$

يمكن إثبات (انظر تمرين ٣٧ – ن) أن لهـــا مشتقات من كل الرتب وأن $f^{(n)}(0) = 0$ عند $n = 0, 1, 2, \ldots$. إذا مكن إعطاء f فى فترة $(-r, r)$ بمتسلسلة قوى حول $x = 0$ ، فينتج من نظرية الانفرادية (٣٧ – ١٧) أن المتسلسلة يجب أن تتلاشى تطابقياً ، مما يخالف الحقيقة التى تقول إن $f(x) \neq 0$ عندما $x \neq 0$.

توجد ، بالرغم من ذلك ، بعض شروط كافية مفيدة يمكن إعطاؤها لكى تضمن إمكانية تمثيل f بمتسلسلة قوى . كمثال ، نلاحظ أنه ينتج من نظرية تايلور (٢٨ – ٦) أنه إذا كان يوجد مقدار ثابت $B > 0$ بحيث أنه

$$|f^{(n)}(x)| \leq B \tag{37.13}$$

لجميع $n = 0, 1, 2, \ldots$ و $|x| < r$ ، حينئذ $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)x^n/n!$ تتقارب إلى $f(x)$ عند $|x| < r$. يمكن إعطاء شروط مشابهة (لكن أقل قوة) على مقدار المشتقات بحيث تؤدى إلى نفس الاستنتاج .

نقدم كمثال ، نتيجة مفيدة ودقيقة ترجع إلى سرجى برنشتين خاص بمفكوك طرف واحد لدالة فى صورة متسلسلة قوى .

٣٧ – ١٩ نظرية برنشتين . نفرض أن f معرفة ولها مشتقات من كل الرتب فى الفترة $[0, r]$ ونفرض أن f وجميع مشتقاتها موجبة فى الفترة $[0, r]$.

إذا كانت $0 \leq x < r$ ، فإن $f(x)$ تعطى بالمفكوك .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

البرهان . سوف نستفيد من صورة التكامل للباقى فى نظرية تايلور المعطاة بالعلاقة (٣١–٣)، إذا كانت $0 \leq x \leq r$ ، فإن

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n \tag{37.14}$$

حيث نجد القانون

$$R_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}(sx)\, ds$$

بما أن كل الحدود فى حاصل الجمع الموجود فى (٣٧ – ١٤) موجبة فإن

$$f(r) \geq \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}(sr)\, ds \tag{37.15}$$

بما أن $f^{(n+1)}$ موجبة ، $f^{(n)}$ متزايدة فى $[0, r]$ ، لذلك إذا كانت x فى هذه الفترة ، يكون

$$0 \leq R_n \leq \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}(sr)\, ds \tag{37.16}$$

بربط (٣٧-١٥) ، (٣٧-١٦) ، نجد أن $0 \leq R_n \leq (x/r)^{n-1} f(r)$. ومن ثم إذا كانت $0 \leq x < r$ فإن $\lim (R_n) = 0$ وهو المطلوب إثباته .

قد رأينا فى نظرية (٣٧ - ١٤) أن متسلسلة قوى تتقارب بانتظام فى كل فئة جزئية مدمجة من فترة تقاربها . لكن ، لايوجد شرط سابق يدعو للاعتقاد بأن هذه النتيجة يمكن امتدادها للنقط الطرفية لفترة التقارب . وبالرغم من ذلك ، توجد نظرية لآبل تقول إنه ، إذا كان تقارباً ممكناً عند أى من النقطتين الطرفيتين ، فإن المتسلسلة تتقارب بانتظام خارجاً إلى هذه النقطة الطرفية .

لتبسيط التصور سوف نفرض أن نصف قطر التقارب للمتسلسلة يساوى الواحد الصحيح . وهذا لا يفقد الحالة العامة ويمكن دائماً إدراكها بجعل $x' = x/R$ ، التى هى فقط تغيير للمقياس .

٣٧ - ٢٠ نظرية آبل . نفرض أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)$ تتقارب إلى $f(x)$ عند $|x| < 1$ وأن $\sum_{n=0}^{\infty} (a_k)$ تتقارب إلى A . حينئذ متسلسلة القوى تتقارب بانتظام فى الفترة $\mathbf{I} = [0, 1]$ ويكون

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = A \tag{37.17}$$

البرهان : يطبق اختبار آبل (٣٧ - ٩) ، حيث $f_n(x) = a_n$ وحيث $\varphi_n(x) = x^n$ لإثبات التقارب المنتظم للمتسلسلة $\sum (a_n x^n)$ فى I . ومن ثم فإن النهاية متصلة فى I ، بما أنها تتفق مع $f(x)$ عند $0 \leq x < 1$ ، فنتيجة علاقة النهاية (٣٧ - ١٧) تنتج .

وهو المطلوب إثباته .

أحد الأشياء المشوقة بدرجة كبيرة لهذه النتيجة هو إيعازها بطريقة ربط نهاية لمتسلسلات ربما تكون تقاربية . أى أنه ، إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n)$ متسلسلة لا نهاية، فإنه يمكننا تكوين متسلسلة القوى المناظرة $\sum (b_n x^n)$. إذا كان المقدار b_n لايزداد بسرعة كبيرة ، فإن هذه متسلسلة القوى تتقارب إلى دالة $B(x)$ عندما $|x| < 1$. إذا كانت $B(x) \to \beta$ عندما $x \to 1-$ فنقول إن المتسلسلة $\sum (b_n)$ هى قابلة لجمع آبل إلى β . هذا النموذج من الجمع يكون مشابهاً إلى (لكن أكثر قوة عن) طريقة سيزارو للمتوسط الحسابى المشار إليه فى باب ١٩ وله نتائج عميقة ومشوقة . مضمون نظرية آبل (٣٧ - ٢٠) يشابه نظرية (١٩ - ٣) ، وهو يثبت أنه إذا

كانت متسلسلة تقاربية من قبل، فإنها تكون قابلة لجمع آبل إلى نفس النهاية. العكس ليس صحيحاً، لكن ، المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ ليست تقاربية لكن حيث أن

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

فينتج أن $\sum(-1)^n$ قابل لجمع آبل إلى $\frac{1}{2}$.

يحدث أحياناً أنه إذا كانت متسلسلة معرفة بأنها قابلة لجمع آبل ، وإذا تحققت شروط أخرى معينة ، فإنه من الممكن البرهنة على أن المتسلسلة تقاربية بالفعل . تسمى نظريات من هذا النوع بنظريات توبريان وهى غالباً عميقة وصعبة البرهان . هذه النظريات مفيدة أيضاً لأنها تمكن الشخص من الانتقال من نموذج أضعف للتقارب إلى نموذج أقوى ، بشرط تحقق فروض إضافية معينة .

نظريتنا النهائية هى النتيجة الأولى من هذا النوع وقد برهنت بواسطة أ. توبر(*) فى ١٨٩٧ . وتمدنا بعكس جزئى لنظرية آبل .

٣٧ – ٢١ نظرية توبر . نفرض أن متسلسلة القوى $\sum(a_n x^n)$ تتقارب إلى $f(x)$ عند $|x|<1$ ونفرض أن $\lim(na_n)=0$. إذا كانت $\lim f(x)=A$ عند $x \to 1-$ فإن المتسلسلة $\sum(a_n)$ تتقارب إلى A .

البرهان . من المرغوب فيه تقدير الاختلافات مثل $\sum^N(a_n)-A$. . لإجراء هذا ، نكتب

$$\sum_{n=0}^{N}a_n-A=\left\{\sum_{n=0}^{N}a_n-f(x)\right\}+\{f(x)-A\} \tag{37.18}$$

$$=\sum_{n=0}^{N}a_n(1-x^n)-\sum_{N+1}^{\infty}a_n x^n+\{f(x)-A\}$$

بما أن $0 \le x<1$ ، فنحصل $1-x^n=(1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1})<n(1-x)$
لذلك يمكننا سيطرة الحد الأول فى الطرف الأيمن بالتعبير $(1-x)\sum_{n=0}^{N}na_n$

من الفرض $\lim(na_n)=0$ ومن ثم تثبت نظرية (١٩ – ٣) أن

$$\lim\left(\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}na_n\right)=0$$

وبالإضافة إلى ذلك ، نحصل على القانون $A=\lim f(x)$

(*) ألفريد توبر (١٨٦٦ — تقريباً) ١٩٤٧) كان أستاذاً بفينا . له مساهمات أساسية فى التحليل .

نفرض الآن أن $\varepsilon > 0$ معطاة ونختار عدداً طبيعياً ثابتاً N بحيث تكون كبيراً بدرجة تسمح بكون

$$\text{(i)}\quad \left|\sum_{n=0}^{N} na_n\right| < (N+1)\varepsilon;$$

$$\text{(ii)}\quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{N+1} \qquad \text{for all } n \geq N;$$

$$\text{(iii)}\quad |f(x_0) - A| < \varepsilon \qquad \text{for } x_0 = 1 - \frac{1}{N+1}$$

سوف نقدر مقدار (٣٧ – ١٨) لهذه القيمة لعدد N ، x_0 . من (i) و (ii) و (iii) وحقيقة أن $(1-x_0)(N+1) = 1$ نحصل على التقدير

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| \leq (1-x_0)(N+1)\varepsilon + \frac{\varepsilon}{N+1}\,\frac{x_0^{N+1}}{1-x_0} + \varepsilon < 3\varepsilon$$

بما أن هذه يمكن إجراؤها لكل $\varepsilon > 0$ فهذا يثبت التقارب للمتسلسلة $\sum(a_n)$ إلى A .

تمرينـــات :

٣٧ – (أ) ناقش التقارب والتقارب المنتظم للمتسلسلة $\sum(f_n)$ ، حيث $f_n(x)$ معطاة كما يلي :

(أ)	$(x^2+n^2)^{-1}$,	(ب)	$(nx)^{-2}, x \neq 0$
(ج)	$\sin(x/n^2)$,	(د)	$(x^n+1)^{-1}, x \geq 0$
(هـ)	$x^n(x^n+1)^{-1}, x \geq 0$	(و)	$(-1)^n(n+x)^{-1}, x \geq 0$

٣٧ – (ب) إذا كانت $\sum(a_n)$ متسلسلة تقاربية مطلقة ، فإن المتسلسلة $\sum(a_n \sin nx)$ تكون تقاربية مطلقة ومنتظمة .

٣٧ – (ج) نفرض أن (c_n) متتابعة متناقصة لأعداد موجبة . إذا كانت المتسلسلة $\sum(c_n \sin nx)$ تقاربية منتظمة ، فإن $\lim(nc_n) = 0$.

٣٧ – (د) أعط التفاصيل لبرهان اختبار درشلت (٣٧ – ٨) .

٣٧ – (هـ) أعط التفاصيل لبرهان اختبار آبل (٣٧ – ٩) .

٣٧ – (و) ناقش الحالتين $R = 0,\ R = +\infty$ في نظرية كوشي – هادامارد (٣٧– ١٣) .

٣٧ – (ز) أثبت أن نصف قطر التقارب R لمتسلسلة القوى $\sum(a_nx^n)$ معطى بأنه $\lim(|a_n|/|a_{n+1}|)$ ، طالما وجدت هذه النهاية . أعط مثالا لمتسلسلة قوى منها هذه النهاية غير موجودة .

٣٧ – (ح) حدد نصف قطر التقارب المتسلسلة $\sum(a_nx^n)$ ، حيث a_n معطاة كما يلي :

(أ)	$1/n^n$	(ب)	$n^n/n!$
(ج)	$n^n/n!$	(د)	$(\log n)^{-1},\ n \geq 2$
(ه)	$(n!)^2/(2n)!$	(و)	$n^{-\sqrt{n}}$

٣٧ – (ط) إذا كانت $a_n = 1$ حيث n هي مربع عدد طبيعي وأن $a_n = 0$ فيما عدا ذلك ، أوجد نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum(a_nx^n)$. إذا كانت $b_n = 1$ عندما $n = m!$ حيث $m \in N$ ، وأن $b_n = 0$ فيما عدا ذلك، أوجد نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum(b_nx^n)$

٣٧ – (ى) أثبت بتفاصيل أن $\lim\sup(|na_n|^{1/n}) = \lim\sup(|a_n|^{1/n})$

٣٧ – (ك) إذا كانت $0 < p \leq |a_n| \leq q$ لكل $n \in N$ ، أوجد نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum(a_nx^n)$.

٣٧ (ل) – نفرض أن $f(x) = \sum(a_nx^n)$ عند $|x| < R$. إذا كانت $f(x) = f(-x)$ لجميع $|x| < R$ ، أثبت أن $a_n = 0$ لجميع قيم n الفردية .

٣٧ (م) – أثبت أنه إذا كانت f معرفة عند $|x| < r$ وإذا كان يوجد مقدار ثابت B بحيث أن $|f^{(n)}(x)| \leq B$ لكل $|x| < r$ وأن $n \in N$ ، فإن مفكوك متسلسلة تايلور .

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

تتقارب إلى $f(x)$ عندما $|x| < r$.

٣٧ – (ن) أثبت بالاستنتاج أن للدالة المعطاة فى قانون (٣٧ – ١٢) مشتقات من كل الرتب عند كل نقطة وأن كلا من هذه المشتقات تنعدم عند $x = 0$. حينئذ لا تعطى هذه الدالة كفكوك تايلور عند $x = 0$.

٣٧ – (س) أعط مثالا لدالة تكون مساوية إلى مفكوك متسلسلتها تايلور حول $x = 0$ عند $x \geq 0$ ، لكنها ليست مساوية لهذه المفكوك عند $x < 0$.

٣٧ – (ع) توضح المنـــاقشة المبينة فى تمرين ٢٨ – م أن قانون لاجرانج للباق يمكن استخدامه لإثبات مفكوك ذات الحدين العام

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$$

حيث x هى فى الفترة $0 \leq x < 1$. بالمثل يثبت تمرين (٢٨ – ن) . صحة هذا المفكوك عندما $-1 < x \leq 0$ ، لكن الاستدلال يكون مبنياً على صورة كوشى للباق وأحياناً أكثر تورطاً . يطبق نظرية برنشين على $g(x) = (1-x)^m$ عند $0 \leq x < 1$ للحصـــول على برهان تبادلى لهذه الحالة الثانية .

٣٧ – (ف) اعتبر مفكوك ذات الحدين عند النقطتين الطرفيتين $x = \pm 1$. أثبت أنه إذا كانت $x = -1$ ، فإن المتسلسلة تتقارب مطلقاً عندما $m \geq 0$ وتتباعد عندما $m < 0$. إذا كانت $x = +1$ ، فإن المتسلسلة تتقارب مطلقاً عندما $m \geq 0$ ، تتقارب شرطياً عندما $-1 < m < 0$ ، وتتباعد عندما $m \leq -1$.

٣٧ – (ص) يفرض أن $f(x) = \tan x$ عندما $|x| < \pi/2$. استخدم الحقيقة التي تقول أن f فردية ونظرية برنشتين لإثبات أن f معطاة في هذه الفترة بمفكوك متسلسلة تايلور لها حول $x = 0$.

٣٧ – (ق) استخدم نظرية آبل لإثبات أنه إذا كانت $f(x) = \sum (a_n x^n)$ عند $|x| < R$ فإن

$$\int_0^R f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$$

بشرط كون المتسلسلة الموجودة في الطرف الأيمن تقاربية حتى ولو أن المتسلسلة الأصلية ربما لا تكون تقاربية عند $x = R$. ومن ذلك ينتج أن

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \qquad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

٣٧ – (ر) باستخدام نظرية آبل ، أثبت أنه إذا كانت المتسلسلتان $\sum (b_n)$ و $\sum (a_n)$ تقاربيتين وإذا كان حاصل ضرب كوشي لهما $\sum (c_n)$ تتقارب، فنجد أن $\sum (c_n) = \sum (a_n) \cdot \sum (b_n)$

٣٧ (ش) – نفرض أن $a_n \geq 0$ وأن نصف قطر التقارب للمتسلسلة $f(x) = \sum (a_n x^n)$ هو ١ . إذا كانت $\sum (a_n)$ تتباعد ، أثبت أن $f(x) \to +\infty$ عند $x \to 1-$. استخدم هذه النتيجة لإثبات نظرية توبريان الأولية : أي إذا كانت $a_n \geq 0$ وإذا كانت

$$A = \lim_{x \to 1-} \sum a_n x^n$$

فإن $\Sigma (a_n)$ تتقارب إلى A .

٣٧ – (ت) نفرض أن $\sum_{n=0}^{\infty} (p_n)$ متسلسلة تباعدية لأعداد موجبة بحيث أن نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum (p_n x^n)$ يساوى واحداً. أثبت نظرية آبل(*): إذا كانت $s = \lim (a_n/p_n)$ فإن نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum (a_n x^n)$ يساوى أيضاً واحداً ويكون

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sum a_n x^n}{\sum p_n x^n} = s$$

(*) بول آبل (١٨٥٥ — ١٩٣٠) كان تلميذا لهرميت فى السربون.. قدم أبحاثا فى التحليل المركب .

(إرشاد : يكفى اعتبار الحالة التى فيها $s = 0$ أيضاً استخدم حقيقة أن $\lim_{x \to 1} [\sum (p_n x^n)]^{-1} = 0$

٣٧ – (ث) استخدم نظرية آبل عندما $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)$ لحصول على نظرية آبل .

٣٧ – (خ) إذا كانت (a_n) متتابعة لأعداد حقيقية وكانت $a_0 = 0$ ، نفرض أن $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ وبفرض أن $\sigma_n = (s_1 + \cdots + s_n)/n$. أثبت نظرية فروبينوس(**) إذا كانت $s = \lim (\sigma_n)$ فإن

$$s = \lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

ملاحظة . بلغة المصطلحات الرياضية لنظرية القابلية لجمع ، تقول هذه النتيجة أنه إذا كانت متتابعة (a_n) قابلة لجمع سيزارو إلى s ، فتكون أيضاً قابلة لجمع آبل إلى s . (إرشاد : طبق نظرية آبل على $p(x) = (1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n x^{n-1})$ ولاحظ أن $\sum (n \cdot \sigma_n x^n) = p(x) \sum (a_n x^n)$.)

مشروعات :

٣٧ (α) – تمتد نظرية متسلسلات القوى المذكورة فى الكتاب إلى متسلسلات قوى مركبة .

(أ) حسب الملاحظات الموجودة فى باب (١٣) ، تكون كل التعريفات والنظريات ذات الدلالة والصحيحة للمتسلسلات فى R^2 صحيحة أيضاً للمتسلسلات بعناصر فى C . بوجه خاص تمتد النتائج المتعلقة بالتقارب المطلق حالا .

(ب) افحص النتائج المتعلقة بإعادة نظام الترتيب وحاصل ضرب كوشى للفئة لرؤية امتدادها إلى C .

(ج) أثبت أن اختبارات المقارنة والجذور والنسبة تمتد إلى C .

(د) نفرض أن R هو نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى المركبة .

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

أثبت أن المتسلسلة تتقارب مطلقاً إذا كان $|z| < R$. وتتقارب بانتظام فى أى فئة جزئية مدمجة للفئة $\{z \in C : |z| < R\}$.

(هـ) نفرض أن g و f دالتـــان معرفتان عند $D = \{z \in C : |z| < r\}$ بقيم فى C ونفرض أن الدالتين نهايتان فى D لمتسلسلتين قوى . وضح أنه إذا كانت g و f تتفقان مع $D \cap R$ فإنهما يتفقان مع كل D .

(و) أثبت أن متسلسلتى قوى فى C يمكن ضربهما معاً داخل دائرة التقارب المشتركة لهما .

٣٧ – (β) نعرف فى هذا المشروع الدالة الأسية بدلالة متسلسلة قوى ولإجراء هذا ، سنعرضها لأعداد مركبة وكذلك لأعداد حقيقية .

(**) جورج فروبينوس (١٨٤٩ – ١٩١٧) كان أستاذا فى برلين وهو معـــروف بأبحـــاثه فى الجبر والتحليل .

(أ) نفرض أن E معرفة عند $z \in C$ بالمتسلسلة

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

أثبت أن المتسلسلة تقاربية مطلقة لكل $z \in C$ وتقاربية منتظمة فى أى فئة جزئية محدودة من C .

(ب) أثبت أن E دالة متصلة فى C إلى C ، أن $E(0) = 1$ ، وأن

$$E(z+w) = E(z)E(w)$$

لقيم z, w فى C . (إرشاد : نظرية ذات الحدين لأجل $(z+w)^n$ تظل صحيحة عندما $z, w \in C$ و $n \in N$

(ج) إذا كان x, y عددين حقيقيين ، فنعرف E_1 و E_2 بأنها $E_1(x) = E(x)$ و $E_2(y) = E(iy)$ ومن ثم $E(x+iy) = E_1(x)E_2(y)$. أثبت أن E_1 تأخذ فقط قيما حقيقية لكن E_2 لها بعض قيم غير حقيقية . تعرف C و S فى R إلى R بما يلى

$$C(y) = \mathrm{Re}\, E_2(y), \qquad S(y) = \mathrm{Im}\, E_2(y)$$

عند $y \in R$ أثبت أن

$$C(y_1+y_2) = C(y_1)C(y_2) - S(y_1)S(y_2),$$
$$S(y_1+y_2) = S(y_1)C(y_2) + C(y_1)S(y_2)$$

(د) أثبت أن المتسلسلتين C و S المعرفتين فى (ج) ، مفكوك المتسلسلة الآتيتين

$$C(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!}, \qquad S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(هـ) أثبت أن $C' = -S$ و $S' = C$. ومن ثم أثبت أن $(C^2+S^2)' = 2CC' + 2SS' = 0$ التى تدل على أن $C^2 + S^2$ تساوى الواحد الصحيح تطابقياً . تدل هذه فى الحالة الخاصة على أن كلا من S و C محدود لقيمته المطلقة بالواحد الصحيح .

(و) استنبط أن الدالة E_2 فى R إلى C تحقق $E_2(0) = 1,\ E_2(y_1+y_2) = E_2(y_1)E_2(y_2)$ ومن ثم أثبت أن $|E_2(y)| = 1$ و $E_2(-y) = 1/E_2(y)$ لجميع y فى R .

الباب الثانى والثلاثون — متسلسلة فورير :

سنعطى الآن تعريف متسلسلة فورير(*) لدالة قطعية متصلة دورتها 2π . مع أن مناقشتنا

(*) (جـ ــ ب) جوزيف فورير (١٧٦٨ ــ ١٨٣٠) كان الابن لخياط فرنسى . تعلم فى دير تركه ليرتبط فى حركات ثورية ورياضية . رافق نابليون الى مصر فى عام ١٧٩٨ وتعين فيما بعد كأكبر ضابط لقسم ابزيريه فى جنوب فرنسا . عمل أثناء هذا الوقت فى أعظم موهبته المشهورة : وهى النظرية الرياضية للحرارة . كان بحثه نقطة بارزة فى رياضيات الطبيعة وكان لعمله تأثير يفوق تأثير معاصريه على المدتين حتى وقتنا الحاضر .

ستكون مختصرة ، فسوف نقدم نظريات التقارب الرئيسية والمرتبطة بمتسلسلة فورير . لهذه النظريات أهمية ستحق الاعتبار فى التحقيق وتطبيقات فى الفيزياء .

سنفترض فيما يلي أن الدالة $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ دورة 2π ، أى أن $f(x+2\pi)=f(x)$ لكل $x\in\boldsymbol{R}$. سنفترض أيضاً أن الدالة f قطعية متصلة ، بمعنى أن f متصلة ماعدا إمكانية وجود عدد محدود من نقط $x_1,\ldots,x_r$ فى أى فترة طولها 2π ، والتى عندها تكون للدالة f نهايتها طرف أيسر وأيمن .

$$f(x_j-)=\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}f(x_j-h),\qquad f(x_j+)=\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}f(x_j+h).$$

يرمز لفئة كل الدوال $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ ذات دورة تساوى 2π وقطعية متصلة بالرمز $PC(2\pi)$ لاحظنا حالا أن هذه الفئة هى متجه فراغ تحت العمليات :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\qquad (cf)(x)=cf(x),\qquad x\in\boldsymbol{R}$$

بسبب دورية الدالة $f\in PC(2\pi)$ يكون من الضرورى فقط فحص f فى فترة طولها 2π ، فمثلا نجد أن

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\int_{c}^{c+2\pi}f(x)\,dx$$

لأى $c\in\boldsymbol{R}$.

فى الفراغ $PC(2\pi)$ سوف نهتم بالمعودين

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|:x\in[-\pi,\pi]\},\qquad \|f\|_2=\left(\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx\right)^{1/2}$$

المعرفين جيداً لأن دالة فى $PC(2\pi)$ تكون محدودة وقابلة لتكامل ريمان يمكن توضيح كتمرين أولى إنه إذا كانت $f\in PC(2\pi)$ ، فإن

$$\|f\|_2\le\sqrt{2\pi}\,\|f\|_\infty \tag{38.1}$$

ينتج من هذه المتباينة أن تقارباً فى العمود $\|\cdot\|_\infty$ (أى تقارب منتظم) يثبت تقارباً فى العمود $\|\cdot\|_2$ (أى تقارب متوسط المربع) . لكن ، العكس ليس صحيحاً . (انظر تمرينى (٣١ –ح ، ٢٨ – ل) .

٣٨ – ١ تعريف . إذا كانت $f\in PC(2\pi)$ ، فإن معاملات فورير للدالة f هى الأعداد $a_0,a_1,a_2,\ldots,b_1,b_2,\ldots$ المعرفة كما يلى

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt \tag{38.2}$$

فقصد بمتسلسلة فورير للدالة f المتسلسلة

$$\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{38.3}$$

لكى نشير إلى ربط متسلسلة فورير (٣٨ - ٣) بالدالة f ، نكتب غالباً

$$f(x)\sim\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

لكن يجب التأكيد على أن هذه الكتابة لايقصد بها الإيحاء بأن متسلسلة فورير تتقارب إلى $f(x)$ عند أى نقطة خاصة x . توجد فى الحقيقة دوال متصلة بدورة 2π والتى تكون متسلسلات فورير لها تباعدية عند نقط كثيرة عددها لانهائى . (انظر بيرك هبل ، صفحة ٣١٧ ، هويت / ورروس ، صفحة ٣٠٠) .

٣٨ - ٢ أمثلة . (أ) نفرض أن $f_1\in PC(2\pi)$ معرفة فى $(-\pi,\pi]$ بأنها $f_1(x)=-1$ عند $-\pi<x<0$ و $f_1(x)=+1$ عند $0\leq x\leq+\pi$. توضح كتمرين أن متسلسلة فورير عند f_1 هى

$$\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right]$$

سيبرهن فيما بعد أن هذه المتسلسلة لفورير تتقارب فى الحقيقة إلى f_1 عندما $0<|x|<\pi$ ، لكن لا تتقارب إلى f_1 عندما $x=0,\pm\pi$ (لماذا ؟) . لاحظ أن f_1 قطعية متصلة ، لكنها ليست متصلة عند نقط الفئة $\{n\pi : n\in \mathbf{Z}\}$

(ب) نفرض أن $f_2\in PC(2\pi)$ معرفة فى $(-\pi,\pi)$ بأنها $f_2(x)=|x|$. توضح كتمرين أن متسلسلة فورير عند f_2 هى

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right]$$

من الواضح أن هذه المتسلسلة تتقارب بانتظام فى $\mathbf{R}$ وسنثبت أسفل أنها تتقارب إلى f_2 .

(ج) بفرض أن $f\in PC(2\pi)$ زوجية ، أى أن $f(-x)=f(x)$ لكل $x\in \mathbf{R}$. لمثل هذه الدالة تكون معاملات فورير $b_n=0$ عند $n=1,2\ldots$ بينما .

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos nt\,dt,\qquad n=0,1,2,\ldots.$$

(لاحظ أن الدالة الموجودة فى (ب) زوجية) .

(د) نفرض أن $g\in PC(2\pi)$ فردية ، أى أن $g(-x)=-g(x)$ لكل $x\in \mathbf{R}$. لمثل هذه الدالة تكون معاملات فورير $a_n=0$ عند $n=0,1,2,\ldots$ ، بينما

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(t)\sin nt\,dt,\qquad n=1,2,\ldots.$$

(لاحظ أن الدالة الموجودة فى (أ) فردية) .

(هـ) نفرض أن f متصلة فى R ودورتها هى 2π ونفرض أن مشتقتها f' هى قطعية متصلة فى R (بدورة 2π) . سوف نربط معاملات فورير a_n, b_n للدالة f مع معاملات فورير a'_n, b'_n للدالة f' عند $n = 1, 2, \ldots$. فى الحقيقة ، من التكامل بالتجزىء نجد أن

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos nt\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[f(t)\cos nt\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(-n)\sin nt\,dt\right].$$

إذا استعملنا الحقيقة التى تقول إن $t \to f(t)\cos nt$ لها دورة 2π نجد أن الحد الأول يتقدم وكذلك $a'_n = nb_n$ عند $n = 1, 2, \ldots$. بالمثل يتضح أن $b'_n = -na_n$ عند $n=1, 2, \ldots$ (نلاحظ أنه إذا كانت f_1, f_2 هى الدالتان الموجودتان فى (أ) ، (ب) فإن $f_1(x)=f'_2(x)$ عند $x \notin \{n\pi : n \in Z\}$ ، وأن معاملات فورير للدالتين f_2 و f_1 عند $n = 1, 2, \ldots$ تحقق العلاقات الموجودة أعلى).

سوف نحسب فى المفترض الآتى مربع المسافة بالنسبة للمعود $\|\cdot\|_2$ من f فى $PC(2\pi)$ إلى دالة اختيارية T_n تكون على الصورة

$$T_n(x) = \tfrac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \tag{38.4}$$

تسمى مثل هذه الدالة أحياناً بكثيرة الحدود المثلثية من درجة n . لإجراء هذه الحسابات يكون من المفيد وجود هذه العلاقات

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx)^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin kx)^2\,dx = \pi, \qquad k \in N,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx\,dx = 0, \qquad k, n \in N, k \neq n,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx\,dx = 0, \qquad k, m = 0, 1, 2, \ldots .$$

٣٨ - ٢ مفترض . إذا كانت $f \in PC(2\pi)$ وكانت T_n كثيرة حدود مثلثية من درجة n [أى أن ، T_n تكون فى الصورة (٣٨ - ٤)] ، فإن

$$\|f - T_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \pi\left\{\tfrac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right\} + \pi\left\{\tfrac{1}{2}(\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{k=1}^{n} [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2]\right\} \tag{38.5}$$

حيث a_k, b_k تشير إلى أن معاملات فورير للدالة f .

البرهـــان . لدينا

$$\|f-T_n\|_2^2=\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-T_n(t)]^2\,dt$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)]^2\,dt-2\int_{-\pi}^{\pi}f(t)T_n(t)\,dt+\int_{-\pi}^{\pi}[T_n(t)]^2\,dt.$$

من السهل الآن ملاحظة أن

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)T_n(t)\,dt=\tfrac{1}{2}\alpha_0\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\beta_k\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt$$
$$=\pi\left\{\tfrac{1}{2}\alpha_0a_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_ka_k+\beta_kb_k)\right\}$$

وبالإضافة إلى ذلك ، باستخدام العلاقات المذكورة أعلى يتضح أن

$$\int_{-\pi}^{\pi}[T_n(t)]^2\,dt=\pi\left\{\tfrac{1}{2}\alpha_0^2+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)\right\}$$

إذا أدمجنا هاتين العلاقتين مع القانون الأول وجمعنا وطرحنا $\pi\{\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\}$ نحصل على القانون (٣٨ – ٥) . وهو المطلوب إثباته .

ويفسر مفترض (٣٨ – ٣) « هندسياً » بالتفسير الهام الآتى : بين كل كثيرات الحدود المثلثية T_n من درجة n ، تكون كثيرة الحدود المثلثية التى تجعل التعبير $\|f-T_n\|_2^2$ فى نهاية صغرى محدودة وحيدة ويحصل عليها باختيار المعاملات α_k, β_k كمعاملات فورييه a_k, b_k للدالة f و $k=0, 1, \ldots, n$. إذا رمزنا إلى هذه كثيرة الحدود المثلثية التى تجعل التعبير السابق فى نهاية صغرى بالرمز $S_n(f)$ ، فإن

$$S_n(f)(x)=\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{38.6}$$

هو حاصل الجمع الجزئى النونى لمتسلسلة فورييه للدالة f ويثبت قانون (٣٨ – ٥) أن

$$\|f-S_n(f)\|_2^2=\|f\|_2^2-\pi\left\{\tfrac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right\} \tag{38.7}$$

بالاستفادة من تمرين (٢٦ – و) يمكننا أن نوضح أن

$$\lim_{n}\|f-S_n(f)\|_2=0 \tag{38.8}$$

لكل دالة متصلة دورتها 2π . لكن ، . بما أن ذلك التمرين هو نتيجة لتحليل يسترعى الاعتبار ونفضل استنتاج هذه النتيجة مباشرة . سوف نحتاج لإجراء هذا للنتيجتين الآتيتين .

٣٨ – ٤ متباينة بسل . إذا كانت $f\in PC(2\pi)$ ، فإن

$$\tfrac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2. \tag{38.9}$$

البرهـــان . إذا كانت $n\in N$ اختيارية ، فينتج من (٣٨ – ٧) أن

$$\tfrac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2.$$

ومن ثم تكون حواصل الجمع الجزئية لمتسلسلة الموجودة فى الطرف الأيسر من (٣٨ – ٩) محدودة من أعلى . بما أن الحدود كلها موجبة ، فإن هذه المتسلسلة تقاربية وأن (٣٨ – ٩) تظل صحيحة . وهو المطلوب إثباته .

النتيجة الآتية هى حالة خاصة من التى تسمى عادة مفترض ريمان – لبزج

٣٨ – ٥ مفترض ريمان – لبزج . إذا كانت $g\in PC(2\pi)$ ، فإن

$$\lim_n\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt=0$$

البرهان . بما أن $\sin(n+\frac{1}{2})t=\sin nt\cos\frac{1}{2}t+\cos nt\sin\frac{1}{2}t$ فنحصل على

$$\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\pi g(t)\cos\tfrac{1}{2}t]\sin nt\,dt$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\pi g(t)\sin\tfrac{1}{2}t]\cos nt\,dt$$

بما أن $g\in PC(2\pi)$ ، فينتج أن للدوال المعرفة عند $t\in(-\pi,\pi]$ ، بأنها

$$g_1(t)=\pi g(t)\cos\tfrac{1}{2}t,\qquad g_2(t)=\pi g(t)\sin\tfrac{1}{2}t.$$

امتدادات إلى R التى تنتمى إلى $PC(2\pi)$. لذلك تعطى التكاملات الموجودة فى الطرف الأيمن للقانون السابق معاملات فورير للدالتين g_2 و g_1 ؛ ومن ثم ، حسب متباينة بسل ، تتقارب هذه التكاملات إلى صفر عندما $n\to\infty$. وهو المطلوب إثباته .

٣٨ – ٦ مفترض . إذا كانت $f\in PC(2\pi)$ ، فإن حاصل الجمع الجزئى $S_n(f)$ لمتسلسلة فورير لها هو

$$S_n(f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)\,dt \tag{38.10}$$

حيث D_n هو لب تكامل درشلت النونى والمعرف بأنه .

$$D_n(t)=\tfrac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\begin{cases}\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}, & 0<|t|\le\pi,\\[2mm] n+\frac{1}{2}, & t=0\end{cases}$$

البرهـــان . ينتج من قانون (٣٨ – ٢) ، (٣٨ – ٦) أن

$$S_n(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n} f(t)\{\cos kx\cos kt+\sin kx\sin kt\}\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\tfrac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right\}dt$$

إذا فرضنا أن $t = x + s$ واستخدمنا حقيقة كون جيب التمام دالة زوجية وأن الدالة المراد تكاملها لها دورة 2π ، نجد أن .

$$S_n(f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s)\left\{\tfrac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ks\right\}ds$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+s)\left\{\tfrac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ks\right\}ds$$

الآن نستخدم قانون (٣٦ – ٦) لحصول على (٣٨ – ١٠) . وهو المطلوب إثباته

قبل الاستمرار ، نتذكر (انظر مثال ٢٧ – ف) أننا نقصد ، بمشتقة الطرف الأيمن لدالة $f: R \to R$ عند نقطة $c \in R$ حيث f لها نهاية طرف أيمن $f(c+)$ ، النهاية .

$$f'_+(c)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{f(c+t)-f(c+)}{t}$$

طالما وجدت هذه النهاية . بالمثل ، مشتقة الطرف الأيسر للدالة f عند c هي النهاية

$$f'_-(c)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}}\frac{f(c+t)-f(c-)}{t}$$

٣٨ – ٧ نظرية تقارب نقطية . نفرض أن $f \in PC(2\pi)$ وأن للدالة f مشتقة طرف أيمن ومشتقة طرف أيسر عند c . إذن تتقارب متسلسلة فورييه للدالة f إلى $\frac{1}{2}\{f(c-)+f(c+)\}$ عند النقطة c . بالرموز .

$$\tfrac{1}{2}\{f(c-)+f(c+)\}=\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nc+b_n\sin nc) \tag{38.11}$$

البرهـــان . ينتج من (٣٦ – ٦) أنه إذا كانت $\sin\frac{1}{2}t\neq 0$ ، فإن

$$\tfrac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

وبالضرب في $(1/\pi)f(c+)$ ثم بإجراء التكامل بالنسبة إلى t في $[0,\pi]$ وبملاحظة $\int_0^{\pi}\cos kt\,dt=0$ عند $k\in N$ ، نحصل على

$$\tfrac{1}{2}f(c-)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(c+)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

بالمثل ، إذا ضربنا التعبير السابق بالمقدار $(1/\pi)\, f(c-)$ وكاملنا بالنسبة إلى t فى $[-\pi, 0)$ ، نحصل على

$$\tfrac{1}{2}f(c+)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(c+)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$

إذا طرحنا هذين التعبيرين من القانون (٣٨ - ١٠) ، نحصل على

$$(*)\ S_n(f)(c)-\tfrac{1}{2}\{f(c-)+f(c+)\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{f(c+t)-f(c-)}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(c+t)-f(c+)}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt$$

وبما أنه يوجد الآن

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{f(c+t)-f(c+)}{2\sin\frac{1}{2}t}=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\left\{\frac{f(c+t)-f(c+)}{t}\cdot\frac{t}{2\sin\frac{1}{2}t}\right\}$$

$$=f'_+(c)\cdot 1=f'_+(c)$$

فينتج أن الدالة

$$\begin{aligned}F_+(t)&=\frac{f(c+t)-f(c+)}{2\sin\frac{1}{2}t} && \text{for}\quad t\in(0,\pi],\\ &=f'_+(c) && \text{for}\quad t=0,\\ &=0 && \text{for}\quad t\in(-\pi,0)\end{aligned}$$

هى متصلة قطعية فى $[-\pi, \pi]$. ومن ثم يتقارب التكامل الثانى فى(*) إلى صفر عندما $n\to\infty$.

بالمثل، يتقارب التكامل الأول فى (*) إلى صفر عندما $n\to\infty$. ينتج الاستنتاج المنصوص. وهو المطلوب إثباته

٣٨ - ٨ أمثلة . (أ) الدالة f_1 فى مثال (٣٨ - ٢) (أ) موجودة فى $PC(2\pi)$ عند $f(c-)=f(c)=f(c+)$ عند $c\in[-\pi,\pi],\ c\neq-\pi, 0, +\pi$ حيث
$f(-\pi-)=+1,\ f(-\pi+)=-1,\ f(0-)=-1,\ f(0+)=1,\ f(\pi-)=1$
$f(\pi+)=-1$ بما أن مشتقات طرف واحد موجودة فى كل مكان (وتساوى صفراً) فينتج من نظرية تقارب نقط قطعية (٣٨ - ٧) أن متسلسلة فورير f_1 تتقارب إلى $f_1(c)$ بشرط $c\in[-\pi,\pi],\ c\neq-\pi, 0, \pi$ وأنه عند هذه النقط الثلاث تتقارب متسلسلة فورير للدالة f_1 إلى صفر .

(ب) الدالة f_2 فى مثال (٣٨ - ٢) (ب) متصلة ، ولها دورة 2π ولها مشتقات من جهة واحدة فى كل مكان . لذلك تتقارب متسلسلة فورير للدالة f_2 عند كل نقطة للدالة f_2 وأن التقارب كما رأينا ، منتظم .

نلاحظ أن مشتقة (الجانبين) للدالة f_2 موجودة فى الفترة $[-\pi, \pi]$ ماعدا عند النقط $0, \pm\pi$ وأن f'_2 تتفق مع الدالة القطعية المتصلة f_1 عند $x \notin \{n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$

نلاحظ أنه ينتج من نظرية القيمة المتوسطة (انظر مثال ٢٧–ن) أنه إذا كانت $f' \in PC(2\pi)$ فإن مشتقى الدالة f للطرف الأيسر والطرف الأيمن موجودتان عند نقط عدم اتصال الدالة f' . نوضح الآن أنه لدالة f بدورة 2π وبحيث أن $f' \in PC(2\pi)$ ، تكون متسلسلة فورير للدالة f تقاربية بانتظام إلى f .

٣٨ – ٩ نظرية تقارب منتظمة . نفرض أن f متصلة ، ولها دورة 2π ونفرض أن $f' \in PC(2\pi)$. حينئذ تتقارب متسلسلة فورير للدالة f بانتظام إلى f فى $\mathbf{R}$.

البرهان . بما أن f متصلة ومشتقات الدالة f لطرف واحد موجودة عند كل نقطة ، فينتج من نظرية تقارب نقطية (٣٨ – ٧) أن متسلسلة فورير للدالة f تتقارب إلى f عند كل نقطة . يتبقى إثبات أن التقارب يكون منتظماً . حسب المتباينة .

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$$

فيكفى إثبات تقارب المتسلسلة الأخيرة . فى الحقيقة ، إذا طبقنا متباينة بسل على f' ، نعرف أن المتسلسلة $\sum (|a'_k|^2 + |b'_k|^2)$ تقاربية لكن ، كما قد رأينا فى مثال (٣٨ – ٢) (هـ) ، $b_k = a'_k/k$ و $a_k = -b'_k/k$. إذا استخدمنا متباينة شفارتز نجد أن

$$\sum_{k=1}^{m} |a_k| = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} |b'_k| \le \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{m} |b'_k|^2\right)^{1/2}$$

بما أن متباينة مشابهة تظل صحيحة المتسلسلة $\sum |b_k|$ ، فينتج النص المطلوب .

وهو المطلوب إثباته .

نوضح الآن أن حواصل الجمع الجزئية لمتسلسلة فورير لأى دالة f فى $PC(2\pi)$ تتقارب إلى f فى العمود $\|\cdot\|_2$. بينما هذا لايضمن إمكانية استرداد القيمة للدالة f عند أى نقطة خاصة معينة من قبل ، من الممكن تفسيرها بكون f معطاة بمعنى معين (إحصائى) . لبعض تطبيقات يكون هذا النموذج من التقارب مفيداً مثل التقارب النقطى ، ويمتاز بأنه لايحتاج إلى فرض على قابليته للتفاضل .

٣٨ – ١٠ نظرية تفاضل عمودية . إذا كانت $f \in PC(2\pi)$ وإذا كانت $(S_n(f))$ هى المتتابعة لحواصل جمع جزئية لمتسلسلة فورير للدالة f ، فإن

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0$$

البرهان . نفرض أن $f \in PC(2\pi)$ ونفرض أن $\varepsilon > 0$ معطاة . نوضح كتمرين أنه توجد دالة f_1 متصلة بدورة 2π بحيث أن $\|f - f_1\|_2 < \varepsilon/7$ وحسب نظرية (٢٤ – ٥)

توجد دالة f_2 خطية قطعية متصلة يمكن اختيارها بدورة 2π ، بحيث أن $\|f_1 - f_2\|_\infty < \varepsilon/7$
ينتج من نظرية التقارب المنتظم (٣٨ – ٩) أنه إذا كانت n كبيرة كبراً كافياً ، فإن $\|f_2 - S_n(f_2)\|_\infty < \varepsilon/7$ نجد من قانون (٣٨ – ١) أن $\|g\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\,\|g\|_\infty \leq 3\,\|g\|_\infty$
لأى $g \in PC(2\pi)$ ، إذن نستنتج أن

$$\|f - S_n(f_2)\|_2 < \|f - f_1\|_2 + \|f_1 - f_2\|_2 + \|f_2 - S_n(f_2)\|_2$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{7} + \frac{3\varepsilon}{7} + \frac{3\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

الآن $S_n(f_2)$ كثيرة حدود مثلثية من درجة n تقارب f خلال ε (بالنسبة إلى $\| \cdot \|_2$).
بما أننا أثبتنا فى مفترض (٣٨ – ٣) أن حاصل الجمع الجزئى $S_n(f)$ هو كثيرة الحدود المثلثية من درجة n التى تعطى الأحسن لمثل هذا التقريب . فنستنتج أن $\|f - S_n(f)\|_2 < \varepsilon$
بما أن $\varepsilon > 0$ اختيارية ، فنستنتج أن $\lim \|f - S_n(f)\|_2 = 0$

كنتيجة لهذه النتيجة ومفترض ٣٨ – ٣ نحصل على التعزيز الآتى لمتباينة بسل للدالة $f \in PC(2\pi)$

٣٨ – ١١ متباينة بارسيفال . إذا كانت $f \in PC(2\pi)$ ، فإن

$$\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2 = \tfrac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \tag{38.12}$$

حيث a_k, b_k هى معاملات فورير للدالة f .

سننهى هذا الباب ببرهان لنظرية فيجر(*) على قابلية الجمع لسيزارو لمجمع لمتسلسلة فورير لدالة متصلة . إذا كانت $S_n(f),\ n = 0, 1, 2, \ldots$ تدل على حواصل الجمع الجزئية لمتسلسلة فورير المناظرة للدالة f ، فنفرض أن $\Gamma_n(f)$ تدل على متوسطات سيزارو

$$\Gamma_n(f) = \frac{1}{n}[S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_{n-1}(f)]$$

نفرض الآن $D_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ كما فى مفترض (٣٨ – ٦) . إذا استفدنا من القانون المبدئى

$$2\sin(k - \tfrac{1}{2})t\,\sin\tfrac{1}{2}t = \cos(k-1)t - \cos kt,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

يمكننا توضيح أن

$$\frac{1}{n}[D_0(t) + D_1(t) + \cdots + D_{n-1}(t)] = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{\sin\frac{1}{2}nt}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2, & 0 < |t| \leq \pi, \\ \tfrac{1}{2}n, & t = 0 \end{cases} \tag{38.13}$$

(*) ليوبولد فيجر (١٨٨٠ — ١٩٥٩) تعلم ودرس فى بودابست . له اسهامات كثيرة مهمة فى قطاعات متعددة للتحليل الحقيقى والمركب .

ونفرض أن K_n هي هذه الدالة التي تسمى لب فيجر النوني . واضح ان $K_n(t) \geq 0$ وبما أن

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)\,dt = 1$$

عند $k = 0, 1, 2, \ldots$ ، فينتج أن

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = 1. \tag{38.14}$$

إذا كانت $0<\delta<\pi$، فينتج أيضاً من حقيقة كون $\theta \geq 2\theta/\pi$ عند $0 \leq \theta \leq \pi/2$ أن

$$0 \leq K_n(t) \leq \frac{1}{2n}\left(\frac{\pi}{2\delta}\right)^2 \quad \text{for} \quad \delta \leq |t| \leq \pi. \tag{38.15}$$

نلاحظ أخيراً أنه ينتج من مفترض (٣٨ – ٦) أنه يمكننا التعبير عن متوسطات سيزارو بالقانون .

$$\Gamma_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)\,dt \tag{38.16}$$

نحن الآن مستعدون لبرهنة نظرية فيجر

٣٨ – ١٢ نظرية فيجر . إذا كانت f متصلة ولها دورة 2π ، فإن المتوسطات لسيزارو لمتسلسلة فورير للدالة f تتقارب بانتظام إلى f في R .

البرهان . ينتج من (٣٨ – ١٤) أن

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t)\,dt$$

بطرح هذا من (٣٨ – ١٦) نحصل على

$$\Gamma_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x+t) - f(x)\}K_n(t)\,dt$$

بما أن $K_n(t) \geq 0$ لكل t ، نجد ان

$$|\Gamma_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|\,K_n(t)\,dt$$

بفرض $\varepsilon > 0$ معطاة . وبما أن f متصلة بانتظام في R ، فيوجد عدد δ حيث $0 < \delta < \pi$ بحيث إنه إذا كانت $|t| \leqq \delta$ ، فإن

$$|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{لكل} \quad x \in [-\pi, \pi]$$

ومن ثم نحصل على

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t)-f(x)|\, K_n(t)\, dt \le \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\, dt \le \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) = \frac{\varepsilon}{\pi}$$

ومن جهة أخرى نجد حسب (٣٨ - ١٥) أن

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|\, K_n(t)\, dt \le \frac{\pi-\delta}{\pi}(2\,\|f\|_\infty)\left(\frac{1}{8n}\frac{\pi^2}{\delta^2}\right) \le \frac{1}{n}\left(\frac{\pi^2\,\|f\|_\infty}{4\delta^2}\right)$$

التي يمكن جعلها أقل من ε بأخذ n كبيرة كبراً كافياً . بما أن تقديراً مشابهاً يظل صحيحاً للتكامل على $[-\pi, -\delta]$ ، فينتج أن

$$\|\Gamma_n(f)-f\|_\infty < \left(2+\frac{1}{\pi}\right)\varepsilon$$

عند n كبيرة كبراً كافياً . وهو المطلوب إثباته

بما أنه يلاحظ بسهولة أن الدالة $\Gamma_n(f)$ كثيرة حدود مثلثية (من درجة $n-1$) فنحصل برهان آخر للنظرية الآتية لفيرشتراس .

٣٨ - ١٣ نظرية تقريب لفيرشتراس . إذا كانت f متصلة بدورة 2π ، فإنه يمكن تقريبها بانتظام بكثيرة حدود مثلثية .

تمرينات :

٣٨ - (أ) نفرض أن g دالة حقيقية القيمة معرفة فى خلية J للفراغ R بنقط طرفية $a < b$ نقول إن g قطعية متصلة فى J إذا كان (i) للدالة g نهاية طرف أيمن عند a ، (ii) g لها نهاية طرف أيسر عند b ، (iii) g متصلة عند كل النقط الداخلية للخلية J ماعداً ، ربما عند عدد محدود من نقط التى عندها يكون للدالة g نهايتا طرف أيمن وطرف أيسر .

(أ) أثبت أنه إذا كانت g قطعية متصلة فى $(-\pi, \pi]$ فإنه يوجد دالة وحيدة G فى $PC(2\pi)$ بحيث إن $G(x) = g(x)$ لكل $x \in (-\pi, \pi]$.

(ب) الدالة g لها مشتقة طرف أيسر (وطرف أيمن ومشتقة طرفين على الترتيب) عند $c \in (-\pi, \pi)$ إذا وإذاً فقط كانت الدالة G هذه المشتقات .

(ج) الدالة g لها مشتقة طرف أيمن عند $\pi -$ (مشتقة طرف أيسر عند π على الترتيب) إذا وإذاً فقط كان للدالة G هاتان المشتقتان .

(د) المشتقتان لطرف واحد $g'_+(-\pi), g'_-(\pi)$ موجودتان ومتساويتان إذا وإذاً فقط كان للدالة G مشتقة عند $\pm\pi$.

٣٨ – (ب)(أ) إذا كانت $f \in PC(2\pi)$ وكانت المشتقة $f'(x)$ موجودة لكل $x \in \boldsymbol{R}$ فإن f' لها دورة 2π .

(ب) إذا كانت $f \in PC(2\pi)$ وكانت $c \in \boldsymbol{R}$ ، عرف $F : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ بأنها $F(x) = \int_c^x f(t)$ ، بحيث إن F متصلة . أثبت أن F لها دورة 2π إذا وإذاً فقط كان متوسط f هو صفر ، أي إن

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = 0$$

٣٨ – (ج) (أ) نفرض أن $f \in PC(2\pi)$ فردية . إذن $f(\pm\pi) = 0$. إذا كانت f متصلة عند صفر ، فإن $f(0) = 0$.

(ب) نفرض أن $g \in PC(2\pi)$ زوجية ، إذن $g(0+) = g(0-)$. إذا كانت المشتقة $g'(x)$ موجودة لكل $x \in \boldsymbol{R}$ ، فإن (انظر مثال (٢٧–ب) g' فردية ، ولها دورة 2π ، $g'(0) = g'(\pm\pi) = 0$.

٣٨ – (د) نفرض أن f و F تنتميان إلى $PC(2\pi)$ ولهما معاملات فورير A_n, B_n و a_n و b_n على الترتيب . إذا كانت $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ وإذا كانت $h = \alpha F + \beta f$ أثبت ان h تنتمى إلى $PC(2\pi)$ ولها معاملات فورير $\alpha A_n + \beta a_n, \alpha B_n + \beta b_n$. (ومن ثم أثبت أن معاملات فورير لدالة تتوقف خطياً على الدالة) .

٣٨ – (هـ) (أ) نفرض أن f_1 هي الدالة فى مثال (٣٨ – ٢) (أ) . احسب متسلسلة فورير للدالة f_1 ، وأثبت أن هذه المتسلسلة لفورير لاتقترب بانتظام فى $[-\pi, \pi]$.

(ب) نفرض أن f_2 هى الدالة فى مثال (٣٨ – ٢) (ب) . احسب متسلسلة فورير للدالة f_2 ، وأثبت أن المشتقة حداً فحداً لمتسلسلة فورير للدالة f_2 تطابق متسلسلة فورير للدالة f_1

(ج) باستخدام حقيقة أن متسلسلة فورير للدالة f_2 تتقارب إلى f_2 استنتج أن

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

(د) نفرض أن $f_3(x) = \frac{1}{2}\pi - f_2(x)$ بحيث إن $f_3(x) = \frac{1}{2}\pi - |x|$ عند $x \in (-\pi, \pi)$ استخدم تمرين (٣٨ – د) لإثبات أن متسلسلة فورير للدالة f_3 هى

$$f_3(x) \sim \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right]$$

٣٨ (هـ) – (أ) نفرض أن $g_1 \in PC(2\pi)$ معرفة بحيث إن $g_1(x) = x$ عند $x \in (-\pi, \pi]$ وأن $g_1(\pi) = 0$. أثبت أن g_1 دالة فردية وأن متسلسلة فورير لها هى

$$2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\dots\right]$$

لاحظ أن متسلسلة فورير هذه تتقارب إلى صفر عند $x=\pm\pi$. استخدم نظرية التقارب النقطية (٣٨-٧) لإثبات أن متسلسلة فورير هذه تتقارب إلى $g_1(x)$ عند كل نقطة $x\in[-\pi,\pi]$.

(ب) نفرض أن $g_2\in PC(2\pi)$ بحيث أن $g_2(x)=x^2$ عند $x\in(-\pi,\pi]$.
أثبت أن g_2 دالة زوجية وأن متسلسلة فورير لها هي

$$\frac{\pi^2}{3}-4\left[\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\dots\right].$$

وضح أن متسلسلة فورير هذه تقترب إلى g_2 عن $[-\pi,\pi]$ ، وأن مشتقتها حداً فحداً تكون لمتسلسلة فورير للدالة g_1 .

(ج) أثبت أن

$$\frac{\pi^2}{12}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\dots$$

(د) نفرض أن $h(x)=\frac{1}{3}\pi^2-g_2(x)$ بحيث إن $h(x)=\frac{1}{3}\pi^2-x^2$ عند $x\in(-\pi,\pi]$
حينئذ متسلسلة فورير للدالة h هي

$$4\left[\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\dots\right]$$

٣٨ (ز) – (أ) نفرض أن $k(x)=x^3$ لكل $x\in \boldsymbol{R}$. أثبت أن k متصلة وفردية فى $\boldsymbol{R}$.
لكن ، الدالة k_1 فى $PC(2\pi)$ التى تطابق على k فى $[-\pi,\pi]$ ليست متصلة .

(ب) نفرض أن $h(x)=x^3-\pi^2x$ بحيث إن h متصلة وفردية فى الفراغ $\boldsymbol{R}$.
ونفرض أن h_1 هى الدالة فى $PC(2\pi)$ التى تطابق h فى $(-\pi,\pi)$. أثبت أن h_1 متصلة فى الفراغ $\boldsymbol{R}$ وأن $h_1'(x)=3x^2-\pi^2$ عند $x\in(-\pi,\pi]$.

(ج) استخدم تمرين (٢٧ – ب) ، مثال (٣٨ – ٢) (هـ) ، وتمرين (٣٨ – ج)
(د) لإثبات أن متسلسلة فورير للدالة h_1 هى

$$-12\left[\frac{\sin x}{1^3}-\frac{\sin 2x}{2^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}-\dots\right].$$

٣٨ – (ح) نفرض أن $f:[0,\pi]\to\boldsymbol{R}$ دالة قطعية متصلة ونفرض أن $f_e\in PC(2\pi)$ معرفة بأنها

$$f_e(x)=f(x) \quad \text{عند} \quad x\in[0,\pi],$$
$$=f(-x) \quad \text{عند} \quad x\in[-\pi,0).$$

(أ) أثبت أن f_e هى دالة زوجية ، تسمى امتداداً زوجياً للدالة f بدوره 2π .

(ب) متسلسلة فورير للدالة f_e تسمى متسلسلة جيب تمام (فورير) للدالة f . أثبت أنها معطاة بالصورة

$$\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

حيث

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

(ج) أثبت أنه إذا كانت $c\in(0,\pi)$ وكان للدالة f مشتقة طرف أيسر ومشتقة طرف أيمن عند c ، فإن متسلسلة جيب التمام للدالة f تتقارب إلى $\frac{1}{2}[f(c-)+f(c+)]$ أيضاً إذا كان للدالة f مشتقة طرف أيمن عند صفر ، فإن متسلسلة جيب تمام للدالة f تتقارب إلى $f(0+)$. إذا كانت للدالة f مشتقة طرف أيسر عند π ، فإن متسلسلة جيب تمام للدالة f تتقارب إلى $f(\pi-)$.

٣٨ – (ط) لكل من الدوال الآتية المعرفة فى $[0,\pi]$ ، احسب متسلسلة جيب تمام وحدد النهاية لهذه المتسلسلة عند كل نقطة .

(أ) $f(x)=x$ (ب) $f(x)=\sin x$

(ج) $f(x)=1$ عند $0\le x\le \frac{1}{2}\pi$
$=0$ عند $\frac{1}{2}\pi<x\le\pi$

(د) $f_h(x)=\frac{1}{2}\pi-x$ عند $0\le x\le\frac{1}{2}\pi$
$=0$ عند $\frac{1}{2}\pi<x\le\pi$

(هـ) $f(x)=x(\pi-x)$.

٣٨ – (ى) نفرض أن $f:[0,\pi]\to\mathbf{R}$ قطعية متصلة ونفرض أن $f_o\in PC(2\pi)$ معرفة بأنها

$$\begin{aligned} f_o&=f(x) && \text{عند } x\in(0,\pi] \\ &=0 && \text{عند } x=0, \\ &=-f(-x) && \text{عند } x\in(-\pi,0) \end{aligned}$$

(أ) أثبت أن f_o دالة فردية ، تسمى امتداداً فردياً للدالة f بدورة 2π .

(ب) متسلسلة فورير للدالة تسمى متسلسلة جيب (فورير) للدالة f أثبت أنها معطاة بالصورة

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

حيث

$$b_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt, \qquad n=1,2,\ldots.$$

(ج) أثبت أنه إذا كانت $c \in (0, \pi)$ وإذا كانت f لها مشتقة طرف أيسر ومشتقة طرف أيمن عند c ، فإن متسلسلة الجيب للدالة f تتقارب إلى $\frac{1}{2}[f(c-)+f(c+)]$. وفى أى حالة ، تتقارب متسلسلة الجيب للدالة f إلى صفر عند $x = 0, \pi$.

٣٨ – (ك) لكل الدوال الآتية المعرفة فى $[0, \pi]$ ، احسب متسلسلات الجيب وحدد النهاية لهذه المتسلسلات عند كل نقطة .

(أ) $f(x) = 1$ (ب) $f(x) = \cos x$

(ج) $f(x) = 1$ عند $0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$ (د) $f(x) = \pi - x$

$= 0$ عند $\frac{1}{2}\pi < x \le \pi$

(هـ) $f(x) = x(\pi - x)$

٣٨ – (ل) نفرض أن $f_n \in PC(2\pi)$ دالة بحيث إن $f_n(x) = n^{1/4}$ عند $0 \le x \le 1/n$ وتساوى صفراً عند قيم أخرى $x \in (-\pi, \pi]$. أثبت أن $\|f_n\|_2 = 1/n^{1/4}$ أى إن المتتابعة (f_n) تتقارب إلى الدالة صفر فى العمود $\|\cdot\|_2$ لكن ، بما أنها غير محدودة ، فإن التقارب ليس منتظماً .

٣٨ – (م) إذا كانت $f \in PC(2\pi)$ وإذا كانت $\varepsilon > 0$ ، أثبت أنه يوجد دالة متصلة f_1 بدورة 2π بحيث أن $\|f - f_1\|_2 < \varepsilon$

٣٨ – (ن) استخدم متساوية بارسيفال (٣٨ – ١١) لإثبات القوانين الآتية :

(أ) $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (ب) $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

(ج) $\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ (د) $\frac{\pi^6}{945} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$

٣٨ – (س) إذا كانت F و f تنتميان إلى $PC(2\pi)$ ولها معاملات فورير a_n، b_n و A_n و B_n ، على الترتيب ، أثبت أن

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)F(t)\, dt = \tfrac{1}{2}a_0A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_nA_n + b_nB_n)$$

(إرشاد : طبق متساوية بارسيفال على $f + F$) .

٣٨ (ع) – استخدم اختبار درشلت (٣٦–٢) ومثال (٣٦–٨) لإثبات أن المتسلسلة المثلثية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{1/2}}$$

تتقارب لكل x وضح ، كيفما كان ، أن هذه المتسلسلة لايمكن أن تكون متسلسلة فورير لأى دالة فى $PC(2\pi)$.

٣٨ – (ف) نفرض أن $L > 0$ ونفرض أن $PC(2L)$ متجه فراغ لكل دوال $f : R \to R$ القطعية المتصلة والتى دورتها هى $2L$.

(أ) إذا عرفنا $f \cdot g = \int_{-L}^{L} f(t)g(t)$ عند $f, g \in PC(2L)$ ، أثبت أن الراسم $(f, g) \to f \cdot g$ هو حاصل الضرب القياسى (بمفهوم تعريف (٨ – ٣) فى $PC(2L)$.
وبالإضافة إلى ذلك يكون العمود المستنتج بحاصل الضرب القياسى (انظر ٨ – ٧) هو

$$\|f\|_2 = \left[\int_{-L}^{L} |f(t)|^2 \, dt\right]^{1/2}$$

(ب) نفرض أن $C_0, C_n, S_n, n \in N$ هى الدوال فى $PC(2L)$ المعرفة بأنها

$$C_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}}, \qquad C_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}, \qquad S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

أثبت أن هذه الفئة للدوال متعامدة بالمعنى الآتى :

$$C_n \cdot S_m = 0, \qquad C_n \cdot C_m = \delta_{nm}, \qquad S_n \cdot S_m = \delta_{nm}$$

حيث $\delta_{nm} = 1$ إذا كانت $n = m$ وأن $\delta_{nm} = 0$ إذا كانت $n \neq m$. (إرشاد : إذا كانت $L = \pi$ ، فإن هذه هى العلاقات المعطاة قبل (٣٨ – ٣)).

(ج) إذا كانت $f \in PC(2L)$ ، ونعرف متسلسلة فوريير للدالة f فى $[-L, L]$ بأنها المتسلسلة

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right)$$

حيث نجد أن

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \, dt, \qquad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} \, dt$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \sin \frac{nt}{L} \, dt$$

عند $n = 1, 2, \ldots$.

(د) أعد صياغة نظريات التقارب (٣٨ – ٧) ، (٣٨ – ٩) ، (٣٨ – ١٠) لمتسلسلات فوريير لدوال فى $PC(2L)$. (إرشاد : استخدم تغيير المتغير).

(ه) إذا كانت $f \in PC(2L)$ ، فإن متساوية بارسيفال تصبح

$$\frac{1}{L} \|f\|_2^2 = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

حيث العمود للدالة f مثل العمود فى جزء (أ) وحيث معاملات فوريير هى مثل المعاملات فى جزء (ج).

٣٨ – (ص) لكل من الدوال الآتية فى الفترة المبنية ، احسب متسلسلة فورير فى هذه الفترة وحدد النهاية لهذه المتسلسلة عند كل نقطة .

(أ) $f(x) = x$ على $(-2,2]$

(ب) $f(x) = 0$ عند $-4 < x < 0$

$= x$ عند $0 \le x \le 4$

(ج) $f(x) = 0$ عند $-3 < x < 0$

$= 1$ عند $0 \le x \le 1$

$= 0$ عند $1 < x \le 3$

٣٨ – (ق) نفرض أن f متصلة ودورتها 2π . أثبت أنه إذا كانت متسلسلة فورير للدالة f تتقارب عند $c \in [-\pi, \pi]$ إلى عدد ما ، فإنها تتقارب إلى $f(c)$.

٣٨ – (ر) نفرض أن f تنتمى إلى $PC(2\pi)$ ونفرض أن $c \in [-\pi, \pi]$ $\Gamma_n(f)$. إذا كانت $\Gamma_n(f)$ تدل على متوسط فيجر النونى ، المعرف فى (٣٨ – ١٦) أثبت أن

$$\lim \Gamma_n(f)(c) = \frac{1}{2}[f(c-) + f(c+)]$$

٣٨ – (ش) نفرض أن f و f' متصلتان بدورة 2π وأن $f'' \in PC(2\pi)$.

(أ) أثبت أن معاملات فورير a_n, b_n للدالة f تكون بحيث إن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(|a_n| + |b_n|)$$

تقاربية . ومن ثم ، يوجد مقدار ثابت $M > 0$ بحيث إن $|a_n| \le M/n^2$ وأن $|b_n| \le M/n^2$ لكل $n \in N$.

(ب) أثبت أن متسلسلة فورير للمشتقة f' هى التفاضل حداً فحداً لمتسلسلة فورير للدالة f .

٣٨ – (ت) (أ) إذا كانت $k \in PC(2\pi)$ وكانت $x_0, x \in [-\pi, \pi]$ ، استخدم متباينة شفارتز لإثبات أن

$$\left| \int_{x_0}^{x} k(t)\, dt \right| \le \|k\|_2 \, |x - x_0|^{1/2} \le \|k\|_2 \sqrt{2\pi}$$

(ب) استخدم جزء (أ) ونظرية تقارب المحود (٣٨ – ١٠) لتوضيح أنه إذا كانت $f \in PC(2\pi)$ وأن $x_0 \in [-\pi, \pi]$ ، فإن متسلسلة فورير للدالة f يمكن تكاملها حداً فحداً .

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \frac{1}{2} a_0(x - x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\, dt$$

والمتسلسلة الناتجة تقاربية بانتظام عند $x \in [-\pi, \pi]$

٣٨ – (ث) (أ) نفرض أن $\alpha > 0$ ليست عدداً صحيحاً . أثبت أن

$$\cos \alpha x = \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\cos x}{\alpha^2 - 1^2} + \frac{\cos 2x}{\alpha^2 - 2^2} - \frac{\cos 3x}{\alpha^2 - 3^2} + \cdots\right]$$

لكل $x \in [-\pi, \pi]$.

(ب) استخدم جزء (أ) لإثبات أنه إذا كانت $x \notin \mathbf{Z}$, فإن

$$\cot \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}$$

$$\csc \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 - n^2}$$

(ج) فاضل المتسلسلة الأولى فى (ب) حداً فحداً (برر هذا) لإثبات أنه إذا كانت $x \notin \mathbf{Z}$ فإن

$$\frac{\pi^2}{(\sin \pi x)^2} = \lim_m \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{(x - n)^2}$$

(د) كامل المتسلسلة الأولى فى (ب) حداً فحداً (برر هذا) لإثبات أنه إذا كانت $x \notin \mathbf{Z}$ فإن

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \lim_m \left[\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)\right]$$

الفصل السابع

تفاضل فى R^p

سنقدم فى هذا الفصل النظرية لدوال قابلة للتفاضل فى الفراغ R^p حيث $p > 1$. وبالرغم من أن النظرية توازى تلك التى قدمت فى بابى ٢٧ ، ٢٨ ، فإنه يوجد تعقيدات عديدة وتظهر صفات جديدة ترجع بعض هذه التعقيدات محضاً إلى الاختلاط الحتمى للرموز لكن يظهر معظمها بسبب كون إمكانية الاقتراب من نقطة $c \in R^p$ من « اتجاهات كثيرة » لذلك يمكن أن تحدث بعض ظواهر جديدة .

عرفنا فى باب ٢٧ المشتقة لدالة $f: R \to R$ عند نقطة $c \in R$ بالطريقة التقليدية ، أى ، عند العدد $L \in R$ بحيث إن

$$L = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

طالما وجدت هذه النهاية . بطريقة مكافئة ، يمكننا تعريف هذه المشتقة بأنها العدد L حيث

$$\lim_{x \to c} \frac{|f(x) - f(c) - L(x-c)|}{|x - c|} = 0$$

يمكن اعتبار هذه العلاقة النهائية بأنها تعطى بالضبط الاتجاه الذى فيه يقرب قيم الدالة $f(x)$ عندما تكون x قريبة قرباً كافياً من c ، بقيم الراسم المألوف(*)

$$x \mapsto f(c) + L(x - c)$$

الذى يعطى المنحنى البيانى له المستقيم الماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(c, f(c))$.

سوف نستخدم هذا الاقتراب للمشتقة التى سوف نستعملها لدوال فى R^p إلى R^q . أى إن المشتقة لدالة f معرفة فى جوار نقطة $c \in R^p$. بقيم فى R^q ستكون راسماً خطياً $L: R^p \to R^q$ إذا كان

$$\lim_{x \to c} \frac{\|f(x) - f(c) - L(x - c)\|}{\|x - c\|} = 0$$

(*) فى مقررات أساسية ، يسمى مثل هذا الراسم « خطى » لكن ، للمتطابقة مع الاستعمال الأكثر تعقيداً للمصطلح « خطى » المعطى فى باب ٢١ ، سنستعمل الاصطلاح « مألوفة » للإشارة إلى دالة حصلنا عليها بإضافة ثابت لدالة خطية .

ومن ثم نقرب الدالة $f(x)$ ، عندما x تكون قريبة قرباً كافياً من c ، بالراسم المألوف

$$x \mapsto f(c)+L(x-c)$$

من R^p إلى R^q . [يجب على القارىء ملاحظة أنه إذا كانت $p = 1$ ، فإن الرمز $L(x-c)$ يدل على حاصل ضرب العددين الحقيقيين $x-c$ و L ؛ لكن ، إذا كانت $p > 1$ ، فإن $L(x-c)$ تدل على قيمة الراسم الخطى L عند المتجه $x-c$] .

يعطى باب ٣٩ التعريف ويربط المشتقة بالمشتقات « الجزئية » المختلفة . حصلنا فى باب ٤٠ على قاعدة السلسلة ونظرية القيمة المتوسطة اللتين لهما أهمية رئيسية يعطى باب ٤١ تحليلا نافذاً إلى خواص الرواسم للدوال القابلة للتفاضل ومؤدياً إلى النظرية العامة للدوال العكسية والضمنية ، ونهاية إلى نظريات البارامترية والرتبة . يدرس الباب الأخير الخواص النهائية لدوال حقيقية القيمة فى R^p .

الباب التاسع والثلاثون — المشتقة فى R^p :

اعتبر باب ٢٧ المشتقة لدالة نطاقها ومداها فى الفراغ R . فى هذا الباب سنعتبر من وجهة نظر مشابهة دالة معرفة فى فئة جزئية من الفراغ R^p ويقيم فى R^q

إذا استعرض القارىء تعريف (٢٧ — ١) ، فإنه سيلاحظ أنه يستخدم بدرجة مطابقة تماماً لدالة معرفة فى فترة J من الفراغ R ويقيم فى الفراغ الكاتيزى R^q . وطبعاً ، تكون فى هذه الحالة متجهة فى R^q . التغيير الوحيد المطلوب لهذا الامتداد هو إحلال القيمة المطلقة فى معادلة (٢٧ — ١) بالعمود فى الفراغ R^q . فيما عدا ذلك ، يطبق تعريف (٢٧ — ١) حرفياً على هذه الحالة الأكثر عموماً . ويتضح أن هذه الحالة تستحق الدراسة عندما نتحقق أنه يمكن اعتبار دالة f فى J إلى R^q منحنياً فى الفراغ R^q وأن المشتقة عند وجودها لهذه الدالة عن النقطة $x = c$ تعطى متجهاً مماساً للمنحنى عند النقطة $f(c)$ وبالتعاقب ، إذا كانت x تدل على الوقت ، فإن الدالة f هى المسير لنقطة فى الفراغ R^q وتدل المشتقة $f'(c)$ على متجه السرعة للنقطة عند زمن $x = c$.

فحص كامل لهذه السطور من التفكير سيقودنا بعيداً إلى الهندسة التفاضلية والديناميكية بأكثر مما نرغب الآن . أغراضنا أكثر تواضعاً : نرغب لتنظيم الطريقة التحليلية التى يمكننا من فحص كامل ونزيل القيد الذى ينص على أن النطاق يكون فى فراغ ذى بعد واحد وتسمح بانتماء النطاق إلى الفراغ الكارتيزى سوف نستمر الآن لإجراء هذا .

يوضح تحليل لتعريف (٢٧ — ١) أن المكان الوحيد الذى فيه يكون من الضرورى تكوين النطاق من فئة جزئية من الفراغ R هو فى معادلة (٢٧ — ١) حيث يظهر خارج قسمة . حيث أنه لايوجد معنى لخارج قسمة متجه فى الفراغ R^q على متجه فى الفراغ R^p ، فإنه لايمكننا تفسير

معادلة (٢٧ — ١) بصورتها الحالية . لذلك ، ستتقدم لإعادة صياغة هذه المعادلة . إحدى الإمكانيات الممتعة والمستحقة الاعتبار هى أخذ « شرائح » فى البعد الواحد مارة بالنقطة c فى النطاق . سيفرض للبساطة أن c هى نقطة داخلة النطاق D للدالة ، حينئذ لأى u فى R^p ، تنتمى النقطة $c+tu$ إلى D لأعداد t حقيقية وصغيرة بكفاية .

٣٩ — ١ تعريف . نفرض أن f معرفة فى فئة جزئية A من الفراغ R^p ولها قيم فى R^q . نفرض أن c نقطة داخلة من A ، ونفرض أن u أى نقطة فى R^p . يسمى المتجه $L_u \in R^q$ بالمشتقة الجزئية للدالة f عند c بالنسبة إلى u إذا كان يوجد لكل عدد $\varepsilon > 0$ $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث إنه لكل $t \in R$ ويحقق $0 < |t| < (\varepsilon)$ نحصل على

$$\left\|\frac{1}{t}\{f(c+tu)-f(c)\}-L_u\right\|<\varepsilon \tag{39.1}$$

قد رأينا حالا أن المشتقة الجزئية L_u المعرفة فى (٣٩ — ١) تكون محددة وحيدة عند وجودها وبالتعاقب ، يمكننا تعريف بأنها النهاية

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{f(c+tu)-f(c)\}$$

أو المشتقة عند $t=0$ للدالة F المعرفة بأنها $F(t)=f(c+tu)$ عند $|t|$ صغيرة صغراً كافياً ، ولها قيم فى R^q .

سنكتب $D_uf(c)$ أو $f_u(c)$ التفاضل الجزئى L_u للدالة f عند c بالنسبة إلى u . يفضل الرمز الأول بكثرة عندما ، كما فى أكثر الحالات ، يكون الرمز الدال على الدالة دليل سفلى . نرمز إلى الدالة $c \mapsto D_uf(c)=f_u(c)$ بأنها D_uf أو f_u ، تعرف الدالة عند نقطها الداخلية c من A التى عندها توجد النهاية المطلوبة ، ولها قيم فى الفراغ R^q .

من الواضح أنه إذا كانت f حقيقية القيمة (بحيث إن $q=1$) وكان u هو المتجه $e_1=(1, 0, \ldots, 0)$ فى الفراغ R^p . حينئذ تنطبق المشتقة الجزئية للدالة f بالنسبة إلى e_1 على مايسمى عادة بالمشتقة الجزئية للدالة f بالنسبة لمتغيرها الأول ، والتى غالباً يرمز لها بالرمز

$$D_1f, \qquad f_{x_1} \qquad \text{أو} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

بنفس الطريقة ، بأخذ $e_2=(0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_p=(0, 0, \ldots, 1)$ ، نحصل على التفاضلات الجزئية للدالة f بالنسبة إلى متغيرات أخرى :

$$D_2f=f_{x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, D_pf=f_{x_p}=\frac{\partial f}{\partial x_p}$$

فى حالة وجود دليل للرمز الذى يدل على الدالة فسنكتب ، أحياناً ، فاصلة للاشــارة إلى المشتقة الجزئية أى . $D_j f_2 = f_{2,j}$

يجب ملاحظة أن المشتقة الجزئية لدالة عند نقطة بالنسبة لمتجه واحد ربما تكون موجودة، مع أن المشتقة الجزئية بالنسبة إلى متجه آخر لاتحتاج إلى وجودها (انظر تمرين ٣٩ – أ) . وواضح أيضاً ، أنه تحت شروط مناسبة ، توجد علاقات جبرية بين مشتقات جزئية لحواصل جمع وحواصل ضرب لدوال ، الخ . سوف لانتضايق لحصول على هذه العلاقات حيث إنها إما حالات خاصة من التى سنجريها أسفل ، أو يمكن برهنتها بالمثل .

كلمة عن المصطلحات العلمية هى فى نظام . إذا كانت u وحدة متجه فى R^p ، حينئذ تسمى المشتقة الجزئية $D_u f(c) = f_u(c)$ غالباً بالمشتقة الاتجاهية للدالة f عند c فى الاتجاه لوحدة المتجه u .

المشـــتقة :

العيب الرئيسى للمشتقة الجزئية لدالة f عند نقطة c بالنسبة إلى متجه u هو أنه يعطى فقط صورة لسلوك الدالة f قرب c فى فئة ذات بعد واحد $\{c + tu : t \in R\}$. لحصول على معلومات كاملة بدرجة أكثر عن الدالة f فى جوار $c \in R^p$ ، سوف ندخل الرمز لمشتقة الدالة f عند c ، التى هى راسم خطى من R^p إلى R^q .

٣٩ – ٢ تعريف . نفرض أن الدالة f لها نطاق A فى الفراغ R^p ومدى فى R^q ، ونفرض أن c نقطة داخلة النطاق A . نقول إن الدالة f قابلة للتفاضل عند c إذا كان يوجد دالة خطية $L: R^p \to R^q$ بحيث إنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث إنه إذا كانت $x \in R^p$ أى متجه يحقق $\|x - c\| \leq \delta(\varepsilon)$ فإن $x \in A$ ويكون

$$\|f(x) - f(c) - L(x - c)\| \leq \varepsilon \|x - c\| \tag{39.2}$$

وبالتعاقب يمكن إعادة صياغة (٣٩ – ٢) بكتابة أنه لأى $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث إنه إذا كانت $u \in R^p$ وكانت $\|u\| \leq \delta(\varepsilon)$ ، فإن

$$\|f(c + u) - f(c) - L(u)\| \leq \varepsilon \|u\| \tag{39.3}$$

التى ، بدورها ، يمكن التعبير عنها أكثر أحكاماً بكتابة

$$\lim_{\|u\| \to 0} \frac{\|f(c + u) - f(c) - L(u)\|}{\|u\|} = 0 \tag{39.4}$$

سنرى فيما يلى أن مثل هذه الدالة الخطية L محددة وحيدة إذا وجدت . تسمى(*) مشتقة f

(*) ننبه القارىء أن L تسمى أحياناً مشتقة فريشت أو التفاضل للدالة f عند c ، يرمز لها أحياناً بالرموز $df(c)$ أو $f'(c)$ ، الخ .

عند c سنرمز لها غالباً بالرمز $Df(c)$ بدلا من L . سوف نكتب غالباً $Df(c)(u)$ للدالة الخطية $L(u)$ ، $Df(c)(x-c)$ ، للدالة الخطية $L(x-c)$.

من وجهة النظر التحليلية ، يعكس وجود المشتقة للدالة f عند النقطة c إمكانية تقريب الراسم $x \mapsto f(x)$ بالراسم $x \mapsto f(c)+L(x-c)$. تعطى متباينة (٣٩ – ٢) مقياساً لتلاصق هذا التقريب عندما تكون x قريبة من c . نجد بسبب الخطية للدالة L ، أن

$$f(c)+L(x-c)=(f(c)-L(c))+L(x)$$

حينئذ نكون قربنا $x \mapsto f(x)$ بدالة على الصورة $x \mapsto y_0+L(x)$ ، حيث y_0 ثابتة . مثل هذه الدوال تسمى رواسم مألوفة من $\boldsymbol{R}^p$ إلى $\boldsymbol{R}^q$ ؛ هذه الرواسم مجرد ترجمة فقط لرواسم خطية وإذن يكون لها خاصية بسيطة جداً .

من وجهة النظر الهندسية ، تعكس وجود المشتقة الدالة f عند c وجود مستوى مماسي للسطح $\{(x, f(x)) : x \in A\}$ فى $\boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^q$ عند النقطة $(c, f(c))$ ، أى المستوى المعطى بالشكل

$$\{(x, f(c)+L(x-c)) : x \in \boldsymbol{R}^p\} \tag{39.5}$$

سنثبت الآن انفرادية المشتقة

٣٩ – ٣ مفترض . للدالة f مشتقة واحدة عن نقطة على الأكثر .

البرهـــان . نفرض أن L_1, L_2 دالتان خطيتان من $\boldsymbol{R}^p$ إلى $\boldsymbol{R}^q$ وتحققان (٣٩–٣) عند $\|u\| \le \delta(\varepsilon)$. حينئذ نجد أن

$$\begin{aligned} 0 &\le \|L_1(u)-L_2(u)\| \\ &\le \|f(c+u)-f(c)-L_1(u)\|+\|f(c+u)-f(c)-L_2(u)\| \\ &\le 2\varepsilon\,\|u\| \end{aligned}$$

لذلك نحصل على $0 \le \|L_1(u)-L_2(u)\| \le 2\varepsilon\,\|u\|$ لكل $u \in \boldsymbol{R}^p$ ، حيث $\|u\| \le \delta(\varepsilon)$
إذا كانت $L_1 \neq L_2$ ، فإنه يوجد $z \in \boldsymbol{R}^p$ حيث $L_1(z) \neq L_2(z)$ لذلك $z \neq 0$.
الآن نفــرض أن $z_0=(\delta(\varepsilon)/\|z\|)z$ وإذن نجــد أن $\|z_0\|=\delta(\varepsilon)$ ومن ثم $\|L_1(z_0)-L_2(z_0)\| \le 2\varepsilon\,\|z_0\|$. إذن $\|L_1(z)-L_2(z)\| \le 2\varepsilon\,\|z\|$ لكل $\varepsilon>0$ لذلك تكون $L_1(z)=L_2(z)$ مما يخالف الفرض . إذن $L_1=L_2$. وهو المطلوب إثباته

٣٩ – ٤ أمثلة . (أ) نفرض أن $A \subseteq \boldsymbol{R}^p$ ، $y_0 \in \boldsymbol{R}^q$ ، ونفرض أن $f_0 : A \to \boldsymbol{R}^q$ هى « دالة ثابتة » معرفة بأنها $f_0(x)=y_0$ عند $x \in A$. إذا كانت c نقطة داخلية من A وكانت $x \in A$ ، فإن $f_0(x)-f_0(c)=0$. ينتج أن f_0 قابلة للتفاضل عند c وأن المشتقة $Df_0(c)=0$ ، أى « الدالة الخطية الصفيرة » التى ترسم كل عنصر فى $\boldsymbol{R}^p$ إلى عنصر الصفر فى $\boldsymbol{R}^q$. ومن ثم المشتقة عند أى نقطة من الدالة الثابتة هى الدالة الخطية الصفرية .

(ب) نفرض أن $A = \mathbf{R}^p$ وأن $f_1 : A \to \mathbf{R}^q$ هي دالة خطية . إذا كانت $c \in A$ وكانت $x \in A$ فإن $f_1(x) - f_1(c) - f_1(x-c) = 0$. ينتج من هذا أن f_1 قابلة للتفاضل عند c وأن $Df_1(c) = f_1$ ومن ثم تكون المشتقة عند أى نقطة للدالة الخطية هى الدالة الخطية نفسها .

٣٩ – ٥ مفترض . إذا كانت $f : A \to \mathbf{R}^q$ قابلة للتفاضل عند $c \in A$ ، فإنه يوجد عددان موجبان دقيقان δ, K بحيث إنه إذا كانت $\|x - c\| \leq \delta$ ، فإن

$$\|f(x) - f(c)\| \leq K \|x - c\| \tag{39.6}$$

بوجه خاص ينتج أن f متصلة عند $x = c$.

البرهــان . ينتج من تعريف (٣٩ – ٢) أنه يوجد $\delta > 0$ بحيث إنه إذا كانت $0 < \|x - c\| \leq \delta$ فإن (٣٩ – ٢) تظل صحيحة عندما $\varepsilon = 1$. إذا استخدمنا متباينة المثلث نجد أن

$$\|f(x) - f(c)\| \leq \|L(x - c)\| + \|x - c\|$$

عندما $0 < \|x - c\| \leq \delta$. من نظرية (٢١ – ٣) توجد $B > 0$ بحيث إن

$$\|L(x - c)\| \leq B \|x - c\|$$

لجميع $x \in \mathbf{R}^p$. لذلك ، إذا كانت $0 < \| x - c \| \leq \delta$ نحصل على

$$\|f(x) - f(c)\| \leq (B + 1) \|x - c\|$$

وهذه المتباينة تظل أيضاً صحيحة عندما $x = c$. وهو المطلوب إثباته

نوضح الآن أن الوجود للدالة المشتقة عند نقطة يدل على الوجود لكل المشتقات الجزئية عند هذه النقطة .

٣٩ – ٦ نظرية . إذا كانت $A \subseteq \mathbf{R}^p$ ، وإذا كانت $f : A \to \mathbf{R}^q$ قابلة للتفاضل عند نقطة $c \in A$ ، وإذا كانت u أى عنصر من الفراغ $\mathbf{R}^p$ ، فإن المشتقة الجزئية $D_u f(c)$ للدالة f عند c بالنسبة إلى u تكون موجودة وبالإضافة إلى ذلك

$$D_u f(c) = Df(c)(u) \tag{39.7}$$

البرهــان . بما أن f قابلة للتفاضل عند c ، فنجد بأخذ $\varepsilon > 0$ ، أنه يوجد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث إن

$$\|f(c + tu) - f(c) - Df(c)(tu)\| \leq \varepsilon \|tu\|$$

بشرط $\|tu\| \leq \delta(\varepsilon)$. إذا كانت $u = 0$ ، فقد لاحظنا حالا المشتقة الجزئية بالنسبة

إلى صفر يرى هى $Df(c)(0)=0$. ومن ثم نفرض $u\neq 0$. أى إنه إذا كانت $0<|t|\leq \delta(\varepsilon)/\|u\|$ ، فإن

$$\left\|\frac{f(c+tu)-f(c)}{t}-Df(c)(u)\right\|\leq \varepsilon\,\|u\|$$

مما يوضح أن $Df(c)(u)$ هى المشتقةالجزئية للدالة f عند c بالنسبة إلى u ، كالمطلوب . وهو المطلوب إثباته.

٣٩ – ٧ نتيجة . نفرض أن $A\subseteq R^p$ ، ونفرض أن $f:A\to R$ ونفرض أن c هى نقطة داخلية من A . إذا كانت المشتقة $Df(c)$ موجودة ، فإن كل المشتقات الجزئية $D_1f(c),\ldots,D_pf(c)$ موجودة فى R وإذا كانت $u=(u_1,\ldots,u_p)\in R^p$ فإن

$$Df(c)(u)=u_1D_1f(c)+\cdots+u_pD_pf(c) \tag{39.8}$$

البرهان . تدل النظرية على أنه لكل من المتجهات $e_1,\ldots,e_p$ تكون المشتقات الجزئية $D_1f(c),\ldots,D_pf(c)$ موجودة وتساوى $Df(c)(e_1),\ldots,Df(c)(e_p)$ لكن ، حيث إن $Df(c)$ خطية وأن $u=u_1e_1+\cdots+u_pe_p$ ، فنستنتج أن

$$Df(c)(u)=\sum_{j=1}^{p}u_jDf(c)(e_j)=\sum_{j=1}^{p}u_jD_jf(c)$$

وهو المطلوب إثباته

ملاحظـــات :

(أ) عكس نتيجة (٣٩ – ٧) ليس دائماً صحيحاً ، لأن المشتقات الجزئية للدالة f ربما تكون موجودة بدون وجود المشتقة . مثال ذلك ، نفرض أن $f:R^2\to R$ معرفة بأنها

$$\begin{aligned} f(x,y)&=0 &&\text{for } (x,y)=(0,0)\\ &=\frac{xy^2}{x^2+y^2} &&\text{for } (x,y)\neq(0,0)\end{aligned}$$

نوضح كتمرين أن المشتقة الجزئية للدالة f بالنسبة لمتجه (a,b) عند $(0,0)$ هى

$$D_{(a,b)}f(0,0)=\frac{ab^2}{a^2+b^2},\qquad (a,b)\neq(0,0) \tag{39.9}$$

وفى الحالة الخاصة نجد أن $D_1f(0,0)=0$ و $D_2f(0,0)=0$ إذا كانت المشتقة Df موجودة عند النقطة $(0,0)$ فتثبت نتيجة (٣٩ – ٧) أن

$$D_{(a,b)}f(0,0)=Df(0,0)(a,b)=a\cdot 0+b\cdot 0=0$$

مما يخالف (٣٩ – ٩) .

(ب) سنوضح فيما يلي أنه إذا كانت $A \subseteq \mathbf{R}^p$ وإذا كانت المشتقات الجزئية للدالة $f: A \to \mathbf{R}^q$ متصلة عند c ، فإن $Df(c)$ موجودة .

٨ – ٣٩ أمثلة . (أ) نفرض أن $A \subseteq \mathbf{R}$ ونفرض أن $f: A \to \mathbf{R}$ حينئذ f قابلة للتفاضل عند نقطة داخلية c من A بمفهوم تعريف (٣٩ – ٢) إذا وإذاً فقط كانت المشتقة العادية

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(c+t)-f(c)}{t} = f'(c)$$

موجودة . فى هذه الحالة تكون المشتقة $Df(c)$ هى دالة خطية للفراغ $\mathbf{R}$ إلى الفراغ $\mathbf{R}$ ومعرفة بالتعريف

$$u \mapsto f'(c)u$$

أى إن $Df(c)$ ترسم $u \in \mathbf{R}$ إلى حاصل ضرب u و $f'(c)$. (باستخدام المصطلحات العلمية للمصفوفة ، تكون المشتقة $Df(c)$ هى الراسم الخطى الممثل بالمصفوفة 1×1 ذات عنصر واحد فقط هو $f'(c)$) .

تقليدياً ، بدلا من كتابة u لنرمز إلى العدد الحقيقى الذى تؤثر عليه الدالة الخطية للمشتقة $Df(c)$ ، يكتب الشخص أحياناً الرمز العجيب dx (هنا الحرف «d» تلعب دوراً كبادئة فى أول الكلمة وليس لها معنى آخر) . بعد إجراء هذا واستخدام رموز . نظرية ليبنز(*) للمشتقة يستعمل ، تصبح الصيغة $Df(c)(u) = f'(c)\,u$

$$Df(c)(dx) = \frac{df}{dx}(c)\,dx$$

(ب) نفرض أن $A \subseteq \mathbf{R}$ ونفرض أن $f: A \to \mathbf{R}^q$ $(q > 1)$. إذن يمكن تمثيل f « بالدوال الإحداثية »

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x)), \qquad x \in A$$

يجب على القارىء كتمرين أن يبرهن على أن f قابلة للتفاضل عند نقطة داخلية c من A إذا وإذاً فقط كان لكل من الدوال حقيقة القيمة $f_1, \ldots, f_q$ مشتقة عند c . فى هذه الحالة ، تكون المشتقة $Df(c)$ هى دالة خطية للفراغ $\mathbf{R}$ إلى $\mathbf{R}^q$ وتكون معطاة بالعلاقة .

$$u \mapsto u(f_1'(c), \ldots, f_q'(c)), \qquad u \in \mathbf{R}$$

(*) جوتفريد فيلهلم ليبنز (١٦٤٦ – ١٧١٦) ، وإسحاق نيوتن (١٦٤٢ – ١٧٢٧) هما المخترعان المتعاونان لعلم التفاضل والتكامل . قضى ليبنز معظم حياته خادماً لدوق هانوفر وكان عبقرياً عالمياً وساهم بكثرة فى الرياضيات والقانون والفلسفة وعلم اللاهوت وعلم اللغات والتاريخ .

إذن $Df(c)$ ترسم عدداً حقيقياً u إلى حاصل ضرب u والمتجه الثابت .

$$f'(c) = (f_1'(c), \ldots, f_q'(c))$$

إذا فكرنا فإن f هي « منحنى » فإن هذا المتجه يسمى « متجهاً مماسياً » للدالة f عند النقطة $f(c)$.

(ج) نفرض أن $A \subseteq \mathbf{R}^p \ (p>1)$ ونفرض أن $f: A \to \mathbf{R}$ حينئذ ينتج من نتيجة (٣٩ – ٧) أنه إذا كانت المشتقة $D f(c)$ موجودة عند نقطة c داخلية فى A ، فإن كلا من المشتقات الجزئية $D_1 f(c), \ldots, D_p f(c)$ يجب أن تكون موجودة ويكون $Df(c)$ هو الراسم الخطى النقطة $u = (u_1, \ldots, u_p) \in \mathbf{R}^p$ إلى $\mathbf{R}$ ويعطى بما يلي

$$Df(c)(u) = u_1 D_1 f(c) + \cdots + u_p D_p f(c).$$

وبالرغم من أن مجرد وجود هذه المشتقات الجزئية لايدل على وجود المشتقة ، فسنرى فيما بعد أن اتصالهم عند النقطة c لايضمن وجود المشتقة .

بدلا من $u = (u_1, \ldots, u_p)$ نكتب أحياناً $dx = (dx_1, \ldots, dx_p)$ النقطة فى $\mathbf{R}^p$ التى تؤخذ المشتقة عندها بكتابة هذا وباستخدام رمز نظرية ليبنز للتفاضلات الجزئية ، يصبح القانون السابق

$$Df(c)\,(dx) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)\, dx_p$$

(د) نفرض الآن أن $A \subseteq \mathbf{R}^p$ وأن $f: A \to \mathbf{R}^q$ حيث كلا من $p > 1,\ q > 1$.
يمكن فى هذه الحالة تمثيل $y = f(x)$

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_p) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_q &= f_q(x_1, \ldots, x_p) \end{aligned}$$

من q دالة لمتغيرات عددها p . إذا كانت f قابلة للتفاضل عند نقطة $c = (c_1, \ldots, c_p)$ فى A ، فنثبت كتمرين أن كلا من المشتقات الجزئية $D_j f_i(c) (= f_{i,j}(c))$ يجب أن تكون موجودة عند c . (وفى الحالة العامة يكون أيضاً هذا الشرط الأخير غير كاف لقابليته التفاضل للدالة f عند c) . عند وجود $Df(c)$ ، فإن الدالة الخطية التى ترسم النقطة $u = (u_1, \ldots, u_p)$ للفراغ $\mathbf{R}^p$ إلى النقطة $w = (w_1, \ldots, w_q)$ للفراغ $\mathbf{R}^q$ معطاة بأنها

$$\begin{aligned} w_1 &= D_1 f_1(c) u_1 + D_2 f_1(c) u_2 + \cdots + D_p f_1(c) u_p, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ w_q &= D_1 f_q(c) u_1 + D_2 f_q(c) u_2 + \cdots + D_p f_q(c) u_p \end{aligned} \qquad (39.10)$$

المشتقة $Df(c)$ هى الراسم الخطى للفراغ $\mathbf{R}^p$ إلى الفراغ $\mathbf{R}^q$ المعين بالمصفوفة $q \times p$ التى عناصرها هى

$$(39.11)\qquad \begin{bmatrix} D_1f_1(c) & D_2f_1(c) & \cdots & D_pf_1(c) \\ D_1f_2(c) & D_2f_2(c) & \cdots & D_pf_2(c) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_1f_q(c) & D_2f_q(c) & \cdots & D_pf_q(c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1,1}(c) & f_{1,2}(c) & \cdots & f_{1,p}(c) \\ f_{2,1}(c) & f_{2,2}(c) & \cdots & f_{2,p}(c) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{q,1}(c) & f_{q,2}(c) & \cdots & f_{q,p}(c) \end{bmatrix}$$

لاحظنا من قبل (انظر نظرية ٢١ — ٢) أن مثل هذا النظام المرتب لأعداد حقيقية يعين دالة خطية فى R^p إلى R^q . تسمى المصفوفة (٣٩ — ١١) بمصفوفة جاكوبيان للمجموعة (٣٩ — ٩) عند النقطة c . إذا كانت $p=q$ فإن محدد المصفوفة (٣٩ — ١١) يسمى بمحدد جاكوبيان ، أو ببساطة الجاكوبيان للمجموعة (٣٩ — ١٠) عند النقطة c . يرمز إلى محدد جاكوبيان مراراً(*) بالرمز

$$\left.\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_p)}\right|_{x=c} \quad \text{أو} \quad J_f(c)$$

وجود المشتقة :

برهنا فى نظرية (٣٩ — ٦) على أن وجود المشتقة عند نقطة يثبت الوجود لكل المشتقات الجزئية عند تلك النقطة . رأينا فى الملاحظة الموجودة بعد نتيجة (٣٩ — ٧) أن مجرد الوجود للمشتقات الجزئية لايضمن وجود المشتقة حتى عندما $p = 2, q = 1$. سنوضح الآن أن الاتصال للمشتقة الجزئية عند النقطة c يكون كافياً لوجود المشتقة عند c .

٣٩ — ٩ نظرية . نفرض أن $A \subseteq R^p$ ، نفرض أن $f: A \to R^q$ ، ونفرض أن c نقطة داخلية من A . إذا كانت المشتقات الجزئية $D_jf_i\ (i = 1, \ldots, q, j = 1, \ldots, p)$ موجودة فى جوار النقطة c ومتصلة عند c ، فإن f تكون قابلة للتفاضل عند c . وبالإضافة إلى ذلك تمثل $Df(c)$ بالمصفوفة $q \times p$ (٣٩ — ١١) .

البرهان . سنثبت الحالة التى فيها $q = 1$ بالتفصيل . إذا كانت $\varepsilon > 0$ فنفرض أن $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث إنه إذا كانت $j = 1, 2, \ldots, p$ و $\|y - c\| \leq \delta(\varepsilon)$ ، فإن

$$(39.12)\qquad |D_jf(y) - D_jf(c)| < \varepsilon$$

(*) كارل (ج . ى) يعقوبى (١٨٠٤ — ١٨٥١) كان أستاذاً فى كينجزبرج وبرلين وكانت أبحاثه الأساسية فى « الدوال الناقصية » ولكنه معروف أيضاً بمساهماته فى المحددات والديناميكا .

إذا كانت $c=(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ و $x=(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ نفرض $z_1, z_2, \ldots, z_p$ ترمز إلى النقط

$$z_1=(c_1, x_2, \ldots, x_p), \qquad z_2=(c_1, c_2, x_3, \ldots, x_p)$$
$$\ldots, z_{p-1}=(c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}, x_p)$$

ونفرض أن $z_p=c$ و $z_0=x$ إذا كانت $\|x-c\| \leq \delta(\varepsilon)$ ، فإنه من السهل ملاحظة أن $\|z_j-c\| \leq \delta(\varepsilon)$ عند $j=0, 1, \ldots, p$. نكتب الفرق $f(x)-f(c)$ كحاصل جمع تلسكوبى .

$$f(x)-f(c)=\sum_{j=1}^{p}\{f(z_{j-1})-f(z_j)\}$$

إذا استخدمنا نظرية القيمة المتوسطة (٢٧ – ٦) لحد الذى ترتيبه j th من هذا المجموع ، نحصل على نقطة $\bar{z}_j$ ، واقعة على جزء الخط الواصل بين النقطتين z_j z_{j-1} ، بحيث إن

$$f(z_{j-1})-f(z_j)=(x_j-c_j)D_jf(\bar{z}_j)$$

إذن ، نحصل على

$$f(x)-f(c)-\sum_{j=1}^{p}(x_j-c_j)D_jf(c)=\sum_{j=1}^{p}(x_j-c_j)\{D_jf(\bar{z}_j)-D_jf(c)\}$$

وحسب المتباينة (٣٩ – ١٢) تسيطر القيمة ε على كل كية موجودة داخل قوسين فى الصيغة الأخيرة هى سائدة القانون الأخير . باستخدام متباينة شفارتز لحاصل الجمع الأخير ، نحصل على التقدير

$$\left\|f(x)-f(c)-\sum_{j=1}^{p}(x_j-c_j)D_jf(c)\right\| \leq (\varepsilon\sqrt{p})\,\|x-c\|$$

طالما $\|x-c\| \leq \delta(\varepsilon)$

قد برهنا أن f قابلة للتفاضل عند c وأن مشتقتها $Df(c)$ هى دالة خطية من R^p إلى R وتعطى بالقانون

$$u=(u_1, \ldots, u_p) \mapsto Df(c)(u)=\sum_{j=1}^{p}u_jD_jf(c)$$

فى الحالة حيث التى تأخذ f فيها القيم فى الفراغ R^q حيث $q>1$ نستخدم نفس الاستدلال لكل من الدوال حقيقية القيمة $f_i,\ i=1, 2, \ldots, q$ ، التى تحدث فى التمثيل الإحداثى للراسم f . ستترك تفاصيل هذا الاستدلال كتمرين . وهو المطلوب إثباته

تمرينات :

٣٩ – (أ) نفرض أن $f:R^2 \to R$ معرفة بأنها

$$f(x, y)=\frac{x}{y} \quad \text{عند } y\neq 0,$$
$$=0 \quad \text{عند } y=0$$

أثبت أن المشتقات الجزئية $D_1 f(0,0),\ D_2 f(0,0)$ موجودة ومساوية إلى صفر . لكن ، المشتقة للدالة f عند النقطة $(0,0)$ بالنسبة لمتجه $u=(a,b)$ غير موجودة إذا كانت $ab\neq 0$ أثبت أن f غـــير متصلة عند $(0,0)$ ؛ فى الحقيقة ، f ليست حتى محدودة فى جوار $(0,0)$.

٣٩ – (ب) نفرض أن $g:R^2 \to R$ معرفة بأنها

$$g(x, y)=0 \quad \text{عند } xy=0,$$
$$=1 \quad \text{عند } xy\neq 0$$

أثبت أن المشتقات الجزئية $D_1 g(0,0), D_2 g(0,0)$ موجودة ومساوية إلى صفر . لكن ، المشتقة للدالة g عند $(0,0)$ بالنسبة إلى متجه $u=(a,b)$ غير موجودة إذا كان $ab\neq 0$ أثبت أن g غير متصلة عند $(0,0)$ ؛ لكن ، g محدودة فى جوار من $(0,0)$.

٣٩ – (ج) نفرض أن $h:R^2 \to R$ معرفة بأنها

$$h(x, y)=0 \quad \text{عند } (x, y)=(0,0),$$
$$=\frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{عند } (x, y)\neq (0,0)$$

أثبت أن المشتقات الجزئية $D_1 h(0,0), D_2 h(0,0)$ موجودة ومساوية إلى صفر . لكن ، المشتقة للدالة h عند النقطة $(0,0)$ بالنسبة إلى متجه $u=(a,b)$ غير موجودة إذا كان $ab\neq 0$ أثبت أن h غير متصلة عند النقطة $(0,0)$.

٣٩ – (د) نفرض أن $k:R^2 \to R$ معرفة بأنها

$$k(x, y)=0 \quad \text{عند } (x, y)=(0,0),$$
$$=\frac{xy^2}{x^2+y^4} \quad \text{عند } (x, y)\neq (0,0)$$

أثبت أن المشتقة الجزئية للدالة k عند النقطة $(0,0)$ بالنسبة إلى أى متجه $u=(a,b)$ موجودة وأن

$$D_u k(0,0)=\frac{b^2}{a} \quad \text{إذا } a\neq 0$$

أثبت أن k غير متصلة ومن ثم فهى غير قابلة التفاضل عند $(0, 0)$.

٣٩ – (هـ) نفرض أن $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ معرفة بأنها

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{عند } (x, y) = (0, 0)$$
$$= \frac{xy^2}{x^2+y^2} \qquad \text{عند } (x, y) \neq (0, 0)$$

أثبت أن المشتقة الجزئية للدالة f عند النقطة $(0, 0)$ بالنسبة إلى أى متجه $u = (a, b)$ موجودة وأن

$$D_u f(0, 0) = \frac{ab^2}{a^2+b^2} \qquad \text{إذا } (a, b) \neq (0, 0).$$

أثبت أن f تكون متصلة لكن ليست قابلة التفاضل عند النقطة $(0, 0)$.

٣٩ – (و) نفرض أن $F: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ معرفة بأنها

$$F(x, y) = x^2 + y^2 \qquad \text{إذا كانت } x, y \text{ قياسيين}$$
$$= 0 \qquad \text{خلاف ذلك}$$

أثبت أن F تكون متصلة فقط عند النقطة $(0, 0)$ وقابلة التفاضل هناك .

٣٩ – (ز) نفرض أن $G: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ معرفة بأنها

$$G(x, y) = (x^2+y^2) \sin 1/(x^2+y^2) \qquad \text{عند } (x, y) \neq (0, 0),$$
$$= 0 \qquad \text{عند } (x, y) = (0, 0)$$

أثبت أن G قابلة التفاضل عند كل نقطة للفراغ $\boldsymbol{R}^2$ لكن المشتقتين الجزئيتين D_1G و D_2G غير محدودتين (ومن ثم غير متصلتين) فى جوار النقطة $(0, 0)$.

٣٩ – (ح) نفرض أن $H: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ معرفة بأنها

$$H(x, y) = \left(x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}, y\right) \qquad \text{عند } x \neq 0,$$
$$= (0, y) \qquad \text{عند } x = 0$$

أثبت أن D_1H متصلة عند كل نقطة وأن D_2H موجودة ومتصلة فى جوار النقطة $(0, 0)$
أثبت أن H قابلة التفاضل عند $(0, 0)$.

٣٩ – (ط) نفرض أن $A \subseteq \boldsymbol{R}^p$ ، ونفرض أن $f: A \to \boldsymbol{R}^q$ قابلة للتفاضل عند نقطة c داخلية فى A ، ونفرض أن $v \in \boldsymbol{R}^q$. إذا عرفنا $g: A \to \boldsymbol{R}$ بأنها $g(x) = f(x) \cdot v$ لجميع $x \in A$ ، أثبت أن g قابلة التفاضل عند c وأن

$$Dg(c)(u) = (Df(c)(u)) \cdot v \qquad \text{عند } u \in \boldsymbol{R}^p$$

٣٩ – (ى) نفرض أن c نقطة داخلية من $f: A \to \boldsymbol{R}$ ونفرض أن $A \subseteq \boldsymbol{R}^p$
(أ) إذا كانت f قابلة للتفاضل عند c ، أثبت أنه يوجد متجه وحيد $v_c \in \boldsymbol{R}^p$ بحيث إن

$$D_u f(c) = Df(c)(u) = v_c \cdot u \quad \text{لكل} \quad u \in \boldsymbol{R}^p$$

يسمى المتجه v_c بالميل للدالة f عند النقطة c ، ويرمز له بالرمز $\nabla_c f$ أو $\text{grad}\, f(c)$. وضح أن

$$\nabla_c f = (D_1 f(c), \ldots, D_p f(c))$$

(ب) استخدم متباينة شفارتز لإثبات أنه إذا كانت $\|u\| = 1$ و $u \in \boldsymbol{R}^p$ ، فإن الدالة $u \mapsto D_u f(c)$ لها نهاية عظمى عندما تكون u مضاعفاً موجباً للدالة $\nabla_c f$. ومن ثم يكون الاتجاه الذى فيه تكون المشتقة الاتجاهية للدالة f عند النقطة c فى نهاية عظمى هو ميل الدالة f عند النقطة c .

٣٩ – (ك) نفرض أن c نقطة داخلية من $A \subseteq \boldsymbol{R}^p$ ، ونفرض أن $f, g : A \to \boldsymbol{R}$ قابلة للتفاضل عند c وأن $\alpha \in \boldsymbol{R}$. أثبت أن

$$\nabla_c(\alpha f) = \alpha \nabla_c f, \quad \nabla_c(f+g) = \nabla_c f + \nabla_c g,$$
$$\nabla_c(fg) = f(c)\, \nabla_c g + g(c)\, \nabla_c f$$

٣٩ – (ل) أوجد الميل للدوال الآتية عند نقطة اختيارية فى الفراغ $\boldsymbol{R}^3$.

(أ) $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

(ب) $f_2(x, y, z) = x^2 - yz + z^2$

(ج) $f_3(x, y, z) = xyz$

٣٩ – (م) أوجد المشتقات الاتجاهية لكل من الدوال المذكورة فى (٣٩ – ل) عند النقطة $(0, 1, 2)$ فى الاتجاه إلى النقطة $(0, 2, 3)$.

٣٩ – (ن) نفرض أن $A \subseteq \boldsymbol{R}^2$ ونفرض أن دالة $f : A \to \boldsymbol{R}$ تمثل سطحاً S_f فى $\boldsymbol{R}^3$ بشكلها صراحة :

$$S_f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\}$$

إذا كانت الدالة f قابلة للتفاضل عند نقطة داخلية (x_0, y_0) من A فإن المستوى المماسى للسطح S_f عند النقطة $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ يعطى بشكل الراسم المألوف $A_{(x_0, y_0)} : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ والمعروف بأنه

$$A_{(x_0, y_0)}(x, y) = f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$$

أثبت أن المستوى المماسى للسطح S_f عند هذه النقطة

$$\{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 : z = f(x_0, y_0) + D_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)\}$$

٣٩ – (س) أوجد المستويات المماسية للسطوح فى $\boldsymbol{R}^3$ الممثلة بأشكال الدوال الآتية للنقط المعينة . ارسم شكلا تخطيطياً .

(أ) $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ عند النقطة $(0, 0)$ وعند النقطة $(1, 2)$.

(ب) $f_2(x, y) = xy$ عند النقطة $(0, 0)$ وعند النقطة $(1, 2)$.

(ج) $f_3(x, y) = (4 - (x^2 + y^2))^{1/2}$ عند النقطة $(0, 0)$ وعند النقطة $(1, 1)$.

٣٩ – (ع) نفرض أن $J \subseteq \boldsymbol{R}$ فترة ونفرض أن $g : J \to \boldsymbol{R}^3$ تمثل بارامتريا منحنيا C_g في الفراغ $\boldsymbol{R}^3$:

$$C_g = \{(g_1(t), g_2(t), g_3(t)) : t \in J\}$$

إذا كانت g قابلة للتفاضل عند نقطة داخلة t_0 للفترة J ، فإن الفراغ المماسي المنحنى C_g عند النقطة $g(t_0) = (g_1(t_0),\ g_2(t_0),\ g_3(t_0)) \in \boldsymbol{R}^3$ يعطى بارامتريا بالراسم المألوف $A_{t_0} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3$ والمعروف بأنه

$$A_{t_0}(t) = g(t_0) + Dg(t_0)(t - t_0)$$

أثبت أن الفراغ المماسى للمنحنى C_g عند هذه النقطة هو

$$\{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 : x = g_1(t_0) + g_1'(t_0)(t - t_0),$$
$$y = g_2(t_0) + g_2'(t_0)(t - t_0), \qquad z = g_3(t_0) + g_3'(t_0)(t - t_0)\}$$

إذا كانت $g_1'(t_0), g_2'(t_0), g_3'(t_0)$ ليست كلها أصفاراً ، فإن هذا الفراغ المماسى هو مستقيم فى $\boldsymbol{R}^3$ ويسمى الخط المماسى .

٣٩ – (ف) أوجد المعادلات البارامترية للخطوط المماسية للمنحنيات الآتية فى الفراغ $\boldsymbol{R}^3$ عند النقط المعينة :

(أ) $g : t \to (x, y, z) = (t, t^2, t^3)$
عند النقاط المناظرة إلى $t = 1$ ، $t = 0$.

(ب) $g : t \to (x, y, z) = (t - 1, t^2, 2)$
عند النقاط المناظرة إلى $t = 1$ ، $t = 0$.

(ج) $g : t \to (x, y, z) = (2 \cos t, 2 \sin t, t)$
عند النقط المناظرة إلى $t = \pi$ ، $t = \pi/2$.

٣٩ – (ص) نفرض أن $A \subseteq \boldsymbol{R}^2$ ونفرض أن $h : A \to \boldsymbol{R}^3$ تمثل سطحاً S_h فى $\boldsymbol{R}^3$ بارامتريا :

$$S_h = \{(h_1(s, t), h_2(s, t), h_3(s, t)) : (s, t) \in A\}$$

إذا كانت h قابلية التفاضل عند النقطة الداخلية (s_0, t_0) من A ، حينئذ يكون الفراغ المماسى للسطح S_h عند النقطة $h(s_0, t_0) = (h_1(s_0, t_0), h_2(s_0, t_0), h_3(s_0, t_0)) \in \boldsymbol{R}^3$ معطياً بارامتريا بالراسم المألوف $A_{(s_0, t_0)} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3$ والمعروف بأنه

$$A_{(s_0, t_0)}(s, t) = h(s_0, t_0) + Dh(s_0, t_0)(s - s_0, t - t_0)$$

أثبت أن الفراغ المماسى إلى S_h عند هذه النقطة هو

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = h_1(s_0, t_0) + D_1h_1(s_0, t_0)(s - s_0) + D_2h_1(s_0, t_0)(t - t_0),$$
$$y = h_2(s_0, t_0) + D_1h_2(s_0, t_0)(s - s_1) + D_2h_2(s_0, t_0)(t - t_0),$$
$$z = h_3(s_0, t_0) + D_1h_3(s_0, t_0)(s - s_0) + D_2h_3(s_0, t_0)(t - t_0)\}$$

إذا كانت المتجهات $(D_1 h_1 (s_0, t_0), D_1 h_2 (s_0, t_0), D_1 h_3 (s_0, t_0))$ و $(D_2h_1(s_0, t_0), (D_2h_2 (s_0, t_0), D_2h_3 (s_0, t_0))$ فى الفراغ $\mathbf{R}^3$ ليست مضاعفات لكل منها للآخر فإن هذا الفراغ المماسى هو مستوى فى $\mathbf{R}^3$ ويسمى بالمستوى المماسى .

٣٩ – (ق) أوجد معادلات بارامترية للمستويات المماسية للسطوح الآتية فى $\mathbf{R}^3$ عند النقط المعينة .

(أ) $h : (s, t) \to (x, y, z) = (s, t, s^2 + t s^2)$ عنـد النقط المناظرة إلى $(1, 1)$ و $(s, t) = 0, 0)$.

(ب) $h : (s; t) \to (x, y, z) = (s + t, s - t, s^2 - t^2)$ عند النقط المناظرة إلى $(1, 2)$ و $(s, t) = (0, 0)$.

(ج) $h : (t, t) \to (x, y, z) = (s \cos t, s \sin t, t)$ عند النقط المناظرة إلى $(2, \pi/2)$ و $(s, t) = (1, 0)$.

(د) $h : (s, t \to x; y, z) = (\cos s \sin t, \sin s \sin t, \cos t)$ عند النقط المناظرة إلى $(\pi/4, \pi/4)$ و $(s, t) = 0, 0), (0, \pi/2)$.

٣٩ – (ر) إذا كانت $A \subseteq \mathbf{R}^p$ ، وكانت $f : A \to \mathbf{R}$ بحيث إن المشتقات الجزئية $D_1f, \ldots, D_pf$ موجودة ومحدودة فى جوار من $c \in A$ ، حينئذ f تكون متصلة عند c . (إرشاد : ناقش كما فى البرهان لنظرية ٣٩ – ٩) .

٣٩ – (ش) نفرض أن f معرفة فى جوار نقطة $c \in \mathbf{R}^2$ بقيم فى $\mathbf{R}$. نفرض أن $D_1 f$ موجودة ومتصلة فى جوار النقطة c وأن $D_2 f$ موجودة عند c . أثبت أن f قابلة للتفاضل عند c .

٣٩ – (ت) نفرض أن $A \subseteq \mathbf{R}^p$ وأن $f : A \to \mathbf{R}^q$ و $g : A \to \mathbf{R}^r$ معطاة . وإذا كانت $F : A \to \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^r = \mathbf{R}^{q+r}$ معرفة بأنها $F(x) = (f(x), g(x))$ عند $x \in A$ ، أثبت أن F قابلة للتفاضل عند النقطة الداخلية $c \in A$ إذا وإذاً فقط كانت g ، f قابلتين للتفاضل عند c . فى هذه الحالة نجد أن

$$DF(c)(u) = (Df(c)(u), Dg(c)(u)) \qquad \text{عند} \quad u \in \mathbf{R}^p$$

٣٩ – (ث) نفرض أن $A \subseteq \boldsymbol{R}^p$ ، $B \subseteq \boldsymbol{R}^q$ ونفرض أن $G : A \times B \to \boldsymbol{R}^r$ قابلة للتفاضل عند النقطة (a, b) فى $A \times B$. نعرف $g_1 : A \to \boldsymbol{R}^r$. و $g_2 : B \to \boldsymbol{R}^r$ بأنه « الراسم الجزئى » عند (a, b) والمعطى بما يلى

$$g_1(x) = G(x, b), \quad g_2(y) = G(a, y)$$

لجميع $x \in A, \ y \in B$. أثبت أن g_2 و g_1 قابلتان للتفاضل عند b و a ، على الترتيب ، وأن

$$Dg_1(a)(u) = DG(a, b)(u, 0), \qquad Dg_2(b)(v) = DG(a, b)(0, v)$$

لجميع $u \in \boldsymbol{R}^p, v \in \boldsymbol{R}^q$ وبالإضافة إلى ذلك ، نجد أن

$$DG(a, b)(u, v) = Dg_1(a)(u) + Dg_2(b)(v)$$

تسمى $Dg_2(b) \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^q, \boldsymbol{R}^r)$ و $Dg_1(a) \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^p, \boldsymbol{R}^r)$ أحياناً « قالب تفاضلات جزئية » للدالة G عند (a, b) ويرمز لها بالرمز $D_{(2)}G(a, b)$ و $D_{(1)}G(a, b)$

الباب الأربعون – نظريتا قاعدة السلسلة والقيمـــة المتوسطة :

سوف نثبت أولا العلاقات الجبرية الأساسية المرتبطة بالمشتقات . سنستخدم هذه الخواص ، التى هى نفس الخواص لدوال حقيقية القيمة لمتغير واحد ، بكثيرة فيما يلى .

٤٠ – ١ نظرية . نفرض أن $A \subseteq \boldsymbol{R}^p$ وأن c نقطة داخلية من A .

(أ) إذا كانت g و f معرفتين فى A إلى $\boldsymbol{R}^q$ وقابلتين للتفاضل عند c ، وإذا كانت $\beta \in \boldsymbol{R}$ و α ، حينئذ تكون الدالة $h = \alpha f + \beta g$ قابلة للتفاضل عند c ، يكون

$$Dh(c) = \alpha Df(c) + \beta Dg(c)$$

(ب) إذا كانت $f : A \to \boldsymbol{R}^q$ و $\varphi : A \to \boldsymbol{R}$ قابلتين للتفاضل عند c ، فإن دالة حاصل ضرب $k = \varphi f : A \to \boldsymbol{R}^q$ تكون قابلة للتفاضل عند c ويكون

$$Dk(c)(u) = \{D\varphi(c)(u)\}f(c) + \varphi(c)\{Df(c)(u)\} \qquad \text{عند } u \in \boldsymbol{R}^p$$

البرهان . (أ) إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، فتوجد $\delta_2(\varepsilon) > 0$ و $\delta_1(\varepsilon) > 0$ بحيث إنه إذا كانت $\|x - c\| \leq \inf\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ ، فإن

$$\|f(x) - f(c) - Df(c)(x - c)\| \leq \varepsilon \|x - c\|,$$

$$\|g(x) - g(c) - Dg(c)(x - c)\| \leq \varepsilon \|x - c\|$$

أى أنه ، إذا كانت $\|x - c\| \leq \inf\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ فإن

$$\|h(x) - h(c) - \{\alpha Df(c)(x - c) + \beta Dg(c)(x - c)\}\| \leq (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon \|x - c\|$$

بما أن $\alpha Df(c) + \beta Dg(c)$ دالة خطية للفراغ R^p إلى الفراغ R^q ، فينتج أن h قابلة للتفاضل عند c وأن $Dh(c) = \alpha Df(c) + \beta Dg(c)$.

(ب) يوضح حساب بسيط أن

$$\begin{aligned} k(x) - k(c) - \{D\varphi(c)(x-c)f(c) + \varphi(c)Df(c)(x-c)\} \\ = \{\varphi(x) - \varphi(c) - D\varphi(c)(x-c)\}f(x) \\ + D\varphi(c)(x-c)\{f(x) - f(c)\} + \varphi(c)\{f(x) - f(c) - Df(c)(x-c)\} \end{aligned}$$

بما أن $Df(c)$ موجودة ، فنستنتج من مفترض (٣٩ – ٥) أن f متصلة عند c ، ومن ثم يوجد مقدار ثابت M بحيث إن $\|f(x)\| < M$ عند $\|x - c\| \le \delta$. يمكن أن يتضح من هذا أن كل الحدود الموجودة فى الطرف الأيمن من المعادلة الأخيرة يمكن جعلها صغيرة بدرجة اختيارية باختيار $\|x - c\|$ صغيراً صغراً كافياً . هذا يثبت (ب) .

وهو المطلوب إثباته

تؤكد النتيجة الآتية الهامة جداً أن المشتقة لتركيب دالتين قابلتين للتفاضل هى التركيب لمشتقاتهما .

٤٠ – ٢ قاعدة السلسلة . نفرض أن f لها نطاق $A \subseteq R^p$ ومدى فى الفراغ R^q ، ونفرض أن g لها نطاق $B \subseteq R^q$ ومدى فى الفراغ R^r . نفرض أن f قابلة للتفاضل عند c وأن g قابلة للتفاضل عند $b = f(c)$. حينئذ يكون التركيب $h = g \circ f$ قابلا للتفاضل عند c ويكون

$$Dh(c) = Dg(b) \circ Df(c) \tag{40.1}$$

وبالتعاقب نكتب

$$D(g \circ f)(c) = Dg(f(c)) \circ Df(c) \tag{40.2}$$

البرهان . يدل الفرض على أن c نقطة داخلية من النطاق للتركيب $h = g \circ f$. (لماذا ؟) نفرض أن $\varepsilon > 0$ ونفرض أن $\delta(\varepsilon, f)$ و $\delta(\varepsilon, g)$ هى كما فى تعريف (٣٩ – ٢) . فينتج من مفترض (٣٩ – ٥) أنه يوجد عددان موجبان دقيقان K و γ بحيث إنه إذا كانت $\|x - c\| \le \gamma$ ، فإن $f(x) \in B$ وأن

$$\|f(x) - f(c)\| \le K \|x - c\| \tag{40.3}$$

نكتب للبساطة ، $L_g = Dg(b)$ و $L_f = Df(c)$. من نظرية (٢١ – ٣) يوجد مقدار ثابت M بحيث إنه

$$\|L_g(u)\| \le M \|u\|, \qquad \text{for } u \in R^q \tag{40.4}$$

إذا كانت $\|x - c\| \le \inf \{\gamma, (1/K)\, \delta(\varepsilon, g)\}$ ، فتدل (٤٠ – ٣) على أن

التى تعنى أن $\|f(x)-f(c)\| \le \delta(\varepsilon, g)$

$$\|g(f(x))-g(f(c))-L_g(f(x)-f(c))\| \le \varepsilon\,\|f(x)-f(c)\| \le \varepsilon K\,\|x-c\| \quad (40.5)$$

إذا احتجنا أيضاً إلى أن $\|x-c\| \le \delta(\varepsilon, f)$ ، فنستنتج من (٤٠ – ٤) أن

$$\|L_g\{f(x)-f(c)-L_f(x-c)\}\| \le \varepsilon M\,\|x-c\|$$

إذا ربطنا هذه العلاقة الأخيرة مع (٤٠ – ٥) ، نستنتج أنه إذا كانت

$\delta_1 = \inf\{\gamma, (1/K)\,\delta(\varepsilon, g), \delta(\varepsilon, f)\}$ وإذا كانت $\|x-c\| \le \delta_1$ و $x \in A$

فإن

$$\|g(f(x))-g(f(c))-L_g(L_f(x-c))\| \le \varepsilon(K+M)\,\|x-c\|$$

التى تعنى أن

$$\|g\circ f(x)-g\circ f(c)-L_g\circ L_f(x-c)\| \le \varepsilon(K+M)\,\|x-c\|$$

نستنتج أن $Dh(c) = L_g \circ L_f$ وهو المطلوب إثبـــاته

بالحفاظ على الرموز المستخدمة فى برهان النظرية ، تكون $L_f = Df(c)$ دالة خطية من R^p إلى R^q وتكون $L_g = Dg(b)$ دالة خطية للفراغ R^q إلى الفراغ R^r . فيكون التركيب $L_g \circ L_f$ دالة خطية للفراغ R^p إلى R^r ، كالمطلوب ، لأن $h = g\circ f$ دالة معرفة فى جزء من الفراغ R^p بقيم فى R^r . سنعتبر الآن بعض أمثلة لهذه النتيجة .

٤٠ – ٣ أمثلة . (أ) نفرض أن $p = q = r = 1$ ، إذن المشتقة $Df(c)$ هى الدالة الخطية التى ترسل العدد الحقيقى u إلى $f'(c)u$ ، وبالمثل فى حالة $Dg(b)$. ينتج أن المشتقة للتركيب $g^\circ f$ ترسل العدد الحقيقى u إلى $g'(b)f'(c)u$.

(ب) نفرض أن $p > 1, q = r = 1$. طبقاً لمثال (٣٩ – ٨) (ج) ، نأخذ المشتقة للدالة f عند النقطة c النقطة $w = (w_1, \ldots, w_p)$ للفراغ R^p إلى العدد الحقيقى

$$D_1f(c)w_1 + \cdots + D_pf(c)w_p$$

وإذن نرسل مشتقة $g^\circ f$ عند النقطة c هذه النقطة للفراغ R^p إلى العدد الحقيقى

$$g'(b)[D_1f(c)w_1 + \cdots + D_pf(c)w_p]$$

(ج) نفرض أن $p = r = 1; q > 1$. حسب مثال (٣٩ – ٨) (ب) ، (ج) نأخذ المشتقة $Df(c)$ نأخذ العدد الحقيقى u إلى النقطة

$$Df(c)(u) = uf'(c) = (f_1'(c)u, \ldots, f_q'(c)u) \qquad \text{in } R^q$$

والمشتقة $Dg(b)$ ترسل النقطة $w = (w_1, \ldots, w_q)$ فى الفراغ R^q إلى العدد الحقيقى

$$D_1g(b)w_1 + \cdots + D_qg(b)w_q$$

ينتج أن مشتقة $h = g^{\circ}f$ ترسل العدد الحقيقى u إلى العدد الحقيقى

$$Dh(c)u = \{D_1g(b)f_1'(c) + \cdots + D_qg(b)f_q'(c)\}u = u\{Dg(b)(f'(c))\}$$

يرمز للكية داخل القوسين ، التى هى $h'(c) = (g^{\circ}f)'(c)$ أحياناً بالرمز الأقل دقة

$$\frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{df_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_q}\frac{df_q}{dx}$$

يجب أن يكون مفهوماً فى هذه الحالة أن المشتقات تحسب عند نقطة مناسبة .

(د) نعتبر الحالة التى فيها $p = q = 2$ ، $r = 3$. لتبسيط الرموز ، نرمز للأحداثيات المتغيرة فى R^p بأنها (x, y) ، فى الفراغ R^q بأنها (w, z) وفى الفراغ R^r بأنها (r, s, t) . إذن يمكن التعبير عن دالة f فى R^p إلى R^q فى الصورة

$$w = W(x, y), \qquad z = Z(x, y)$$

ودالة g فى R^q إلى R^r يمكن التعبير عنها فى الصورة

$$r = R(w, z), \qquad s = S(w, z), \qquad t = T(w, z)$$

المشتقة $Df(c)$ ترسل (ξ, η) إلى (ω, ζ) طبقاً للقانونين

$$\begin{aligned} \omega &= W_x(c)\xi + W_y(c)\eta, \\ \zeta &= Z_x(c)\xi + Z_y(c)\eta \end{aligned} \tag{40.6}$$

نكتب هنا W_x لتدل على $D_1W = D_xW$ الخ . أيضاً المشتقة $Dg(b)$ ترسل (ω, ζ) إلى (ρ, σ, τ) طبقاً للعلاقات

$$\begin{aligned} \rho &= R_w(b)\omega + R_z(b)\zeta, \\ \sigma &= S_w(b)\omega + S_z(b)\zeta, \\ \tau &= T_w(b)\omega + T_z(b)\zeta \end{aligned} \tag{40.7}$$

يوضح حساب روتينى أن المشتقة $g^{\circ}f$ ترسل (ξ, η) إلى (ρ, σ, τ) بواسطة

$$\begin{aligned} \rho &= \{R_w(b)W_x(c) + R_z(b)Z_x(c)\}\xi + \{R_w(b)W_y(c) + R_z(b)Z_y(c)\}\eta, \\ \sigma &= \{S_w(b)W_x(c) + S_z(b)Z_x(c)\}\xi + \{S_w(b)W_y(c) + S_z(b)Z_y(c)\}\eta, \\ \tau &= \{T_w(b)W_x(c) + T_z(b)Z_x(c)\}\xi + \{T_w(b)W_y(c) + T_z(b)Z_y(c)\}\eta \end{aligned} \tag{40.8}$$

ونكتب رموزاً أكثر بلاغة dx, dy بدلا من ξ, η; dw, dz بدلا من ω, ζ ، dr, ds, dt بدلا من ρ, σ, τ . إذا رمزنا لقيم المشتقة الجزئية W_x ، عند النقطة c بأنها $\partial w/\partial x$ ، الخ ، فإن (٤٠ – ٦) تصبح

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

بالمثل ، (٤٠ — ٧) تصبح

$$dr = \frac{\partial r}{\partial w} dw + \frac{\partial r}{\partial z} dz,$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial w} dw + \frac{\partial s}{\partial z} dz,$$

$$dt = \frac{\partial t}{\partial w} dw + \frac{\partial t}{\partial z} dz$$

وتكتب (٤٠ — ٨) على الصورة

$$dr = \left(\frac{\partial r}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial r}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy,$$

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial s}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy,$$

$$dt = \left(\frac{\partial t}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial t}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy$$

فى هــذه المجموعات الثلاث من القوانين السابقة يكون من المهم التحقيق من أن كل المشتقات الجزئية المشار إليها محسوبة عند نقط مناسبة . إذا معاملات dx, dy ... الخ تتحول إلى أعداد حقيقية .

يمكننا التعبير عن معادلة (٤٠ — ٦) بمصطلحات المصفوفة بقولنا أن الراسم $Df(c)$ من (ξ, η) إلى (ω, ζ) يعطى بالمصفوفة 2×2

$$\begin{bmatrix} W_x(c) & W_y(c) \\ Z_x(c) & Z_y(c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x}(c) & \frac{\partial w}{\partial y}(c) \\ \frac{\partial z}{\partial x}(c) & \frac{\partial z}{\partial y}(c) \end{bmatrix} \tag{40.9}$$

بالمثل (٤٠ — ٧) تؤكد أن الراسم $Dg(b)$ من (ω, ζ) إلى (ρ, σ, τ) يعطى بالمصفوفة 3×2 .

$$\begin{bmatrix} R_w(b) & R_z(b) \\ S_w(b) & S_z(b) \\ T_w(b) & T_z(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial w}(b) & \frac{\partial r}{\partial z}(b) \\ \frac{\partial s}{\partial w}(b) & \frac{\partial s}{\partial z}(b) \\ \frac{\partial t}{\partial w}(b) & \frac{\partial t}{\partial z}(b) \end{bmatrix} \tag{40.10}$$

أخيراً ، نؤكد علاقة (٤٠ — ٨) أن الراسم $D(g^\circ f)(c)$ من (ξ, η) إلى (ρ, σ, τ) يكون معطياً بالمصفوفة 3×2

$$\begin{bmatrix} R_w(b)W_x(c)+R_z(b)Z_x(c) & R_w(b)W_y(c)+R_z(b)Z_y(c) \\ S_w(b)W_x(c)+S_z(b)Z_x(c) & S_w(b)W_y(c)+S_z(b)Z_y(c) \\ T_w(b)W_x(c)+T_z(b)Z_x(c) & T_w(t)W_y(c)+T_z(b)Z_y(c) \end{bmatrix}$$

التى هى حاصل ضرب المصفوفة الموجودة فى (٤٠ - ١٠) فى المصفوفة الموجودة فى (٤٠ - ٩) بنفس الترتيب

نظرية القيمة المتوسطة :

نتجه الآن إلى المسألة الخاصة بالحصول على الحالة العامة لنظرية القيمة المتوسطة (٢٧ - ٦) لدوال قابلة للتفاضل فى R^p إلى R^q . سيتضح أن تشابهاً مباشراً لنظرية (٢٧ - ٦) لايكون صحيحاً عندما $q > 1$. من الممكن أن نتوقع أنه إذا كانت الدالة f قابلة للتفاضل عند كل نقطة من الفراغ R^p بقيم فى الفراغ R^q ، وإذا كانت a, b تنتمى إلى R^p ، حينئذ توجد نقطة c (تقع بين a, b) بحيث أن

$$f(b)-f(a)=Df(c)(b-a) \tag{40.11}$$

هذا الاستنتاج يفشل حتى عند $p=1,\ q=2$ كما يتضح من الدالة f المعرفة فى R إلى R^2 بالقانون

$$f(x)=(x-x^2, x-x^3)$$

$Df(c)$ هنا دالة خطية فى R إلى R^2 التى ترسل عدداً حقيقياً u إلى العنصر

$$Df(c)(u)=((1-2c)u, (1-3c^2)u)$$

الآن $f(0)=(0, 0)$ و $f(1)=(0\ \ 0)$ ، لكن لاتوجد نقطة c بحيث أن

$$Df(c)(u)=(0, 0)$$

لأى قيمة للعدد u غير صفر فى الفراغ R . إذن لايمكن للقانون (٤٠ - ١١) أن يظل صحيحاً فى الحالة العامة عندما $q > 1$ ، حتى عند $p=1$. لكن ، يكفى لتطبيقات كثيرة اعتبار الحالة التى عندها $q=1$ وهنا يكون امتداد نظرية القيمة المتوسطة سهلا .

٤٠ - ٤ نظرية القيمة المتوسطة . نفرض أن f معرفة فى فئة جزئية مفتوحة Ω من الفراغ R^p ولها قيم فى R . نفرض أن الفئة Ω تحتوى النقطتين a, b وجزء الخط المستقيم S الذى يصلهما ، وأن f قابلة للتفاضل عند كل نقطة من هذا الجزء . حينئذ توجد نقطة c فى S بحيث أن

$$f(b)-f(a)=Df(c)(b-a) \tag{40.11}$$

البرهان . نفرض أن $\varphi: R \to R^p$ معرفة بأنها

$$\varphi(t) = (1-t)a + tb = a + t(b-a)$$

بحيث أن $\varphi(0) = a,\ \varphi(1) = b$ و $\varphi(t) \in S \subseteq \Omega$ عند $t \in [0, 1]$. بما أن الفئة الجزئية Ω مفتوحة والدالة φ متصلة ، فيوجد عدد $\gamma > 0$ بحيث أن φ ترسم الفترة $(-\gamma, 1+\gamma)$ إلى Ω . نفرض الآن أن $F: (-\gamma, 1+\gamma) \to R$ معرفة بأنها

$$F(t) = f \circ \varphi(t) = f((1-t)a + tb)$$

باستخدام قاعدة السلسلة (أنظر ٤٠ - ٣ (ج) وأيضاً ٤٠ - ع) ينتج أن

$$F'(t) = Df((1-t)a + tb)(\varphi'(t))$$
$$= Df((1-t)a + tb)(b-c)$$

إذا استخدمنا نظرية القيمة المتوسطة (٢٧ - ٦) إلى F ، نستنتج أنه يوجد $t_0 \in (0, 1)$ بحيث أن $F(1) - F(0) = F'(t_0)$. بفرض $c = \varphi(t_0) \in S$ ، نحصل على

$$f(b) - f(a) = F(1) - F(0)$$
$$= F'(t_0) = Df(c)(b-a)$$

وهو المطلوب إثباته

مع أن معظم الامتداد الطبيعي لنظرية القيمة المتوسطة لايكون صحيحاً عندما يكون مدى الفراغ هو $R^q,\ q > 1$ ، يمكن وجود بعض امتدادات . وأحد هذه الامتدادات الأكثر فائدة يعتمد على متباينة بالأحرى عن متساوية .

٤٠ - ٥ نظرية القيمة المتوسطة . نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ فئة مفتوحة ونفرض أن $f: \Omega \to R^q$ نفرض أن Ω تحتوى النقطتين a, b وجزء خط مستقيم S يصل بين هاتين النقطتين ، وأن f قابلة للتفاضل عند كل نقطة من S . حينئذ توجد نقطة c فى S بحيث أن

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|Df(c)(b-a)\| \tag{40.12}$$

البرهان إذا كان $y_0 = f(b) - f(a)$ المتجه الصفرى R^q ، فإن النتيجة بسيطة . إذا كانت $y_0 \neq 0$ نفرض أن $y_1 = y_0/\|y_0\|$ ونستخدم حاصل الضرب القياسى فى R^q لتعريف $H: \Omega \to R$ بأنها

$$H(x) = f(x) \cdot y_1 \qquad \text{عند } x \in \Omega$$

من الواضح أن

$$H(b) - H(a) = \{f(b) - f(a)\} \cdot y_1 = \|f(b) - f(a)\|$$

ومن السهل اتضاح (تمرين ٤٠ - ح) أن

$$DH(x)(u) = \{Df(x)(u)\} \cdot y_1$$

عند $x \in S, u \in \boldsymbol{R}^p$. ينتج من نظرية القيمة المتوسطة ٤٠ – ٤ أنه توجد نقطة c فى S بحيث أن

$$\begin{aligned} H(b) - H(a) &= DH(c)(b-a) \\ &= \{Df(c)(b-a)\} \cdot y_1 \end{aligned}$$

إذا استخدمنا متباينة شفارتز وحقيقة كون $\|y_1\| = 1$ ، نجد أن

$$\|f(b) - f(a)\| = \{Df(c)(b-a)\} \cdot y_1 \leq \|Df(c)(b-a)\|$$

وهو النتيجة المطلوبة وهو المطلوب إثباته

بما أن القيمة المضبوطة للنقطة c تكون عادة غير معلومة ، فإن النظرية تستخدم غالباً باستعمال النتيجة الآتية ، التى يستخدم نصها مفهوم العمود لراسم خطى L من $\boldsymbol{R}^p$ إلى $\boldsymbol{R}^q$ المذكور فى تمرين ٢١ – ل . من الضرورى فقط أن نتذكر أن $\|L(u)\| \leq M\|u\|$ لكل $u \in \boldsymbol{R}^p$ ، إذا وإذا فقط كان العمود $\|L\|_{pq} \leq M$.

٤٠ – ٦ نتيجـة . نفرض صحة فروض نظرية ٤٠ – ٥ ونفرض أنه يوجد $M > 0$ بحيث أن $\|Df(x)\|_{pq} \leq M$ لجميع $x \in S$. حينئذ نجد أن

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b-a\|$$

البرهان . بما أن $\|Df(c)(b-a)\| \leq \|Df(c)\|_{pq}\|b-a\|$ ، وبما أن $c \in S$ نحصل على

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|Df(c)(b-a)\| \leq \|Df(c)\|_{pq}\|b-a\| \leq M\|b-a\|$$

وهو المطلوب إثباته

تبادل ترتيب التفاضل :

إذا كانت f دالة لها نطاق فى الفراغ $\boldsymbol{R}^p$ ومدى فى الفراغ $\boldsymbol{R}$ ، حينئذ ربما يكون للدالة f مشتقات جزئية « أولية » عددها p ، نرمز لها بالرموز

$$D_i f \qquad \text{أو} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p$$

كل من المشتقات الجزئية هى دالة لها نطاق فى الفراغ $\boldsymbol{R}^p$ ومدى فى $\boldsymbol{R}$ ولذلك كل من هذه الدوال p ربما يكون لها مشتقات جزئية عددها p . باتباع الرمز الأمريكى المقبول ، سنشير إلى الدوال p^2 الناتجة (أو مثل هذه الدوال وجدت) كالمشتقات الجزئية من الرتب الثانية للدالة f وسوف نرمز لها بالآتى

$$D_{ji}f \qquad \text{أو} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, p$$

ينبغى ملاحظة أن المشتقة الجزئية المقصودة بأى من الرموز السابقة فى المشتقة الجزئية بالنسبة إلى x_j للمشتقة الجزئية للدالة f بالنسبة إلى x_i . (بمعنى آخر : أولا x_i ، ثم x_j).

يمكننا بطريقة مشابهة ، بحث وجود المشتقات الجزئية من الرتبة الثالثة والتى لها رتب أعلى . وكقاعدة ، يمكن لدالة فى الفراغ R^p إلى الفراغ R أن يكون لها p^n مشتقات جزئية نونية . لكن ، توجد ملائمة ذات الأهمية وهى أنه إذا كانت المشتقات الناتجة متصلة فإن رتبة التفاضل ليست مهمة . وعلاوة على ذلك لانقاص العدد (محتمل تمييزه) للمشتقات الجزئية من رتب أعلى ، فإن هذه القيمة تزيل إلى حد كبير الخطر من التمييز الرمزى الدقيق نوعا ما والمستخدم لرتب مختلفة للتفاضل .

يكفى أن نعتبر تبادل رتبة المشتقات الثانية باعتبار كل الأحداثيات الأخرى ثابتة ، نرى أنه لايوجد فقد لحالة العامة لاعتبار دالة فى الفراغ R^2 إلى الفراغ R . لكى نبسط رموزنا نفرض أن (x, y) تشير إلى نقطة فى الفراغ R^2 وسوف نوضح أنه إذا كانت $D_x f$ ، $D_y f$ ، $D_{yx} f$ موجودة وأنه إذا كانت $D_{yx} f$ متصلة عند نقطة ، حينئذ تكون المشتقة الجزئية $D_{xy} f$ موجودة عند هذه النقطة ومساوية $D_{yx} f$. سيلاحظ فى تمرين (٤٠-ش) أنه من الممكن أن كلا من $D_{xy} f$ و $D_{yx} f$ موجودة عند نقطة ومع ذلك ليسا متساويين .

التبرير الذى سيستخدم فى هذا البرهان هو توضيح أن كلا من هاتين المشتقتين الجزئيتين المختلطتين عند النقطة $(0, 0)$ هما نهاية خارج القسمة

$$\frac{f(h, k) - f(h, 0) - f(0, k) + f(0, 0)}{hk}$$

عندما تقرب (h, k) من $(0,0)$.

٤٠ – ٧ مفترض . نفرض أن f معرفة فى جوار U من نقطة الأصل فى R^2 بقيم فى R ، وأن المشتقتين $D_x f$ ، $D_{yx} f$ موجودتان فى U ، وأن $D_{yx} f$ متصلة عند $(0, 0)$. إذا كانت A هى الفرق المخلوط

$$A(h, k) = f(h, k) - f(h, 0) - f(0, k) + f(0, 0) \tag{40.13}$$

فنجد أن

$$D_{yx} f(0, 0) = \lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{A(h, k)}{hk}$$

البرهان . نفرض أن $0 < \varepsilon$ وأن $0 < \delta$ صغيرة بدرجة أنه إذا كانت $|k| < \delta$ ، $|h| < \delta$ ، فإن النقطة (h, k) تنتمى إلى U وأن

$$|D_{yx}f(h, k) - D_{yx}f(0, 0)| < \varepsilon \tag{40.14}$$

إذا كانت $|k| < \delta$ فنعرف B عند $|h| < \delta$ بأنها

$$B(h) = f(h, k) - f(h, 0)$$

التى منها ينتج أن $A(h, k) = B(h) - B(0)$. حسب الفرض ، المشتقة الجزئية $D_x f$ موجودة فى U وإذن B لها مشتقة . بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة ٢٧ - ٦ إلى B ، نجد أنه يوجد عدد h_0 عند $0 < |h_0| < |h|$ بحيث أن

$$A(h, k) = B(h) - B(0) = hB'(h_0) \tag{40.15}$$

(من الملاحظ أن القيمة للمقدار h_0 تعتمد على القيمة للمقدار k ، لكن سوف لا يسبب هذا أى صعوبة) بالرجوع إلى تعريف الدالة B ، نجد أن

$$B'(h_0) = D_x f(h_0, k) - D_x f(h_0, 0)$$

بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الطرف الأيمن للمعادلة الأخيرة ، نجد أنه يوجد عدد k_0 حيث $0 < |k_0| < |k|$ بحيث أن

$$B'(h_0) = k\{D_{yx}f(h_0, k_0)\} \tag{40.16}$$

بربط معادلتى (٤٠ - ١٥) ، (٤٠ - ١٦) ، نستنتج أنه إذا كانت $0 < |h| < \delta$ و $0 < |k| < \delta$ ، فإن

$$\frac{A(h, k)}{hk} = D_{yx}f(h_0, k_0)$$

حيث $0 < |h_0| < |h|, 0 < |k_0| < |k|$. ينتج من متباينة (٤٠ - ١٤) والتعبير السابق أن

$$\left|\frac{A(h, k)}{hk} - D_{yx}f(0, 0)\right| < \varepsilon$$

عندما $0 < |k| < \delta$ و $0 < |h| < \delta$. وهو المطلوب إثباته

يمكننا الآن الحصول على شرط مفيد (يرجع إلى شفارتز) لتساوى الجزئيات المخلوطة .

٤٠ - ٨ نظرية . نفرض أن f معرفة فى جوار U لنقطة (x, y) فى $\mathbf{R}^2$ بقيم فى $\mathbf{R}$. نفرض أن المشتقات الجزئية $D_x f, D_y f, D_{yx} f$ موجودة فى U وأن $D_{yx}f$ متصلة عند (x, y) . حينئذ تكون المشتقة الجزئية $D_{xy}f$ موجودة عند (x, y) ويكون

$$D_{xy}f(x, y) = D_{yx}f(x, y)$$

البرهان . لا نفقد الحالة العامة إذا فرضنا أن $(x, y) = (0, 0)$ وسوف نفعل ذلك . إذا كانت A هي الدالة المذكورة في المفترضة السابقة ، فقد لاحظنا أن

$$D_{yx}f(0, 0) = \lim_{(h, k)\to(0,0)} \frac{A(h, k)}{hk} \tag{40.17}$$

وجود هذه النهاية المزدوجة هي جزء من الاستنتاج . من الفرض ، $D_y f$ موجودة في U ، وإذن

$$\lim_{k\to 0} \frac{A(h, k)}{hk} = \frac{1}{h}\{D_yf(h, 0) - D_yf(0, 0)\}, \qquad h \neq 0 \tag{40.18}$$

إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، فيوجد عدد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث أنه إذا كانت $0 < |h| < \delta(\varepsilon)$ ، $0 < |k| < \delta(\varepsilon)$ ، فإن

$$\left|\frac{A(h, k)}{hk} - D_{yx}f(0, 0)\right| < \varepsilon$$

بأخذ النهاية في هذه المتباينة بالنسبة إلى k واستخدام (٤٠ – ١٨) نحصل على

$$\left|\frac{1}{h}\{D_yf(h, 0) - D_yf(0, 0)\} - D_{yx}f(0, 0)\right| \leq \varepsilon$$

لجميع h التي تحقق $0 < |h| < \delta(\varepsilon)$ ، وإذن $D_{xy}f(0, 0)$ موجودة وتساوي $D_{xy}f(0,0)$. وهو المطلوب إثباته

مشتقات أعلى

إذا كانت f دالة لها نطاق في R^p ومدى في R ، حينئذ تكون المشتقة $Df(c)$ للدالة f عند النقطة c هي الدالة الخطية في R^p إلى R بحيث أن

$$\|f(c+z) - f(c) - Df(c)(z)\| \leq \varepsilon \|z\|$$

عندما تكون z صغيرة صغراً كافياً . هذا يعني أن $Df(c)$ هي الدالة الخطية التي تقترب بتدقيق أكثر من الفرق $f(c+z) - f(c)$ عندما z تكون صغيرة . تقود أي دالة خطية أخرى إلى تقريب أقل في الدقة عندما تكون z صغيرة . من هذه الخاصية للتعريف ، يتضح أنه إذا كانت $Df(c)$ موجودة ، فإنها تكون بالضرورة معطاة بالقانون .

$$Df(c)(z) = D_1f(c)z_1 + \cdots + D_pf(c)z_p$$

حيث $z = (z_1, \ldots, z_p)$ في R^p .

وبالرغم من أن التقريبات الخطية تكون بصفة خاصة بسيطة ومضبوطة بدرجة كافية لأغراض كثيرة ، يكون من المرغوب فيه أحيانا الحصول على درجة تقريب أدق من التقريب الذى يمكن الحصول عليه باستخدام دوال خطية . من الطبيعى أن نرجع فى مثل هذه الحالات إلى دوال الدرجة الثانية ، دوال الدرجة الثالثة ، . . . الخ ، لإحداث تقريبات أقرب . بما أن نطاق دوالنا هو الفراغ $\boldsymbol{R}^p$ ، فينبغى أن نساق إلى دراسة دوال خطية مضاعفة فى الفراغ $\boldsymbol{R}^p$ إلى $\boldsymbol{R}$ لنقاش شامل لمثل هذه الدوال . مع أن مثل هذه الدراسة ليست صعبة بصفة خاصة ، فستأخذنا بالأحرى بعيداً إلى الحقل حسب التطبيقات المحدودة الموجودة فى عقولنا .

لهذا السبب سنعرف المشتقة الثانية $D^2 f(c)$ للدالة f عند النقطة c بأنها الدالة فى $\boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^p$ إلى $\boldsymbol{R}$ بحيث أنه إذا كانت (y, z) تنتمى إلى هذا الضرب وكانت $z = (z_1, \ldots, z_p)$ و $y = (y_1, \ldots, y_p)$ ، فإن

$$D^2f(c)(y, z) = \sum_{i,j=1}^{p} D_{ji}f(c)y_iz_j$$

فى مناقشة المشتقة الثانية، سنفترض فيما يلى أن المشتقات الجزئية الثانية للدالة f موجودة ومتصلة فى جوار النقطة c بالمثل ، نعرف المشتقة الثالثة $D^3 f(c)$ الدالة f عند c بأنها دالة (y, z, w) فى $\boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^p$ ومعطاة بأنها

$$D^3f(c)(y, z, w) = \sum_{i,j,k=1}^{p} D_{kji}f(c)y_iz_jw_k$$

سنفرض عند مناقشة المشتقة الثالثة أن جميع المشتقات الجزئية الثالثة للدالة f موجودة ومتصلة فى جوار النقطة c .

ينبغى الآن أن تكون طريقة صياغة المشتقات العليا واضحة (من وجهة نظر الملاحظات السابقة المتعلقة بتبادل رتبة التفاضل ، إذا كانت المشتقات الجزئية المخلوطة الناتجة متصلة ، فإنها لا تتوقف على رتبة التفاضل) .

أحد الاختراعات الرمزية المميقة : نكتب

$$\begin{array}{lll} D^2f(c)(w)^2 & \text{for} & D^2f(c)(w, w), \\ D^3f(c)(w)^3 & \text{for} & D^3f(c)(w, w, w), \\ \cdots & & \cdots \\ D^nf(c)(w)^n & \text{for} & D^nf(c)(w, w, \ldots, w) \end{array}$$

إذا كانت $p = 2$ وإذا رمزنا لعنصر من الفراغ $\boldsymbol{R}^2$ بأنه (x, y) وكانت $w = (h, k)$ فإن $D^2f(c)(w)^2$ تساوى التعبير

$$D_{xx}f(c)h^2 + 2D_{xy}f(c)hk + D_{yy}f(c)k^2$$

بالمثل ، $D^3f(c)(w)^3$ وتساوى

$$D_{xxx}f(c)h^3+3D_{xxy}f(c)h^2k+3D_{xyy}f(c)hk^2+D_{yyy}f(c)k^3$$

$D^nf(c)(w)^n$ تساوى التعبير

$$D_{x\cdots x}f(c)h^n+\binom{n}{1}D_{x\cdots xy}f(c)h^{n-1}k+\binom{n}{2}D_{x\cdots xyy}f(c)h^{n-2}k^2$$

$$+\cdots+D_{y\cdots y}f(c)k^n$$

الآن وقد قدمنا هذا المفهوم فإننا سوف نثبت الحالة العامة والهامة لنظرية تايلور لدوال فى R^p إلى R .

٤٠ – ٩ نظرية تايلور . نفرض أن f دالة ذات نطاق مفتوح Ω فى R^p ومدى فى R ، ونفرض أن f لهـا مشتقات جزئية متصلة من درجة n فى جوار كل نقطة على قطعة مستقيم S يصل بين نقطتين $a, b=a+u$ فى Ω . حينئذ توجد نقطة c على S بحيث أن

$$f(a+u)=f(a)+\frac{1}{1!}Df(a)(u)+\frac{1}{2!}D^2f(a)(u)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}f(a)(u)^{n-1}+\frac{1}{n!}D^nf(c)(u)^n$$

البرهان . نفرض أن F معرفة عند t فى I إلى R بأنها

$$F(t)=f(a+tu)$$

وحسب افتراض وجود المشتقات الجزئية للدالة f ، ينتج أن

$$F'(t)=Df(a+tu)(u),$$
$$F''(t)=D^2f(a+tu)(u)^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$F^{(n)}(t)=D^nf(a+tu)(u)^n$$

إذا استخدمنا ترجمة نظرية تايلور ٢٨ – ٦ ابعد واحد للدالة F فى I ، نستنتج أنه يوجد عدد حقيقى t_0 فى I بحيث أن

$$F(1)=F(0)+\frac{1}{1!}F'(0)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(0)+\frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)$$

إذا وضعنا $c=a+t_0u$ ، حينئذ ينتج المطلوب وهو المطلوب إثباته

تمرينـــات :

٤٠ – (أ) إذا كانت $f(x, y) = x^2 + y^2$ و $g(t) = (3t+1, 2t-3)$ ، نفرض أن $F(t) = f\circ g(t)$ ، احسب $F'(t)$ بطريقتين مباشرة وباستخدام قاعدة السلسلة .

٤٠ – (ب) إذا كانت $f(x, y) = xy$ و $g(s, t) = (2s+3t, 4s+t)$ ، نفرض أن $F(s, t) = f\circ g(s, t)$ ، احسب D_1F, D_2F بطريقتين مبـاشرة وباستخدام قاعدة السلسلة .

٤٠ – (ج) إذا كانت $f(x, y, z) = xyz$ و $g(s, t) = (3s+st, s, t)$ ، نفرض أن $F(s, t) = f\circ g(s, t)$ ، احسب D_1F, D_2F بطريقتين مباشرة وباستخدام قاعدة السلسلة .

٤٠ – (د) إذا كانت $f(x, y, z) = xy + yz + zx$

و $g(s, t) = (\cos s, \sin s \cos t, \sin t)$

نفرض أن $F(s, t) = f\circ g(s, t)$. احسب D_1F, D_2F بطريقتين مباشرة وباستخدام قاعدة السلسلة .

٤٠ – (هـ) إذا دارت المحاور الكارتيزية فى المستوى بالزاوية θ ، فإن الإحداثين الجديدين u, v لنقطة ترتبط بالإحداثين الأصليين x, y بالعلاقتين

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta, \qquad y = u\sin\theta + v\cos\theta$$

نفرض أن $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ قابلة التفاضل فى $\mathbf{R}^2$ ونفرض أن $F(u, v) = f(x, y)$ لـكل x, y . أثبت أن

$$[D_1F(u, v)]^2 + [D_2F(u, v)]^2 = [D_1f(x, y)]^2 + [D_2f(x, y)]^2$$

٤٠ - (و) نفرض أن $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ قابلة التفاضـــل فى $\mathbf{R}^2$ ونفرض أن $g: (0, +\infty)\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ معرفة بأنها $g(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ونفرض أن $F = f\circ g$. احسب D_2F و D_1F ووضح أن

$$[D_1F(r, \theta)]^2 + \frac{1}{r^2}[D_2F(r, \theta)]^2 = [D_1f(r\cos\theta, r\sin\theta)]^2 + [D_2f(r\cos\theta, r\sin\theta)]^2$$

٤٠ – (ز) نفرض أن $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ قابلة التفاضل فى $\mathbf{R}$.

(أ) إذا كانت $F(x, y) = f(xy)$ ، فإن $xD_1F(x, y) = yD_2F(x, y)$ لجميع (x, y) .

(ب) إذا كانت $F(x, y) = f(ax + by)$ حيث $a, b \in \mathbf{R}$ فإن $bD_1F(x, y) = aD_2F(x, y)$ لجميـع (x, y) .

(ج) إذا كانت $F(x, y) = f(x^2 + y^2)$ فإن $yD_1F(x, y) = xD_2F(x, y)$ لجميع (x, y) .

(د) إذا كانت $F(x, y) = f(x^2 - y^2)$ فإن $yD_1F(x, y) + xD_2F(x, y) = 0$ لجميع (x, y) .

٤٠ – (ح) نفرض أن $A \subseteq \boldsymbol{R}^p$ ونفرض أن c نقطة داخلية من A . نفرض أن f, g معرفتان فى A إلى $\boldsymbol{R}^q$ وقابلتان للتفاضل عند c . إذا كانت $h : A \to \boldsymbol{R}$ معرفة بأنها $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ لكل $x \in A$ ، أثبت أن h قابلة للتفاضل عند c وأنه إذا كانت $u \in \boldsymbol{R}^p$ ، فإن

$$Dh(c)(u) = (Df(c)(u)) \cdot g(c) + f(c) \cdot (Dg(c)(u))$$

٤٠ – (ط) عبر عن نتيجة تمرين ٤٠ – ح بدلالة دوال الإحداثيات .

٤٠ – (ى) نفرض أن $A \subseteq \boldsymbol{R}$ ونفرض أن c نقطة داخلية من A . نفرض أن $f : A \to \boldsymbol{R}^p$ قابلة للتفاضل عند c وبحيث أن $\|f(x)\| = 1$ عند $x \in A$. أثبت أن $f(c) \cdot \nabla_c f = 0$ حيث $\nabla_c f$ تشير إلى ميل الدالة f عند c (انظر تمرين ٣٩ – ى) . فسر هذه النتيجة هندسيا .

٤٠ – (ك) نفرض أن $f : \boldsymbol{R}^p \to \boldsymbol{R}$ (موجبة) متجانسة من درجة k بمعنى أن

$$f(tx) = t^k f(x) \quad \text{عند} \quad x \in \boldsymbol{R}^p, t > 0$$

(أ) إذا كانت f قابلة للتفاضل فى $\boldsymbol{R}^p$ ، أثبت أنها تحقق علاقة أويلر(*) :

$$kf(x) = x_1 D_1 f(x) + \cdots + x_p D_p f(x)$$

لجميع $x = \{x_1, \ldots, x_p\}$ فى $\boldsymbol{R}^p$ حيث $x \neq 0$.

(ب) وبالعكس ، نفرض أن f تحقق علاقة أويلر ونفرض أن $c \in \boldsymbol{R}^p, c \neq 0$. نفرض أن $g(t) = f(tc)$ عند $t > 0$ ووضح أن $tg'(t) = kg(t)$ عند $t > 0$. استخدم هذا لإثبات أن الدالة f متجانسة من درجة k .

٤٠ – (ل) نفرض أن $A \subseteq \boldsymbol{R}^p, f : A \to \boldsymbol{R}^p$ ونفرض أن الدالة $g : f(A) \to \boldsymbol{R}^p$ هى الدالة المكسية للدالة f بمعنى أن

(*) ليونارد أيلر (١٧٠٧ – ١٧٨٣) ، من أبناء بازل ، تعلم مع يوهن برنولى . أقام سنوات كثيرة فى البلاط الملكى فى بيترزبورج ، لكن هذه الإقامة قطعت بخمس وعشرين سنة فى برلين بالرغم من حقيقة أنه كان أبا لثلاثة عشر طفلا وأصبح أعمى كلية فقد كان قادرا على كتابة أكثر من ثمانمائة بحث وكتاب وأعطى مساهمات أساسية لكل فروع الرياضيات .

$$f\circ g(x)=x, \qquad g\circ f(y)=y$$

لـكل $x\in A$ و $y\in f(A)$. إذا كانت f قابلة للتفاضل عنـد نقطة $a\in A$ وإذا كانت g قابلة للتفاضل عند $b=f(a)$ ، أثبت أن الدالتين الخطيتين $Dg(b)$ و $Df(a)$ تكون كل منهما الدالة العكسية للأخرى . أى أن ، $Dg(b)\circ Df(a)$ و $Df(a)\circ Dg(b)$ هما المحايدان فى R^p .

٤٠ – (م) نفرض أن $B:R^p\times R^p=R^{2p}\to R^q$ خطية ثنائية بمعنى أن

$$B(ax+bx', y)=aB(x, y)+bB(x', y),$$
$$B(x, ay+by')=aB(x, y)+bB(x, y')$$

لجميع $a, b\in R$ وجميع x, x', y, y' فى R^p . من الممكن البرهنة على أنه توجد $M>0$ بحيث أن $\|B(x, y)\|\le M\|x\|\|y\|$ لجميع x, y فى R^p . بفرض هذا ، أثبت أن B قابلة للتفاضل عند كل نقطة $(x, y)\in R^p\times R^p=R^{2p}$ وأن

$$DB(x, y)(u, v)=B(x, v)+B(u, y)$$

لجميع (u, v) فى $R^p\times R^p=R^{2p}$

٤٠ – (ن) نفرض أن $B:R^p\times R^p\to R^q$ خطية ثنائية بالمعنى المذكور فى التمرين السابق ونفرض أن $g(x)=B(x, x)$ لـكل $x\in R^p$. أثبت أنه إذا كانت $x, u\in R^p$ ، فإن

(i) $g(tx)=t^2 g(x)$ لـكل $t\in R$.

(ii) $Dg(x)(u)=B(x, u)+B(u, x)=Dg(u)(x)$

(iii) $g(x+u)=g(x)+Dg(x)(u)+g(u)$

وبالإضافة إلى ذلك ، إذا كانت B متماثلة بمعنى أن $B(x, y)=B(y, x)$ فإن

(iv) $Dg(x)(u)=2B(x, u)$

٤٠ – (س) اعط برهانا لتمرين ٤٠ – (ح) مستخدما ٤٠ (م) .

٤٠ – (ع) نفرض أن $\Omega\subseteq R^p$ مفتوحة ونفرض أن $f:\Omega\to R^q$ قابلة للتفاضل فى Ω . نفرض أن $I=(a, b)$ فترة مفتوحة فى R ونفرض أن $g:I\to R^p$ قابلة للتفاضل فى I وبحيث أن $g(I)\subseteq\Omega$. إذا كانت $h=f\circ g:I\to R^q$ أثبت أن

$$h'(c)=Df(g(c))(g'(c))$$

٤٠ – (ف) نفرض أن $\Omega\subseteq R^p$ مفتوحة ونفرض أن $f:\Omega\to R^q$. نفرض

أن Ω تحوى النقطتين a, b وقطعة خط S واصلة بين النقطتين ، وأن الدالة f قابلة للتفاضل عند كل نقطة من S . أثبت أنه يوجد راسم خطى $L: R^p \to R^q$ بحيث أن $f(b) - f(a) = L(b - a)$.

٤٠ – (ص) نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ فتمتصلة مفتوحة ونفرض أن $f: \Omega \to R^q$ قابلة للتفاضل فى Ω . إذا كانت $Df(x) = 0$ لكل $x \in \Omega$ ، أثبت ان $f(x) = f(y)$ لكل $x, y \in \Omega$. اثبت ان هذا الاستنتاج ربما يفشل إذا كانت Ω غير متصلة .

٤٠ – (ق) نفرض أن $J \subseteq R^p$ خلية مفتوحة ونفرض أن $f: J \to R$ قابلة للتفاضل فى J . وضح أنه إذا كانت المشتقة الجزئية $D_1 f(x) = 0$ لكل $x \in J$ ، حينئذ f لا تعتمد على المتغير الأول بمعنى أن

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f(x_1', x_2, \ldots, x_p)$$

لأى نقطتين فى J التى الإحداثى الثانى ، . . . ، الإحداثى الذى رتبته p تكون متساوية .

٤٠ – (ر) وضح أن الاستنتاج للتمرين السابق ربما يفشل إذا فرض أن J ليست خلية .

٤٠ – (ش) نفرض أن $f: R^2 \to R$ معرفة بأنها

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \qquad \text{for } (x, y) \neq (0, 0),$$
$$= 0 \qquad \text{for } (x, y) = (0, 0)$$

أثبت أن المشتقتين الجزئيتين الثانيتين $D_{yx} f$ و $D_{xy} f$ موجودتان عند النقطة $(0, 0)$ لكن ليسا متساويين .

٤٠ – (ت) استخدم نظرية القيمة المتوسطة لتحدد بالتقرب المسافة من النقطة $(3.2, 4.1)$ لنقطة الأصل . اعط حدود الخطأ لتقديرك .

٤٠ – (ث) إذا كانت $\Omega \subseteq R^p$ مفتوحة وكانت $f: \Omega \to R^q$. نفرض أن Ω تحتوى النقطتين a, b وقطعة الخط S الواصل بين النقطتين ، وأن f لها مشتقات جزئية متصلة فى S . أثبت أن

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 Df(a + t(b - a))(b - a)\, dt$$

٤٠ – (خ) نفرض أن $f, g: R \to R$ لها مشتقات ثانية متصلة فى R

(أ) إذا كانت $c \in R$ وأن $u(x, y) = f(x + cy) + g(x - cy)$

أثبت أن $u: R^2 \to R$ تحقق (معادلة الموجة)

$$c^2 D_{xx} u(x, y) = D_{yy} u(y, y)$$

لجميع (x, y) .

(ب) إذا كانت $v(x, y)=f(3x+2y)+g(x-2y)$ أثبت أن $v:R^2\to R$ تحقق المعادلة

$$4D_{xx}v(x, y)-4D_{xy}v(x, y)-3D_{yy}v(x, y)=0 .$$

لكل (x, y) .

٤٠ – (ذ) إذا كانت $f:R^2\to R$ لها مشتقات جزئية ثانية متصلة وكانت $F(r, \theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ عند $r>0, \theta\in R$ ، أثبت أن

$$D_{xx}f(x, y)+D_{yy}f(x, y)=D_{rr}F(r, \theta)+\frac{1}{r}D_rF(r, \theta)+\frac{1}{r^2}D_{\theta\theta}F(r, \theta)$$

$$=\frac{1}{r}D_r(rD_rF(r, \theta))+\frac{1}{r^2}D_{\theta\theta}F(r, \theta)$$

حيث $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

مشروع :

٤٠ – α (هذا المشروع هو تعديل لطريقة نيوتن التقليدية لتحديد الجذور عندما يكون جذر قريب بكفاية معلوما) . نفرض أن f معرفة ومتصلة فى فئة مفتوحة تحتوى على الكرة المغلقة $B_r(x_0)=\{x\in R^p:\|x-x_0\|\le r\}$ بقيم فى R^q . نفرض أن f قابلة للتفاضل عند كل نقطة من $B_r(x_0)$ وأنه يوجد عدد C ، حيث $0<C<1$ ، وراسم داخل خطى $\Gamma:R^q\to R^p$ بحيث أن $\|\Gamma\circ f(x_0)\|\le(1-C)r$ وأن

$$\|I-\Gamma\circ Df(x)\|_{pp}\le C \text{ عند } x\in B_r(x_0)$$

(أ) نفرض أن $g:B_r(x_0)\to R^p$ معرفة بأنها $g(x)=x-\Gamma\circ f(x)$ عند $x\in B_r(x_0)$ أثبت أن g قابلة للتفاضل عند كل نقطة من $B_r(x_0)$ وأن تقلص g ثابت $C<1$ (انظر ٤–٢٣) فى $B_r(x_0)$.

(ب) عرف $x_1=g(x_0)$ و $x_{n+1}=g(x_n)$ عند $n\in N$. وضح أن $\|x_{n+1}-x_n\|\le C^n\|x_1-x_0\|$ وإذن ينتج أن $\|x_{n+1}-x_m\|\le C^m r$ عند $n\ge m\ge 0$. ومن ثم $\|x_k-x_0\|<r$ عند $k=0, 1, 2, \ldots$.

(ج) أثبت أن (x_k) متتابعة كوشى ومن ثم تقترب إلى عنصر $\bar{x}\in B_r(x_0)$ ، بحيث أن $g(\bar{x})=\bar{x}$. وبالإضافة إلى ذلك ، نحصل على التقدير $\|x_k-\bar{x}\|\le C^k r$

(د) وضح أن $f(\bar{x})=0$ وأن $\bar{x}$ هو العنصر الوحيد فى $B_r(x_0)$ الذى عنده تتلاشى f .

الباب الحادى والأربعون ـ نظريات الراسم والدوال الضمنية :

نفرض أن Ω فئة مفتوحة فى R^p ونفرض أن f دالة بنطاق Ω ومدى R^q ؛ لا نفرض أن $p = q$ ما لم توجد إشارة خاصة . سيتضح ، تحت فروض سينص عليها ، أن يشار إلى « الخاصية الموضعية » للراسم f عند نقطة $c \in \Omega$ بالراسم الخطى $Df(c)$ بدقة أكثر قليلا .

(i) إذا كانت $p \leq q$ ، $Df(c)$ ادخالية (= واحد - واحد) فإن f ادخالية فى جيرات صغيرة النقطة c ،

(ii) إذا كانت $p \geq q$ وكان $Df(c)$ راسما فوقيا (= يرسم R^p فوقيا إلى R^q) ، فإن الصورة تحت f لجوار صغير للنقطة c هى جوار للدالة $f(c)$؛ وأن

(iii) إذا كانت $p = q$ وكانت $Df(c)$ تناظر أحادياً (= واحد - واحد وفوقيا = عكسيا) ، حينئذ f ترسم جوارا U للنقطة c فى نظام واحد - واحد فوقيا إلى جوار V للدالة $f(c)$. توجد فى حالة (iii) ، دالة معرفة على V عكس تقييد الدالة f إلى U .

كنتيجة لهذه النظريات للراسم سنحصل على نظرية الدالة الضمنية التى هى إحدى النظريات الأساسية فى التحليل والهندسة . نقدم أيضاً نظرية بارامترية مفيدة والنظرية الهامة للرتبة .

الصنف $C^1(\Omega)$:

مجرد وجود المشتقة ليس كافيا لأغراضنا ، تحتاج أيضاً إلى اتصال المشتقة . نتذكر أنه إذا كانت $f: \Omega \to R^q$ قابلة للتفاضل عند كل نقطة من $\Omega \subseteq R^p$ ؛ فإن الدالة $x \to D f(x)$ راسم من Ω إلى المجموعة $\mathscr{L}(R^p, R^q)$ لجميع الدوال الخطية من R^p إلى R^q . من الملاحظ فى باب ٢١ أن هذه الفئة $\mathscr{L}(R^p, R^q)$ هو متجه فراغ ، لاحظنا فى تمرين (٢١ - ل) ، أن هذا الفراغ هو فراغ عمودى تحت العمود

$$\|L\|_{pq} = \sup\{\|L(x)\| : x \in R^p, \|x\| \leq 1\} \tag{41.1}$$

٤١ - ١ تعريف . إذا كانت Ω مفتوحة فى R^p وكانت $f: \Omega \to R^q$ ، نقول أن f تنتمى إلى الصنف $C^1(\Omega)$ إذا كانت المشتقة $Df(x)$ موجودة لكل $x \in \Omega$ وكان الراسم $x \mapsto Df(x)$ من Ω إلى $\mathscr{L}(R^p, R^q)$ متصلا تحت العمود (٤١-١) .

نتذكر من مثال ٣٩ - ٨ (د) ، أنه لكل $x \in \Omega$ ، يمكن تمثيل المشتقة $Df(x)$ بواسطة $q \times p$ مصفوفة يعقوبية $[D_j f_i(x)]$. ومن ثم تمثل $Df(x) - Df(y)$ بالمصفوفة $q \times p$.

$$[D_j f_i(x) - D_j f_i(y)]$$

ينتج الآن من متباينة (٢١ — ٥) ، أن

$$\|Df(x)-Df(y)\|_{pq} \le \left\{\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} |D_jf_i(x)-D_jf_i(y)|^2\right\}^{1/2}$$

وإذن يدل الاتصال لكل من المشتقات الجزئية D_jf_i فى Ω على اتصال $x \mapsto Df(x)$ سنترك للقارئ إثبات أن العكس هو أيضاً صحيح ، وإذن نحصل على النتيجة الآتية .

٤١ — ٢ نظرية . إذا كانت $\Omega \subseteq R^p$ مفتوحة وكانت $f:\Omega \to R^q$ قابلة للتفاضل عند كل نقطة من Ω ، فإن f تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$ إذا وإذا فقط كانت المشتقات الجزئية $D_jf_i,\ i=1,\ldots,q,\ j=1,\ldots,p$ للدالة f متصلة فى Ω .

سوف نحتاج إلى المفترض الآتى ، الذى هو مغايرة لنظرية القيمة المتوسطة .

٤١ — ٣ مفترض . نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ فئة مفتوحة ونفرض أن $f:\Omega \to R^q$ قابلة للتفاضل فى Ω . نفرض أن Ω تحتوى على النقطتين a, b وقطعة خطية S تصل بين هاتين النقطتين ، ونفرض أن $x_0 \in \Omega$. حينئذ نجد أن

$$\|f(b)-f(a)-Df(x_0)(b-a)\| \le \|b-a\| \sup_{x\in S}\{\|Df(x)-Df(x_0)\|_{pq}\}$$

البرهان . نفرض أن $g:\Omega \to R^q$ معرفة عند $x\in\Omega$ بأنها

$$g(x)=f(x)-Df(x_0)(x)$$

بما أن $Df(x_0)$ خطية ، فينتج أن $Dg(x)=Df(x)-Df(x_0)$ عند $x\in\Omega$ إذا استخدمنا نظرية القيمة المتوسطة ٤٠ — ٥ ، نستنتج أنه توجد نقطة $c\in S$ بحيث أن

$$\begin{aligned}\|f(b)-f(a)-Df(x_0)(b-a)\| &= \|g(b)-g(a)\|\\ &\le \|Dg(c)(b-a)\| = \|(Df(c)-Df(x_0))(b-a)\|\\ &\le \|b-a\|\sup_{x\in S}\{\|Df(x)-Df(x_0)\|_{pq}\}\end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته

النتيجة الآتية هى المفترض الدليل لنظريات الراسم

٤١ — ٤ مفترض تقريب . نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ مفتوحة ونفرض أن $f:\Omega \to R^q$ تنتمى إلى الصنف $C^1(\Omega)$. إذا كانت $x_0\in\Omega$ وكانت $\varepsilon>0$ ، حينئذ توجد $\delta(\varepsilon)>0$ بحيث أنه إذا كانت $\|x_k-x_0\|\le\delta(\varepsilon),\ k=1,2,$ ، فإن $x_k\in\Omega$ وأن

$$\|f(x_1)-f(x_2)-Df(x_0)(x_1-x_2)\| \le \varepsilon\,\|x_1-x_2\| \qquad (41.2)$$

البرهان . بما أن $x\to Df(x)$ متصلة فى Ω إلى $\mathscr{L}(R^p,R^q)$ ، بإعطاء $\varepsilon>0$ توجد $\delta(\varepsilon)>0$ ، بحيث أنه إذا كانت $\|x-x_0\|<\delta(\varepsilon)$ فإن $x\in\Omega$ ، وأن

$\|Df(x)-Df(x_0)\|_{pq}\le\varepsilon$. نفرض الآن x_2 x_1 تحققان $\|x_k-x_0\|\le\delta(\varepsilon)$ فينتج أن قطعة الخط المستقيم الذى تصل x_2 ، x_1 تقع داخل كرة مغلقة مركزها x_0 ونصف قطرها $\delta(\varepsilon)$ ، أى داخل Ω . استخدم الآن مفترض ٤١ – ٣ لحصول على الاستنتاج المذكور . وهو المطلوب إثباته

نظرية الراسم الادخالى :

سنوضح الآن أنه إذا كانت f تنتمى إلى الصنف $C^1(\Omega)$ وإذا كانت $Df(c)$ إدخالية ، فإن تقييد الدالة f لجوار مناسب للنقطة c يكون إدخاليا .

سيتذكر القارئ الملم بعلامة « الرتبة » لتحويل خطى ، أن $L:R^p\to R^q$ تكون إدخالية إذا وإذا فقط كانت رتبة $(L)=p\le q$

٤١ – ٥ نظرية راسم إدخالى . نفرض أن $\Omega\subseteq R^p$ مفتوحة ، وأن $f:\Omega\to R^q$ تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$ ، وأن $L=Df(c)$ إدخالية . حينئذ يوجد عدد $\delta>0$ بحيث أن التقييد للدالة f إلى $B_\delta=\{x\in R^p:\|x-c\|\le\delta\}$ إدخالى . وبالإضافة إلى ذلك ، يكون عكس التقييد $f\mid B_\delta$ هو دالة متصلة فى $f(B_\delta)\subseteq R^q$ إلى $B_\delta\subseteq R^p$.

البرهان . بما أن الدالة الخطية $L=Df(c)$ إدخالية ، فينتج من نتيجة ٢٢–٧ أنه يوجد $r>0$ بحيث أن

$$r\|u\|\le\|Df(c)(u)\|\qquad \text{for } u\in R^p \tag{41.3}$$

نستخدم الآن مفترض التقريب ٤١ – ٤ حيث $\varepsilon=\frac{1}{2}r$ لحصول على عدد $\delta>0$ بحيث أنه إذا كانت $\|x_k-c\|\le\delta,\ k=1,2$ فإن

$$\|f(x_1)-f(x_2)-L(x_1-x_2)\|\le\tfrac{1}{2}r\,\|x_1-x_2\|$$

إذا استخدمنا متباينة المثلث للطرف الأيسر لهذه المتباينة ، نحصل على

$$\|L(x_1-x_2)\|-\|f(x_1)-f(x_2)\|\le\tfrac{1}{2}r\,\|x_1-x_2\|$$

إذا ربطنا هذا مع (٤١ – ٣) حيث $u=x_1-x_2$ ، نحصل على

$$\tfrac{1}{2}r\,\|x_1-x_2\|\le\|f(x_1)-f(x_2)\| \tag{41.4}$$

عند $x_k\in B_\delta$. هذا يبرهن أن التقييد للدالة f إلى B_δ إدخالى ؛ ومن ثم يكون لهذا القيد دالة عكسية سوف نرمز لها بالرمز g . إذا كانت $y_k\in f(B_\delta)$ ، حينئذ توجد نقط وحيدة $x_k=g(y_k)$ فى B_δ بحيث أن $y_k=f(x_k)$. ينتج من (٤١ – ٤) أن

$$\|g(y_1)-g(y_2)\|\le(2/r)\,\|y_1-y_2\|$$

ومنها ينتج أن $g=(f\mid B_\delta)^{-1}$ متصلة بانتظام فى $f(B_\delta)$ إلى R^p . وهو المطلوب إثباته

نلاحظ أننا لا نحتاج لتعريف g فى جوار $f(c)$ ؛ أى أن ، $f(c)$ لا تحتاج لأن تكون نقطة داخلية من $f(B_\alpha)$. لهذا السبب لا يمكننا عمل أى فرض عن قابلية التفاضل للدالة g . ستثبت فيما بعد نظرية عكسية أقوى تحت فروض إضافية .

نظرية الراسم الفوقى :

النتيجة الآتية نتيجة زميلة نظرية الراسم الإدخالى . تثبت هذه النظرية ، التى ترجع إلى ل. م. جرافز(*) أنه إذا كانت f فى صنف $C^1(\Omega)$ وكان الراسم $Df(c)$ لبعض $c \in \Omega$, فوقيا للفراغ R^p إلى R^q فإن f ترسم جوارا مناسبا للنقطة c إلى جوار الدالة $f(c)$ أى أن كل نقطة من R^q التى تكون ملاصقة بدرجة كافية إلى الدالة $f(c)$ هى الصورة تحت f لنقطة قرب c .

سيتذكر القارىء الملم بعلامة « رتبة » لتحويل خطى أن الراسم $L: R^p \to R^q$ يكون فوقيا إذا وإذا فقط كانت رتبة $(L) = q \le p$

٤١ – ٦ نظرية الراسم الفوقى . نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ مفتوحة ونفرض أن $f: \Omega \to R^q$ تنتمى إلى الصنف $C^1(\Omega)$. نفرض أنه عند بعض $c \in \Omega$ ، تكون الدالة الخطية $L = Df(c)$ فوقية للفراغ R^p إلى R^q . حينئذ يوجد عددان $m > 0$ و $\alpha > 0$ بحيث أنه إذا كانت $\|y - f(c)\| \le \alpha/2m$ و $y \in R^q$

فإنه يوجد $x \in \Omega$ بحيث أن $f(x) = y$ و $\|x - c\| \le \alpha$

البرهان . بما أن L فوق ، فإن كلا من المتجهات الأساسية

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \qquad e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_q = (0, 0, \ldots, 1)$$

فى R^q هو الصورة تحت L لمتجه ما فى R^p ، مثلا $u_1, u_2, \ldots, u_q$. نفرض الآن أن $M: R^q \to R^p$ هى الدالة الخطية التى ترسم e_j إلى u_j عند $j = 1, 2 \ldots, q$ ، أى أن ،

$$M\left(\sum_{i=1}^{q} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{q} a_i u_i$$

ينتج أن $L \circ M$ هو الراسم المحايد فى R^q ، أى أن $L \circ M(y) = y$ لكل $y \in R^q$. إذا فرضنا

$$m = \left\{\sum_{i=1}^{q} \|u_i\|^2\right\}^{1/2}$$

(*) لورانس م. جرافز (١٨٩٦ – ١٩٧٣) ولد فى كانساس ، لكن ارتبط بجامعة شيكاغو لسنوات كثيرة كطالب وكأستاذ . ومن أحسن ما عرف به مساهمته فى التحليل الدالى وحساب التفاضل والتكامل للمتغيرات .

حينئذ يدل تطبيق متباينتي المثلث وشفارتز على أنه إذا كانت $y=\sum_{i=1}^{q} a_i e_i$ ، فإن

$$\|M(y)\| \le \sum_{i=1}^{q} |a_i|\,\|u_i\|$$

$$\le \left\{\sum_{i=1}^{q} |a_i|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{i=1}^{q} \|u_i\|^2\right\}^{1/2}$$

$$= m\,\|y\|$$

حسب مفترض التقريب ٤١–٤ يوجد عدد $\alpha > 0$ بحيث أنه إذا كانت $\|x_k - c\| \le \alpha,\ k = 1, 2$ ، فإن $x_k \in \Omega$ وأن

$$\|f(x_1) - f(x_2) - L(x_1 - x_2)\| \le \frac{1}{2m}\|x_1 - x_2\| \tag{41.5}$$

نفرض الآن $B_\alpha = \{x \in R^p : \|x - c\| \le \alpha\}$ ونفرض أن $y \in R^q$ بحيث أن $\|y - f(c)\| \le \alpha/2m.$. سنوضح أنه يوجد متجه x حيث $x \in B_\alpha$ بحيث أن $y = f(x)$

نفرض أن $x_0 = c$ ونفرض أن $x_1 = x_0 + M(y - f(c))$ بحيث أن $\|x_1 - x_0\| \le m\,\|y - f(c)\| \le \frac{1}{2}\alpha$ ، ومنها

$$\|x_1 - x_0\| \le \frac{\alpha}{2} \qquad \text{؛ أو} \qquad \|x_1 - c\| \le \left(1 - \frac{1}{2}\right)\alpha$$

نفرض أن $c = x_0, x_1, \ldots, x_n$ قد اختيرت بالاستنتاج في R^p بحيث أن

$$\|x_k - x_{k-1}\| \le \alpha/2^k, \qquad \|x_k - c\| \le (1 - 1/2^k)\alpha \tag{41.6}$$

عند $k = 1, \ldots, n$. نعرف الآن $x_{n+1}\ (n \ge 1)$ بأنها

$$x_{n+1} = x_n - M[f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1})] \tag{41.7}$$

ينتج من (٤١ – ٥) أن

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le m\,\|f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1})\|$$

$$\le \frac{1}{2}\|x_n - x_{n-1}\|$$

وإذن ينتج أن $\|x_{n+1} - x_n\| \le \frac{1}{2}(\alpha/2^n) = \alpha/2^{n+1}$ وأن

$$\|x_{n+1} - c\| \le \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - c\|$$

$$\le (\alpha/2^{n+1}) + (1 - 1/2^n)\alpha$$

$$= (1 - 1/2^{n+1})\alpha$$

ما يثبت (٤١–٦) عند $k = n + 1$. لذلك ، يمكننا بهذه الطريقة تركيب متتابعة (x_n) في B_α . إذا كانت $m \ge n$ ، فنجد أن

$$\|x_n - x_m\| \le \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \cdots + \|x_{m-1} - x_m\|$$
$$\le \frac{\alpha}{2^{n+1}} + \frac{\alpha}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\alpha}{2^m} \le \frac{\alpha}{2^n}$$

ينتج أن (x_n) هى متتابعة كوشى فى R^p ولذلك تقترب إلى عنصر ما x . بما أن $\|x_n - c\| \le (1-1/2^n)\alpha$ ، فينتج أن $\|x - c\| \le \alpha$ أى أن $x \in B_\alpha$.

بما أن $x_1 - x_0 = M(y - f(c))$ ، فينتج أن

$$L(x_1 - x_0) = L \circ M(y - f(c)) = y - f(x_0)$$

وبالإضافة إلى ذلك ، نجد من (٤١ – ٧) أن

$$L(x_{n+1} - x_n) = -L \circ M[f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1})]$$
$$= -\{f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1})\}$$
$$= L(x_n - x_{n-1}) - [f(x_n) - f(x_{n-1})]$$

بالاستنتاج نجد أن

$$L(x_{n+1} - x_n) = y - f(x_n)$$

ومنهـا ينتـج أن $y = \lim f(x_n) = f(x)$ وإذن تكـون كل نقطة y تحقق $\|y - f(c)\| \le \alpha/2m$ صورة تحت f لنقطة $x \in \Omega$ حيث $\| x - c \| \le \alpha$.

وهو المطلوب إثباته

٤١ – ٧ نظرية راسم مفتوح . نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ مفتوحة ونفرض أن $f : \Omega \to R^q$ تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$. إذا كانت المشتقة لكل $Df(x)$ لكل $x \in \Omega$ فوقية ، وإذا كانت $G \subseteq \Omega$ مفتوحة ، فإن $f(G)$ مفتوحة فى R^q .

البرهان . إذا كانت $b \in f(G)$ ، فإنه توجد نقطة $c \in G$ بحيث أن $f(c) = b$. ينتج بتطبيق نظرية الراسم الفوق ٤١ – ٦ على $f | G$ انه توجد $\beta > 0$ بحيث أنه إذا كانت $\| y - b \| \le \beta$ حينئذ توجد $x \in G$ بحيث أن $y = f(x)$. إذن $f(G)$ مفتوحة فى R^q .

وهو المطلوب إثباته

النظرية العكسـية :

سنربط الآن نظريتى الراسم فى حالة $p = q$. مفروض هنا أن المشتقة $Df(c)$ مفروض إدخالية . هذا يحدث إذا وإذا فقط كان للمشتقة $Df(c)$ عكس التى تكون بدورها صحيحة إذاً وإذا فقط كانت قيمة محدد جاكوبيان

$$J_f(c) = \det[D_j f_i(c)] = \det[f_{i,j}(c)]$$

تختلف عن صفر .

سيذكر القارئ الملم بعلامة « رتبة » لتحويل خطى أن $L : R^p \to R^q$ إدخالية إذا وإذا فقط كانت رتبة $(L) = p = q$

ينتج من اتصال الدوال الجزئية والمحدد أنه إذا كانت $Df(a)$ لها عكس ، فإن $Df(x)$ لها عكس عند x اللاصقة بكفاية إلى c .

٤١ – ٨ نظرية عكسية . نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ مفتوحة ونفرض أن $f : \Omega \to R^p$ تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$. إذا كانت $c \in \Omega$ بحيث أن $Df(c)$ إدخالية ، حينئذ يوجد جوار مفتوح U للنقطة c بحيث أن $V = f(U)$ جوار مفتوح للدالة $f(c)$ والتقييد للدالة f إلى Uإدخالى إلى V فوقياً بمعكس متصل g . وبالإضافة إلى ذلك تنتمى g إلى صنف $C^1(V)$ وأن

$$Dg(y) = [Df(g(y))]^{-1} \qquad for\ y \in V$$

البرهان . من الفرض $L = Df(c)$ إدخالية ، وإذن تدل نتيجة ٢٢ – ٧ على أنه توجد $r > 0$ بحيث أن

$$2r\,\|z\| \le \|Df(c)(z)\| \qquad \text{for } z \in R^p$$

بما أن f موجودة فى صنف $C^1(\Omega)$ ، فيوجد جوار النقطة c التى فيها تكون $Df(x)$ قابلة للعكس وتحقق

$$r\,\|z\| \le \|Df(x)(z)\| \qquad \text{for } z \in R^p \tag{41.8}$$

نحصر انتباهنا أيضاً فى جوار U النقطة c الذى فيه تكون الدالة f إدخالية والتى تكون محتوية فى كرة مركزها c ونصف القطر α (كما فى نظرية الراسم الفوقى ٤١ – ٦) . حينئذ تكون $V = f(U)$ جواراً للدالة $f(c)$ ، ونستنتج من نظريات الراسم السابقة أن التقييد $f|U$ له دالة عكسية متصلة $g : V \to R^p$.

يبقى أن نوضح أن g قابلة للتفاضل عند نقطة اختيارية $y_1 \in V$. نفرض أن $x_1 = g(y_1) \in U$ ، بما أن f قابلة للتفاضل عند x_1 ، فينتج أنه إذا كانت $x \in U$ ، فإن

$$f(x) - f(x_1) - Df(x_1)(x - x_1) = \|x - x_1\|\, u(x)$$

حيث $\|u(x)\| \to 0$ عندما $x \to x_1$. إذا فرضنا أن M_1 هى الدالة العكسية للدالة الخطية $Df(x_1)$ ، فإن

$$\begin{aligned} x - x_1 &= M_1[Df(x_1)(x - x_1)] \\ &= M_1[f(x) - f(x_1) - \|x - x_1\|\, u(x)] \end{aligned}$$

إذا كانت $x \in U$ ، فإن $x = g(y)$ عند قيمة ما $y = f(x) \in V$ ؛ وبالإضافة إلى ذلك $y_1 = f(x_1)$ ، لذلك يمكن كتابة هذه المعادلة فى الصورة .

$$g(y) - g(y_1) - M_1(y - y_1) = -\|x - x_1\|\, M_1(u(x))$$

بما أن $Df(x_1)$ إدخالية ، فينتج كما فى البرهان لنظرية الراسم الإدخالى ٤١ — ٥ أن

$$\|y - y_1\| = \|f(x) - f(x_1)\| \geq \tfrac{1}{2}r\,\|x - x_1\|$$

بشرط أن y تكون ملاصقة بكفاية إلى y_1 . وبالإضافة إلى ذلك ، ينتج من (٤١ — ٨) أن $\|M_1(u)\| \leq (1/r)\,\|u\|$ لكل $u \in R^p$. وإذن نجد أن

$$\|g(y) - g(y_1) - M_1(y - y_1)\| \leq (2/r^2)\,\|u(x)\|\,\|y - y_1\|$$

الآن عندما $y \to y_1$ ، فإن $x = g(y) \to g(y_1) = x_1$ وكذلك $\|u(x)\| \to 0$.
نستنتج ، لذلك ، أن $Dg(y_1)$ موجودة وتساوى $M_1 = (Df(x_1))^{-1}$.

تنتج الحقيقة التى تقول إن g تنتمى إلى الصنف $C^1(V)$ من العلاقة $Dg(y) = [Df(g(y))]^{-1}$ حيث $y \in V$ ، ومن الاتصال للرواسم .

$$y \mapsto g(y), \qquad x \mapsto Df(x), \qquad L \mapsto L^{-1}$$

من $V \to U,\ U \to \mathscr{L}(R^p, R^p)$ و $\mathscr{L}(R^p, R^p) \to \mathscr{L}(R^p, R^p)$ ، على الترتيب .
(انظر تمرين ٤١ — ل) . وهو المطلوب إثباته

دوال ضمنية :

نفرض أن F دالة معرفة فى فئة جزئية من $R^p \times R^q$ إلى R^q . (إذا أجرينا التحقيق الواضح للفراغ $R^p \times R^q$ بأنه R^{p+q} ، حينئذ لا نحتاج لتعريف ما المقصود بالقول أن F متصلة ، أو قابلة للتفاضل عند نقطة ، أو موجودة فى صنف C^1 فى فئة) نفرض أن F ترسل النقطة (a, b) إلى متجه الصفر من R^q . مسألة الدوال الضمنية هى حل المعادلة

$$F(x, y) = 0$$

لمتغير مستقل واحد (مثلا ، y) بدلالة الآخر بمعنى أننا نوجد دالة φ معرفة فى فئة جزئية من R^p بقيم فى R^q بحيث أن $b = \varphi(a)$ وأن

$$F(x, \varphi(x)) = 0$$

لكل x فى نطاق الدالة φ . نفرض أن F متصلة فى جوار النقطة (a, b) ونأمل فى استنتاج أن « دالة الحل » φ متصلة فى جوار a . سيكون محتملا أن القارئ سوف لا يندهش إذا فرضنا أن F تنتمى إلى صنف C^1 فى جوار النقطة (a, b) ؛ لكن ، حتى هذا الفرض لا يكون كافيا لضمان الوجود والوحدوية لدالة حل متصلة φ معرفة فى جوار a .

فى الحقيقة ، إذا كانت $p = q = 1$ ، فإن الدالة المعطاة بأنها $F(x, y) = x^2 - y^2$

لها دالتى حل متصلان هما $\varphi_1(x)=x$ و $\varphi_2(x)=-x$ مناظرتان للنقطة $(0, 0)$. لها أيضا حلان غير متصلين ، مثل

$$\varphi_3(c)=x \quad ، \quad x \text{ قياسية}$$
$$=-x \quad ، \quad x \text{ غير قياسية}$$

الدالة $G(x, y)=x-y^2$ لها دالتى حل متصلتان مناظرتان للنقطة $(0, 0)$ ، لكن لا يعرف أى منهما فى جوار النقطة $x=0$. لإعطاء مثال أكبر غرابة نجد أن الدالة $H: R^2\to R$ المعرفة بأنها

$$H(x, y)=x, \qquad y=0,$$
$$=x-y^3\sin\left(\frac{1}{y}\right), \qquad y\neq 0$$

تنتمى إلى صنف C^1 فى جوار النقطة $(0, 0)$ ، لكن لايوجد دالة حل متصلة معرفة فى جوار النقطة $x=0$.

فى جميع هذه الأمثلة الثلاثة كانت المشتقة الجزئية بالنسبة إلى y تتلاشى عند النقطة تحت الاعتبار . فى الحالة $p=q=1$ ، نحتاج لنص إضافى لضمان وجود وانفرادية دالة الحل وهو أن المشتقة الجزئية ليست صفراً . فى الحالة العامة ، نلاحظ أن $DF(a, b)$ دالة خطية متصلة فى $R^p\times R^q$ إلى R^q وتنتج دالة خطية متصلة $L_2: R^q\to R^q$ معرفة بأنها

$$L_2(v)=DF(a, b)(0, v)$$

عند $v\in R^q$. بمعنى معقول جداً ، تكون L_2 هى « المشتقة الجزئية » للدالة F بالنسبة إلى $y\in R^q$ عند النقطة (a, b) . الفرض الإضافى الذى سنضمه هو أن L_2 لها دالة عكسية .

نرغب الآن فى تفسير هذه المسألة بدلالة الأحداثيات . إذا كانت $x=(x_1, \ldots, x_p)$ و $y=(y_1, \ldots, y_q)$ ، فإن المعادلة $F(x, y)=0$ تأخذ الصورة لمعادلات عددها q فى متغيرات مستقلة $p+q$ ، $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q$ معطاة كما يلى

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)&=0, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ f_q(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)&=0 \end{aligned} \tag{41.9}$$

لأجل الملاءمة ، نفرض أن $b=0$ و $a=0$ بحيث تتحقق هذه المجموعة عند $x_1=0, \ldots, x_p=0, y_1=0, \ldots, y_q=0$ ومن المرغوب إيجاد الحل على الأقل بالنسبة للمتغير y_j بدلالة x_i عندما يكون x_i صغيراً صغراً كافياً . إذا كانت الدوال f_j خطية ، فإن الشرط لقابلية الحل هو أن محدد المعاملات y_j . لايساوى صفراً . إذا كانت الدوال f_j ليست خطية ، حينئذ الشرط هو أن محدد جاكوبيان

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_q)}{\partial(y_1, \ldots, y_q)}(a, b) \neq 0$$

توجد فى هذه الحالة دوال $\varphi_j,\ j=1, \ldots, q$ معرفة ومتصلة بالقرب من $a = 0$ بحيث أنه إذا عوضنا

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_p)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_q = \varphi_q(x_1, \ldots, x_p)$$

فى المجموعة (٤١ – ٩) ، فنحصل على متطابقة فى x_j

٤١ – ٩ نظرية دالة ضمنية . نفرض أن $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^q$ مفتوحة ونفرض أن $(a, b) \in \Omega$ نفرض أن $F: \Omega \to \boldsymbol{R}^q$ تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$ ، وأن $F(a, b)=0$ ، وأن الراسم الخطى المعرف بأنه

$$L_2(v) = DF(a, b)(0, v), \qquad v \in \boldsymbol{R}^q$$

هو تناظر أحادى $\boldsymbol{R}^q$ إلى فوقيا .

(أ) حينئذ يوجد جوار مفتوح W من $a \in \boldsymbol{R}^p$ دالة وحيدة $\varphi: W \to \boldsymbol{R}^q$ منتمية إلى صنف $C^1(W)$ بحيث أن $b = \varphi(a)$ وأن

$$F(x, \varphi(x)) = 0 \qquad \text{for all } x \in W$$

(ب) يوجد جوار مفتوح U للنقطة (a,b) فى $\boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^q$ بحيث أن الزوج $(x, y) \in U$ يحقق $F(x, y) = 0$ إذا وإذاً فقط كانت $y = \varphi(x)$ عند $x \in W$.

البرهان . لاتفقد الحالة العامة عند افتراض أن $b = 0$ و $a = 0$. نفرض أن $H: \Omega \to \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^q$ معرفة بأنها

$$H(x, y) = (x, F(x, y)) \quad \text{for } (x, y) \in \Omega$$

ينتج حالا (أنظر تمرين ٣٩ – ت) أن H تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$ وأن

$$DH(x, y)(u, v) = (u, DF(x, y)(u, v))$$

عند $(x, y) \in \Omega$ و $(u, v) \in \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^q$ نطالب الآن بأن $DH(0, 0)$ لها دالة عكسية فى $\boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^q$. فى الحقيقة ، إذا فرضنا أن $L_1 \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^p, \boldsymbol{R}^q)$ معرفة بأنها

$$L_1(u) = DF(0, 0)(u, 0) \quad \text{for } u \in \boldsymbol{R}^p$$

حينئذ تثبت الحقيقة التى تقول إن $DF(0, 0)(u, v) = L_1(u) + L_2(v)$ أن الدالة عكسية للدالة $DH(0, 0)$ هى راسم خطى K فى $\boldsymbol{R}^q \times \boldsymbol{R}^q$ معرف بأنه

$$K(x, z) = (x, L_2^{-1}[z - L_1(x)])$$

وإذن ينتج من نظرية الدالة العكسية (١٤–٨) أنه يوجد جوار U للنقطة $(0, 0) \in \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^q$ بحيث أن $V = H(U)$ هو جوار مفتوح للنقطة $(0, 0) \in \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^q$ وتقييد H إلى U هو تناظر أحادى إلى V فوقيا بدالة عكسية متصلة $\Phi : V \to U$ التى تنتمى إلى صنف $C^1(V)$ وبحيث $\Phi(0, 0) = (0, 0)$. الآن Φ لها الصورة

$$\Phi(x, z) = (\varphi_1(x, z), \varphi_2(x, z)) \text{ for } (x, z) \in V$$

حيث $\varphi_1 : V \to \boldsymbol{R}^p$ و $\varphi_2 : V \to \boldsymbol{R}^q$. بما أن

$$(x, z) = H \circ \Phi(x, z) = H[\varphi_1(x, z), \varphi_2(x, z)]$$
$$= [\varphi_1(x, z), F(\varphi_1(x, z), \varphi_2(x, z))]$$

فلستنتج أن $\varphi_1(x, z) = x$ لكل $(x, z) \in V$. ومن ثم Φ تأخذ الصورة الأبسط

$$\Phi(x, z) = (x, \varphi_2(x, z)) \text{ for } (x, z) \in V$$

الآن إذا كانت $P : \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^q \to \boldsymbol{R}^q$ معرفة بأنها $P(x, z) = z$ ، فإن P خطية ومتصلة وأن $\varphi_2 = P \circ \Phi$ ؛ لذلك φ_2 تنتمى إلى صنف $C^1(V)$ ونجد أن

$$z = F(x, \varphi_2(x, z)) \quad \text{for} \quad (x, z) \in V$$

الآن نفرض أن $W = \{x \in \boldsymbol{R}^p : (x, 0) \in V\}$ بحيث أن W جوار مفتوح للعنصر 0 فى $\boldsymbol{R}^p$ ، ونعرف $\varphi(x) = \varphi_2(x, 0)$ عندما $x \in W$. من الواضح أن $\varphi(0) = 0$ وينتج من القانون السابق أن

$$F(x, \varphi(x)) = 0 \quad \text{for} \quad x \in W$$

وبالإضافة إلى ذلك $D\varphi(x)(u) = D\varphi_2(x, 0)(u, 0)$ عند $x \in W,\ u \in \boldsymbol{R}^p$ ، وإذن نستنتج أن φ تنتمى إلى صنف $C^1(W)$. هذا يبرهن جزء (أ) .

لإكمال برهان جزء (ب) ، نفرض أن $(x, y) \in U$ تحقق $F(x, y) = 0$. حينئذ $H(x, y) = (x, F(x, y)) = (x, 0) \in V$ ومنها ينتج أن $x \in W$. وعلاوة على ذلك $(x, y) = \Phi(x, 0) = (x, \varphi_2(x, 0)) = (x, \varphi(x))$ أى أن $y = \varphi(x)$ وهو المطلوب إثباته

يكون من المفيد أحياناً وجود قانون صريح لمشتقة الدالة φ . لكى نعطى هذا نجد من المناسب أن نقدم فكرة كتلة المشتقات الجزئية للدالة F . إذا كانت $(x, y) \in \Omega$. فإن كتلة المشتقات الجزئية $D_{(1)}F(x, y)$ هو راسم الدالة الخطية $\boldsymbol{R}^p \to \boldsymbol{R}^q$ ومعطى بأن

$$D_{(1)}F(x, y)(u) = Df(x, y)(u, 0) \quad \text{for } u \in \boldsymbol{R}^p$$

وكتلة المشتقات الجزئية $D_{(2)}F(x, y)$ هى راسم الدالة الخطية $\boldsymbol{R}^q \to \boldsymbol{R}^q$ الذى يعطى بأنه

$$D_{(2)}F(x, y)(v) = DF(x, y)(0, v) \qquad \text{for } v \in \boldsymbol{R}^q.$$

بما أن $(u, v) = (u, 0) + (0, v)$ فمن الواضح أن

$$DF(x, y)(u, v) = D_{(1)}F(x, y)(u) + D_{(2)}F(x, y)(v) \tag{41.10}$$

لاحظ أن الراسمين L_2 و L_1 المذكورين فى البرهان السابق هما $D_{(1)}F(0, 0)$ و $D_{(2)}F(0, 0)$ على الترتيب .

٤١ — ١٠ نتيجة . بفروض النظرية ، يوجد $0 < \gamma$ بحيث أنه إذا كانت $\|x - a\| < \gamma$ فإن المشتقة للدالة φ عند x هى العنصر من $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^p, \boldsymbol{R}^q)$ والمعطى كما يلى

$$D\varphi(x) = -[D_{(2)}F(x, \varphi(x))]^{-1} \circ [D_{(1)}F(x, \varphi(x))] \tag{41.11}$$

البرهان . نفرض أن $K : W \to \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^q$ معرفة بأنها

$$K(x) = (x, \varphi(x)) \quad \text{for} \quad x \in W$$

حينئذ بما أن $F \circ K(x) = F(x, \varphi(x)) = 0$ فنجد أن $F \circ K : W \to \boldsymbol{R}^q$ هى دالة ثابتة . وعلاوة على ذلك ، كما رأينا حالا أن

$$DK(x)(u) = (u, D\varphi(x)(u)) \quad \text{for } u \in \boldsymbol{R}^p$$

فينتج بتطبيق قاعدة السلسلة ٤٠ — ٢ على الدالة الثابتة $F \circ K$ أن

$$0 = D(F \circ K)(x) = DF(K(x)) \circ DK(x)$$

إذا استخدمنا (٤١ — ١٠) ، نجد أن

$$DF(x, \varphi(x))(u, v) = D_{(1)}F(x, \varphi(x))(u) + D_{(2)}F(x, \varphi(x))(v)$$

ينتج من هذا أنه إذا كانت $u \in \boldsymbol{R}^p$ ، فإن

$$0 = DF(x, \varphi(x))(u) = D_{(1)}F(x, \varphi(x))(u) + D_{(2)}F(x, \varphi(x))(D\varphi(x)(u))$$
$$= D_{(1)}F(x, \varphi(x))(u) + [D_{(2)}F(x, \varphi(x)) \circ D\varphi(x)](u)$$

ومنها نحصل على

$$0 = D_{(1)}F(x, \varphi(x)) + D_{(2)}F(x, \varphi(x)) \circ D\varphi(x)$$

لكل $x \in W$. من الفرض $L_2 = D_{(2)}F(a, b)$ لها دالة عكسية . بما أن F و φ متصلتان ، فإنه توجد $\gamma > 0$ بحيث أنه إذا كانت $\|x - a\| < \gamma$ ، حينئذ يكون للدالة $D_{(2)}F(x, \varphi(x))$ دالة عكسية . ومن ثم ينتج معادلة (٤١ — ١١) المعادلة السابقة وهو المطلوب إثباته

ربما يكون من المفيد تفسير قانون (٤١ — ١١) بدلالة المصفوفات . نفرض أن لدينا مجموعة من q معادلات فى $p + q$ متغيرات مستقلة معطاة فى (٤١ — ٩) . كما لاحظنا ، يتطلب الفرض لنظرية الدالة الصريحة أن المصفوفة

$$\begin{bmatrix} f_{1,p+1} & \cdots & f_{1,p+q} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ f_{q,p+1} & \cdots & f_{q,p+q} \end{bmatrix}$$

لها مصفوفة عكسية عند النقطة (a, b) . (تذكر أن f_{ij} تشير إلى المشتقة الجزئية للدالة f_i بالنسبة للمتغير الذى دليله j) . فى هذه الحالة تعطى المشتقة لدالة الحل φ عند نقطة x بأنها

$$-\begin{bmatrix} f_{1,p+1} & \cdots & f_{1,p+q} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ f_{q,p+1} & \cdots & f_{q,p+q} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,p} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ f_{q,1} & \cdots & f_{q,p} \end{bmatrix}$$

حيث من المفهوم أن تقييم كلتا المصفوفتين يكون عند النقطة $(x, \ \varphi(x))$ بالقرب من (a, b)

نظريتا البارامترية والرتبة :

يمكن اعتبار نظرية الدالة الضمنية (٤١ - ٩) بأنها تعطى الشروط التى تحتها « المنحنى المستو » .

$$C = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^q : F(x, y) = 0\}$$

الذى يمر بالنقطة (a, b) . يمكن أن يمثل بارامترياً على الأقل موضعياً مثل المنحنى فى $\boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^q$ الدالة مامعرفة فى جوار W من $a \in \boldsymbol{R}^p$ إلى $\boldsymbol{R}^q$ ؛ أى أن

$$C = \{(x, \varphi(x)) : x \in W\}$$

سنمثل الآن نظرية أخرى تعطى شروطاً تحتها يمكن أن تكون الصورة لدالة ترسم فئة جزئية مفتوحة من $\boldsymbol{R}^p$ إلى $\boldsymbol{R}^q$ ممثلة بارامترى بواسطة دالة φ معرفة فى فئة مفتوحة فى فراغ فى بعد أقل .

لوجود هذه النظرية ، سنحتاج بعض حقائق أولية ، ولكنها أساسية ، من الجبر الخطى الذى ربما يكون مألوفاً للقارىء(*) . نتذكر أنه إذا كانت $L : \boldsymbol{R}^p \to \boldsymbol{R}^q$ تحويلا خطياً فإن المدى أو الصورة R_L من L هو فراغ جزئى من $\boldsymbol{R}^q$ معطى بأنه

$$R_L = \{L(x) : x \in \boldsymbol{R}^p\}$$

والفراغ الصفرى (أو اللب) N_L من L هو الفراغ الجزئى من $\boldsymbol{R}^p$ والمعطى بأنه

$$N_L = \{x \in \boldsymbol{R}^p : L(x) = 0\}$$

---

* لتفصيل اكبر ، استرشد بكتب هوفمان ، كونزى او فنكبيز المدونة فى المراجع .

يسمى البعد $r(L)$ من R_L رتبة L ، ويسمى البعد $n(L)$ من N_L بصفرية L . (أى أن رتبة L هى عدد المتجهات المستقلة الخطية فى R^q التى نحتاجها لرؤية المدى R_L ، وصفرية L هو عدد المتجهات المستقلة الخطية فى R^p التى نحتاج إليها لرؤية الفراغ الصفرى N_L) . نبرهن كتمرين أنه إذا كانت $\{u_1, \ldots, u_n\}$ فئة متجهات مستقلة خطية فى R^p تشبع N_L التى نضيف إليها $p - n$ متجهات $u_{n+1}, \ldots, u_p$ لنحصل على أساس الفراغ R^p ، حينئذ تكون الفئة $\{L(u_{n+1}), \ldots, L(u_p)\}$ فئة متجهات خطية مستقلة فى R^q تشبع R_L . لذلك ينتج أن $p = n(L) + r(L)$ ، ومن ثم : يكون البعد انطاق L مساوياً لحاصل جمع صفرية ورتبة L .

إذا مثلنا L بمصفوفة $q \times p$ كما فى (٢٣-١) ، فيمكن توضيح أن رتبة L هى العدد الأكبر r بحيث أنه يوجد على الأقل مصفوفة جزئية $r \times r$ محددها ليس صفراً .

تؤكد نظرية التمثيل البارامترية على أنه إذا كانت f هى راسم C^1 لفئة مفتوحة $\Omega \subseteq R^p$ إلى R^q بحيث أن $Df(x)$ لها رتبة مساوية r لجميع $x \in \Omega$ وإذا كانت $f(a) = b \in R^q$ لقيمة ما $a \in \Omega$ ، حينئذ يوجد جوار V للعنصر a بحيث أن التقييد الدالة f إلى V يمكن إعطاؤه كالراسم C^1 الذى يرسم φ المعرفة على جوار فى R^r .

٤١ - ١١ نظرية التمثيل البارامترى . نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ مفتوحة ونفرض أن $f : \Omega \to R^p$ تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$. نفرض أن $Df(x)$ لها رتبة r لكل $x \in \Omega$ ونفرض أن $f(a) = b \in R^q$ لقيمة ما $a \in \Omega$. حينئذ

(i) يوجد جوار مفتوح $V \subseteq \Omega$ للعنصر a ودالة $\alpha : V \to R^r$ فى صنف $C^1(V)$ ، و

(ii) توجد فئة مفتوحة $W \subseteq R^r$ ودوال $\beta : W \to R^p$ و $\varphi : W \to R^q$ ، بحيث أن

(iii) $f(x) = \varphi \circ \alpha(x)$ لكل $x \in V$ ، $\varphi(t) = f \circ \beta(t)$ لكل $t \in W$

البرهان . بدون فقد الحالة العامة يمكن فرض $b = 0 \in R^q$ و $a = 0 \in R^p$

نفرض أن $L = Df(0)$ بحيث أن $L : R^p \to R^q$ لها رتبة r ، ونفرض أن $\{x_1, \ldots, x_p\}$ هى أساس فى R^p بحيث أن $\{x_{r+1}, \ldots, x_p\}$ تشبع الفراغ الصفرى من L . نفرض أن X_1 هى رؤية $\{x_1, \ldots, x_r\}$ وأن $X_2 = N_L$ هى رؤية $\{x_{r+1}, \ldots, x_p\}$. ينتج كما ذكرنا سابقاً أن $Y_1 = R_L$ نظرت بواسطة $\{y_1 = L(x_1), \ldots, y_r = L(x_r)\}$. نفرض أننا اخترنا $\{y_{r+1}, \ldots, y_q\}$ بحيث أن $\{y_1, \ldots, y_q\}$ هى أساس R^q ونفرض أن Y_2 هى الرؤية للمقدار $\{y_{r+1}, \ldots, y_q\}$

ينتج أنه لكل متجه $x \in R^p$ تمثيل وحيد فى الصورة $x = c_1x_1 + \cdots + x_px_p$
نفرض أن P_1 و P_2 تحويلان خطيان فى R^p ومعرفان كما يلى .

$$P_1(x)=\sum_{j=1}^{r} c_j x_j, \qquad P_2(x)=\sum_{j=r+1}^{p} c_j x_j$$

واضح أن المدى للمقدار P_j يساوى $X_j,\ j=1,2$. بالمثل ، نفرض أن Q_2 و Q_1 تحويلان خطيان فى R^q ومعرفان للمقدار $y=c_1y_1+\cdots+c_qy_q$ بأنهما

$$Q_1(y)=\sum_{j=1}^{r} c_j y_j, \qquad Q_2(y)=\sum_{j=r+1}^{q} c_j y_j$$

واضح أن المدى للمقدار Q_j هو $Y_j,\ j=1,2$.

إذا كانت L_1 هى تقييد L إلى X_1 ، حينئذ L_1 هو تناظر أحادى من X_1 إلى Y_1 فوقيا ؛ نفرض أن $A:Y_1\to X_1$ هو عكس L_1 . نلاحظ أن $A\circ L(x)=x$ لكل $x\in X_1$ وأن $L\circ A(y)=y$ لكل $y\in Y_1$. نعرف u الآن فى $\Omega\subseteq R^p$ إلى R^p بأنها

$$u(x)=A\circ Q_1\circ f(x)+P_2(x), \qquad x\in\Omega \tag{41.12}$$

أى أن $u(0)=0$ ، u ترسم $X_1\cap\Omega$ إلى X_1 ، وأن

$$Du(x)=A\circ Q_1\circ Df(x)+P_2, \qquad x\in\Omega$$

ومن ثم تنتمى u إلى صنف $C^1(\Omega)$. وبما أنه قد لاحظنا حالا أن $Du(0)$ هو الراسم المحايد على R^p ، حينئذ ينتج من النظرية العكسية (٤١ – ٨) أنه يوجد جوار مفتوح U من $a=0$ بحيث أن $U'=u(U)$ هو جوار مفتوح من 0 ، وأن تقييد u إلى U هو تناظر أحادى إلى U' وله راسم عكسى $w=u^{-1}:U'\to R^p$ ينتمى إلى صنف $C^1(U')$. وبالإضافة إلى ذلك ، نجد أنه بإحلال U' و U بفئتين اصغر منها ، يمكننا أيضا فرض أن U' محدبة (أى أنها ، تحتوى على جزء الخط المستقيم الواصل بين أى نقطتين من نقطها) .

نفرض الآن أن $g:U'\to R^q$ معرفة بأنها

$$g(z)=f(w(z)), \qquad z\in U'\subseteq R^p$$

واضح أن g تنتمى إلى صنف $C^1(U')$ وأن

$$Dg(z)=Df(w(z))\circ Dw(z), \qquad z\in U'$$

بما أن $Df(x)$ لها رتبة r لكل $x\in\Omega$ وأن $Dw(z)$ لها دالة عكسية عند $x\in U'$ حينئذ ينتج من نظرية فى جبر خطى أن $Dg(z)$ لها رتبة r لجميع $z\in U'$. وبمعنى آخر

$$\begin{aligned} g(z)&=(Q_1+Q_2)\circ f(w(z))\\ &=Q_1\circ f(w(z))+Q_2\circ f(w(z)) \end{aligned}$$

حيث أن $w=u^{-1}$ ، فينتج من (٤١ – ١٢) أن

$$z=u(w(z))=A\circ Q_1\circ f(w(z))+P_2(w(z)), \qquad z\in U'$$

لكن بما أن $L\circ A\circ Q_1 = Q_1$ فى $\boldsymbol{R}^q$ وأن $L\circ P_2 = 0$ فى $\boldsymbol{R}^p$ نجد أن

$$L(z) = Q_1\circ f(w(z)) = Q_1\circ g(z) \tag{41.13}$$

ومنها ينتج أن $L = Q_1\circ Dg(z)$ عند $z\in U'$. لذلك ، إذا كانت $z\in U'$ ، حينئذ يرسم المؤثر Q_1 مدى $\boldsymbol{Dg(z)}$ (الذى بعده هو r) فوقياً إلى مدى $\boldsymbol{L}$ (الذى أيضاً له بعد r) . ينتج أن Q_1 إدخالية فى مدى $\boldsymbol{Dg(z)}$ عند $z\in U'$ ؛ ومن ثم ، إذا كانت $z\in U'$ و $x\in \boldsymbol{R}^p$ بحيث أن $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{L(x)}$ فإن $\boldsymbol{Dg(z)(x) = 0}$ ونتيجة لذلك نجد أنه ، إذا كانت $z\in U'$ و $z_2\in X_2 = N_L$ فإننا نستنتج أن $Dg(z)(z_2) = 0$.

سنوضح الآن أن $g: U'\to \boldsymbol{R}^q$ تعتمد فقط على $z_1\in X_1$ بمعنى أنه إذا كانت $z\in U'$ و $z_2\in X_2$ بحيث أن $z+z_2\in U'$ ، فإن $g(z+z_2) = g(z)$. لملاحظة هذا ، نستخدم نظرية القيمة المتوسطة (٤٠ — ٥) لاستنتاج وجود نقطة z_0 على قطعة الخط المستقيم الواصل بين $z+z_2$ ، z (ومن ثم فى $\boldsymbol{U'}$) بحيث أن

$$0 \le \|g(z+z_2) - g(z)\| \le \|Dg(z_0)(z_2)\| = 0$$

وإذن $g(z+z_2) = g(z)$ كالمطلوب .

نستعد الآن لتعريف الرواسم α, β, φ نفرض أن $C: \boldsymbol{R}^r\to \boldsymbol{R}^p$ هى تحويل خطى يرسم العناصر الأساسية القياسية $e_1, \ldots, e_r$ فى $\boldsymbol{R}^r$ إلى المتجهات $x_1, \ldots, x_r$ التى تكون قاعدة للمقدار $\boldsymbol{X_1}$. حينئذ $\boldsymbol{C}$ هى تناظر أحادى من $\boldsymbol{R}^r$ إلى $\boldsymbol{X_1}$ فوقيا وإذن $C^{-1}: X_1\to \boldsymbol{R}^r$ موجودة . نفرض أن $W = C^{-1}(U') = C^{-1}(U'\cap X_1)$ ، بحيث أن $W\subseteq \boldsymbol{R}^r$ هو جوار مفتوح عند 0 فى $\boldsymbol{R}^r$ ونفرض أن $V\subseteq U$ جوار مفتوح عند $\boldsymbol{a = 0}$ بحيث أن $P_1\circ u(V)\subseteq U'$. نعرف الآن $\alpha: V\to \boldsymbol{R}^r$ ، $\beta: W\to \boldsymbol{R}^p$ بأنها

$$\alpha(x) = C^{-1}\circ P_1\circ u(x), \qquad \beta(t) = w\circ C(t) \tag{41.14}$$

عند $x\in V$ و $t\in W$. من الواضح أن $\boldsymbol{\alpha}$ تنتمى إلى صنف $C^1(V)$ وأن $\alpha(V)\subseteq W$ وأن $\boldsymbol{\beta}$ تنتمى إلى $C^1(W)$ و $\beta(W)\subseteq U$. نعرف الآن $\varphi: W\to \boldsymbol{R}^q$ عند $t\in W$ بأنها

$$\varphi(t) = g\circ C(t)$$

ومنها ينتج أن

$$\varphi(t) = (f\circ w)\circ C(t) = f\circ \beta(t)$$

وعلاوة على ذلك ، نجد أنه إذا كانت $x\in V$ ، فإن

$$f(x) = f(w\circ u(x)) = (f\circ w)\circ u(x) = g\circ u(x)$$

لكن ، قد رأينا أن $g\circ u(x) = g\circ P_1\circ u(x)$ بحيث أن

$$f(x) = g \circ u(x) = g \circ (C \circ C^{-1}) \circ (P_1 \circ u)(x)$$
$$= (g \circ C) \circ (C^{-1} \circ P_1 \circ u)(x)$$
$$= \varphi \circ \alpha(x)$$

إذن $f(x) = \varphi \circ \alpha(x)$ لكل $x \in V$. وهو المطلوب إثباته

أثناء هذا التركيب ، قد أثبتنا فعلا معلومات أكثر قليلا نستفيد فى هذه النتيجة من التصور المستخدم فى برهان النظرية .

٤١ – ١٢ نتيجة . (أ) الراسم $\varphi : W \to R^q$ يكون فى الصورة $\varphi_1 + \varphi_2$ حيث φ_1 هى التقييد إلى W الراسم الخطى من $R^r \to R^q$ الذى يأخذ $e_j \in R^r$ إلى $y_j = L(x_j),\ j = 1, \ldots, r$ فوقيا وحيث $\varphi_2(W) \subseteq Y_2$

(ب) إذا كانت $t \in W$ ، فإن $\alpha \circ \beta(t) = t$

(ج) إذا كانت $x \in U \cap X_1$ ، فإن $x \in V$ و $\beta \circ \alpha(x) = x$

البرهان . (أ) بما أن $g = Q_1 \circ g + Q_2 \circ g$ فينتج من (٤١–١٣) أن $g = L + Q_2 \circ g$ وإذن ، من تعريف φ نجد أن $\varphi = L \circ C + Q_2 \circ g \circ C$ التى لها الصورة المبينة فى (أ) .

(ب) إذا كانت $t \in W$ ، فإن $x = \beta(t) = w \circ C(t) \in U$ لها خاصية كون $u(x) = u \circ w \circ C(t) = C(t) \in U' \cap X_1$ ، ومن ثم $P_1 \circ u(x) = C(t) \in U'$ أى أن $x \in V$ وأن $\alpha(x) = C^{-1} \circ P_1 \circ u(x) = C^{-1} \circ C(t) = t$ ما يثبت نص (ب) .

(ج) إذا كانت $x \in \Omega \cap X_1$ ،فإنه ينتج من (٤١–١٢) وحقيقة كون $P_2(x) = 0$ وأن $u(x) \in X_1$ ومن ثم إذا كانت $x \in U \cap X_1$ فينتج أن $P_1 \circ u(x) = u(x) \in U' \cap X_1$ أى أن $x \in V$. وبالإضافة إلى ذلك

$$\beta \circ \alpha(x) = (w \circ C) \circ (C^{-1} \circ P_1 \circ u)(x)$$
$$= w \circ C \circ C^{-1} \circ u(x) = w \circ u(x) = x$$

وهو المطلوب إثباته .

يمكننا الآن استخدام النتيجة لنظرية البارامترية أو التمثيل البارامترى لبرهنة نظرية الرتبة .

٤١ – ١٣ نظرية رتبة . نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ مفتوحة ونفرض أن $f : \Omega \to R^q$ تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$. نفرض أن $Df(x)$ لها رتبة r لجميع $x \in \Omega$ ونفرض أن $f(a) = b \in R^q$ عند قيمة ما $a \in \Omega$. حينئذ :

(i) يوجد جواران مفتوحان V للنقطة a ، V' للعنصر 0 فى R^p ، ودالة $\sigma : V \to V'$ فى صنف $C^1(V)$ لها دالة عكسية $\sigma^{-1} : V' \to V$ فى صنف $C^1(V')$ ؛

(ii) يوجد جواران مفتوحان Z للنقطة b ، Z' للعنصر 0 فى R^q ، ودالة $\tau : Z' \to Z$ فى صنف $C^1(Z')$ لها دالة عكسية $\tau^{-1} : Z \to Z'$ فى صنف $C^1(Z)$ ؛

(iii) إذا كانت $x \in V$ ، فإن $f(x) = \tau \circ i_r \circ \sigma(x)$ ، حيث $i_r : R^p \to R^q$ هو الراسم المعرف بأنه

$$i_r(c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_p) = (c_1, \ldots, c_r, 0, \ldots, 0) \in R^q$$

البرهان . نفرض أن $b = 0$ و $a = 0$ وسنستخدم التصور والنتائج التى أثبتناها أثناء البرهان لنظرية التمثيل البارامترى . نفرض أن $B : R^p \to R^p$ هى الدالة الخطية التى ترسم العناصر الأساسية القياسية $e_1, \ldots, e_p$ من R^p إلى المتجهات $x_1, \ldots, x_p$ ؛ إذن B هو تناظر أحادى من R^p إلى R^p فوقيا وإذن B^{-1} موجودة . الراسم $\sigma : \Omega \to R^p$ المعرف بأنه $\sigma(x) = B^{-1} \circ u(x)$ ينتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$ وبما أن التقييد u إلى U له راسم عكسى $w : U' \to R^p$ يرسم إلى U فوقيا ، فينتج أن تقييد σ إلى U له راسم عكسى $\sigma^{-1} = w \circ B$ ترسم $B^{-1}(U')$ إلى U فوقيا .

إذا فرضنا أن $W \subseteq R^r$ وأن $\varphi : W \to R^q$ هى كما فى النظرية البارامترية ونفرض أن $H : R^q \to R^q$ دالة خطية ترسم العناصر الأساسية القياسية $e_1, \ldots, e_q$ من R^q إلى المتجهات $y_1, \ldots, y_q$ ؛ حينئذ H هى تناظر أحادى من R^q إلى R^q فوقيا وإذن H^{-1} موجودة تعرف

$$W' = \{(c_1, \ldots, c_q) \in R^q : (c_1, \ldots, c_r) \in W\}$$

ونفرض أن $\tau : W' \to R^q$ معرفة بأنها

$$\tau(c_1, \ldots, c_q) = \varphi(c_1, \ldots, c_r) + H(0, \ldots, 0, c_{r+1}, \ldots, c_q)$$

فينتج من نتيجة (٤١ – ١٢) (أ) أن $D\tau(0) = H$ ، وإذن تدل نظرية الدالة العكسية (٤١ – ٨) على أن تقييد τ إلى جوار ما Z' للعنصر 0 هو تناظر أحادى إلى جوار ما Z من $\tau(0) = 0$ فوقيا .

وبتقييد أبعد V إذا كان ضرورياً ، يمكننا فرض أن $f(V) \subseteq Z$. نفرض الآن أن $x \in V$ ونعتبر $\sigma(x) = B^{-1} \circ u(x)$. إذا كانت i_p معرفة كما عرفت أعلاه ، فإن $i_r \circ \sigma(x) = (C^{-1} \circ P_1 \circ u(x), 0) = (\alpha(x), 0)$. إذن $\tau \circ i_r \circ \sigma(x) = \varphi \circ \sigma(x) = f(x)$ لجميع $x \in V$. وهو المطلوب إثباته.

تمرينـــــات :

٤١ – (أ) نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ مفتوحة وأن $f : \Omega \to R^q$. إذا كانت $Df(x)$ موجودة لجميع $x \in \Omega$ وإذا كانت $j = 1, \ldots, p$, $i = 1, \ldots, q$ ، حينئذ أثبت أن

$|D_j f_i(x) - D_j f_i(y)| < \|Df(x) - Df(y)\|_{pq}$ ومن ثم إذا كانت f تنتمي إلى صنف $C^1(\Omega)$ فإن كلا من المشتقات الجزئية $D_j f_i$ متصلة في Ω .

٤١ – (ب) نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ مفتوحة وأن $f : \Omega \to R^q$. إذا كانت f تنتمي إلى صنف $C^1(\Omega)$ وكانت $K \subseteq \Omega$ مدمجة ، وضح أن $x \mapsto Df(x)$ متصلة بانتظام بمعنى أنه لكل $\varepsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث أنه إذا كانت $x, y \in K$ و $\|x - y\| < \delta$ فإن $\|Df(x) - Df(y)\|_{pq} < \varepsilon$

٤١ – (ج) نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ و $\Omega_1 \subseteq R^q$ مفتوحة ونفرض أن $f : \Omega \to R^q$ تنتمي إلى صنف $C^1(\Omega)$ وأن $g : \Omega_1 \to R^r$ تنتمي إلى صنف $C^1(\Omega_1)$. إذا كانت $f(\Omega) \subseteq \Omega_1$ ، أثبت أن $g \circ f$ تنتمي إلى صنف $C^1(\Omega)$.

٤١ – (د) نفرض أن $f : R \to R$ معرفة بأنها $f(x) = x^3$. أثبت أن f تنتمي إلى فصل $C^1(R)$ وأنه تناظر أحادي من R إلى R فوقيا ولها دالة عكسية $g(x) = x^{1/3}$ لكل $x \in R$. لكن $Df(0)$ ليست راسماً إدخالياً أو فوقياً . هل تنتمي g إلى صنف $C^1(R)$ ؟

٤١ – (هـ) نفرض أن $g : R \to R$ بحيث أن $g'(x) \neq 0$ لكل $x \in R$. وضح أن g تناظر أحادي من R إلى $g(R)$ فوقيا .

٤١ – (و) نفرض أن $A \subseteq R^p$ ، ونفرض أن $f : A \to R^p$ ، ونفرض أن $g : f(A) \to R^p$ هي الدالة العكسية للدالة f . نفرض أن f قابلة للتفاضل عند $a \in A$ وأن g قابلة للتفاضل عند $b = f(a)$. إذا كانت $Df(a)$ ليس لها دالة عكسية ، حينئذ أثبت أن $Dg(b)$ ليست لها دالة عكسية .

٤١ (ز) – نفرض أن $f : R^2 \to R^2$ معطاة بأنها

$$f(x, y) = (x + y, 2x + ay)$$

(أ) احسب $Df(x, y)$ فأثبت أن $Df(x, y)$ لها دالة عكسية إذا وإذا فقط كانت $a \neq 2$.

(ب) افحص الصورة لمربع الوحدة $\{(x, y) : x, y \in [0, 1]\}$ عند $a = 1, 2, 3$.

٤١ - (ح) نفرض أن f هي الراسم من R^2 إلى R^2 فوقيا الذي يرسل النقطة (x, y) إلى النقطة (u, v) حيث

$$u = x, \qquad v = xy$$

ارسم بعض منحنيات مقدار ثابت = u ومقدار ثابت = v في المستوى (x, y) وبعض منحنيات مقدار ثابت = x ومقدار ثابت = y في المستوى (u, v) . هل هذا الرسم واحد – واحد ؟ . هل ترسم f كل R^2 فوقياً ؟ . أثبت أنه إذا كانت $x \neq 0$ ، فإن f ترسم جوارا ما للنقطة (x, y) بنمط واحد – واحد إلى جوار (x, xy) فوقيا . في أي نطاق في المستوى (u, v) ترسم الدالة f

المستطيل $\{(x, y): 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$ ماهى النقط فى المستوى (x, y) التى ترسم تحت f إلى المستطيل $\{(u, v): 1 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 2\}$

٤١ – (ط) نفرض أن f هو الراسم من $\mathbf{R}^2$ إلى $\mathbf{R}^2$ الذى يرسل النقطة (x,y) إلى النقطة (u, v) والمعطى كما يلى

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy$$

ماهى المنحنيات فى المستوى (x, y) التى ترسم تحت f إلى الخطين مقدار ثابت $= v$ ومقدار ثابت $= u$ إلى أى منحنين فى المستوى (u,v) ينقل الخطين ومقدار ثابت $= y$ ومقدار ثابت $= x$ أثبت أن كل نقطة (u, v) ليست صفرية هى الصورة تحت f لنقطتين . إلى أى حيز ترسم الدالة f المربع $\{(x, y): 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ ماهو الحيز المرسوم بالدالة f إلى المربع $\{(u, v): 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1\}$

٤١ – (ى) نفرض أن $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ معرفة بأنها

$$h(x) = x + 2x^2 \sin\frac{1}{x} \quad \text{for} \quad x \ne 0$$
$$= 0 \quad \text{for} \quad x = 0$$

أثبت أن h لاتنتمى إلى صنف $C^1(\mathbf{R})$ وأن h ليست إدخالية فى جوار 0 . لكن ، فوقية فى جوار 0 أن Dh (0) لها دالة عكسية .

٤١ – (ك) نفرض أن $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ معرفة بأنها $f(x, y) = (y, x + y^2)$ عند $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ، أثبت أن f تنتمى إلى صنف $C^1(\mathbf{R}^2)$ وأن f لها دالة عكسية فى جوار ما لنقطة اختيارية من $\mathbf{R}^2$. ارسم الصورة تحت f للمستقيمات $x = 0, \pm 1, \pm 2$ and $y = 0, \pm 1, \pm 2$. أوجد الدالة العكسية $g = f^{-1}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ واثبت أن $Dg(f(x_0, y_0)) = Df(x_0, y_0)^{-1}$

٤١ – (ل) (هذا التمرين يحتاج إلى معرفة معنى محدد المصفوفة المربعة) . نفرض أن $L \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^p)$ ونفرض أن $[c_{ij}]$ هى مصفوفة تمثل L بالنسبة للقاعدة القياسية فى $\mathbf{R}^p$. وضح فى علم الجبر الخطى أن L لها مصفوفة عكسية إذا وإذا فقط كان $\Delta = \det[c_{ij}]$ ليس صفراً . وبالإضافة إلى ذلك ، إذا كانت $\Delta \ne 0$ ، فإن مصفوفة L^{-1} تكون فى الصورة $[p_{ij}/\Delta]$ ، حيث p_{ij} كثيرات حدود فى c_{ij} .

(أ) أثبت أنه إذا كانت L_0 لها مصفوفة عكسية وإذا كانت $\|L - L_0\|_{pp}$ صغيرة بكفاية ، فإن L لها معكوس .

(ب) أثبت أنه إذا كانت L_0 لها معكوس ، فإن الراسم $L \mapsto L^{-1}$ يكون متصلا فى جوار L_0 بالنسبة للعمود فى $\mathscr{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^p)$

(ج) نفرض أن $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$ مفتوحة وأن $f: \Omega \to \mathbf{R}^p$ تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$

إذا كانت $Df(c)$ لها دالة عكسية عند بعض $c \in \Omega$ ، فإن $Df(x)$ لها دالة عكسية فى جوار ما للعنصر c.

٤١ – (م) نفرض أن $F: R^2 \to R$ معرفة بأنها $F(x, y) = y^2 - x$. أثبت أن F تنتمى إلى صنف $C^1(R^2)$ لكن $D_2F(0, 0) = 0$. أثبت انه لا توجد دالة φ معرفة فى جوار مثل W للعنصر 0 بحيث أن $F(x, \varphi(x)) = 0$ لجميع $x \in W$.

٤١ – (ن) نفرض أن $f: R^3 \to R^2$ معرفة بأنها

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - 2xz)$$

بحيث $f(0, 0, 0) = (0, 0)$ وأن $Df(0, 0, 0)$ معطاة بالآتى

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(أ) أثبت أنه يمكننا الحل بالنسبة إلى $(x, y) = \varphi(z)$ بالقرب من $z = 0$ وأن

$$D\varphi(0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(ب) أد الحل الصريح عند $(x, y) = \varphi(z)$ للحصول على

$$\varphi(z) = \left(\frac{z}{2(z-1)}, \frac{2-2z^2}{2(z-1)}\right) \quad \text{for } z < 1$$

حقق النتيجة الموجودة فى جزء (أ) .

(ج) أثبت أنه يمكننا الحل بالنسبة إلى $(y, z) = \psi(x)$ بالقرب من $x = 0$ وأن

$$D\psi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(د) أد الحل الصريح عند $(y, z) = \psi(x)$ لتحصل على

$$\psi(x) = \left(\frac{2x^2 + x}{1 - 2x}, \frac{2x}{2x - 1}\right) \quad \text{for } x < \frac{1}{2}$$

حقق النتيجة الموجودة فى جزء (ج) .

٤١ – (س) نفرض أن $F: R^5 \to R^2$ معرفة بأنها

$$F(u, v, w, x, y) = (uy + vx + w + x^2, uvw + x + y + 1)$$

ولاحظ أن $F(2, 1, 0 - 1, 0) = (0, 0)$

(أ) وضح أنه يمكننا حل $F(u, v, w, x, y) = (0, 0)$ بالنسبة إلى (x,y) بدلالة (u, v, w) بالقروض $(2, 1, 0)$.

(ب) إذا كانت $(x, y) = \varphi(u, v, w)$ هى الحل فى جزء (أ) ، أثبت أن $D\varphi\,(2, 1, 0)$ تعطى بالمصفوفة .

$$-\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & -1 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

٤١ – (ع) نفرض أن $A \subseteq \mathbf{R}^3$ ونفرض أن $F: A \to \mathbf{R}$ تمثل ضمنياً سطحاً S_F، في $\mathbf{R}^3$ مثل « السطح المستوى »

$$S_F = \{(x, y, z) \in A : F(x, y, z) = 0\}$$

إذا كانت F قابلة للتفاضل عند نقطة داخلية $(x_0, y_0, z_0) \in S_F$ في A ، فإن الفراغ المماسى للسطح S_F عند هذه النقطة هو فئة النقط

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : A_{(x_0, y_0, z_0)}(x, y, z) = 0\}$$

حيث $A_{(x_0, y_0, z_0)}$ هو الراسم المألوف من $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ والمعرف بأنه

$$\begin{aligned} A_{(x_0, y_0, z_0)}(x, y, z) &= F(x_0, y_0, z_0) + DF(x_0, y_0, z_0)(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\ &= DF(x_0, y_0, z_0)(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \end{aligned}$$

(أ) اثبت أن الفراغ المماسى عند النقطة (x_0, y_0, z_0) يعطى بالآتى :

$$\{(x, y, z) : D_1F(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + D_2F(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + D_3F(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0\}$$

حينئذ الفراغ المماسى للسطح S_F يكون مستوياً إذا كان واحـــد على الأقل من الأعداد $D_1F(x_0, y_0, z_0), D_2F(x_0, y_0, z_0), D_3F(x_0, y_0, z_0)$ يختلف عن صفر . فى هذه الحالة يسمى الفراغ المماس للسطح S_F بالمستوى المماس للسطح S_F عند النقطة (x_0, y_0, z_0) .

٤١ – (ف) نفرض أن $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ ، والمعطاة أسفل ، تمثل ضمنياً سطحاً S_F فى $\mathbf{R}^3$ كالسطح المستوى

$$S_F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$$

فى كل من الحالات الآتية ، حدد فراغ المماس للسطح S_F عند النقط المبينة

(أ) نفرض أن $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ عند النقطتين $(1, 1, 2)$ و $(0, 2, 4)$

(ب) نفرض أن $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25$ عند النقطتين $(3, 4, 0)$ و $(3, 3, \sqrt{7})$

(ج) نفرض أن $F(x, y, z) = z - xy$ عند النقطتين $(1, 1, 1)$ و $(4, \frac{1}{2}, 2)$

٤١ – (ص) (أ) نفرض أنه ، بالإضافة إلى فروض نظرية الدالة العكسية (٤١–٨) ، من المعروف أن الدالة f مشتقات جزئية متصلة من رتبة $m > 1$. أثبت أن الدالة العكسية $g : V \to \mathbf{R}^p$ لها مشتقات جزئية متصلة من رتبة m .

(ب) أثبت النتيجة المناظرة لنظرية الدالة الضمنية (٤١ – ٩) .

٤١ – (ق) نفرض أن $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ تنتمى إلى صنف $C^1(\mathbf{R}^2)$. وضح أن f ليست إدخالية ، فى الحقيقة ، تقييد الدالة f لفئة مفتوحة من $\mathbf{R}^2$ ليست إدخالية .

٤١ – (ر) نفرض أن $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ تنتمي إلى صنف $C^1(\mathbf{R})$. وضح أنه إذا كانت $c \in \mathbf{R}$ ، حينئذ تقييد الدالة g لأي جوار c ليس راسماً فوقياً إلى جوار $g(c)$.

٤١ – (ش) نفرض أن $L \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q)$ إدخالية ونفرض أن $r > 0$ بحيث أن $r\|x\| \leq \|L(x)\|$ لكل $x \in \mathbf{R}^p$. وضح أنه إذا كانت $L_1 \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q)$ بحيث أن $\|L_1 - L\|_{pq} < r$ ، فإن L_1 إدخالية (ومن ثم تكون الفئة لرواسم إدخالية مفتوحة في $\mathscr{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q)$).

٤١ – (ت) نفرض أن $L \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q)$ راسم فوق وأن $m > 0$ هي كما في برهان (٤١ – ٦) . أثبت أنه إذا كانت $L_1 \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q)$ بحيث أن $\|L_1 - L\|_{pq} < m/2$ ، فإن L_1 راسم فوق . (من ثم ، تكون فئة الرواسم الفوقية مفتوحة في $\mathscr{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q)$) .

٤١ – (ث) نفرض أن $g: \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ تنتمي إلى صنف $C^1(\mathbf{R}^p)$ وتحقق $\|Dg(x)\|_{pp} \leq a < 1$ لكل $x \in \mathbf{R}^p$ إذا كانت $f(x) = x + g(x)$ عند $x \in \mathbf{R}^p$ ، وضح أن الدالة f تحقق

$$\|f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)\| \leq a\,\|x_1 - x_2\|$$

لجميع x_1, x_2 في $\mathbf{R}^p$ وأن f تناظر أحادي من $\mathbf{R}^p$ إلى $\mathbf{R}^p$.

مشروعات :

٤١ – (α) (يعطي هذا المشروع برهاناً أولياً ومباشراً لنظرية الدالة الضمنية) نفرض أن $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ مفتوحة ونفرض أن $F: \Omega \to \mathbf{R}$ تنتمي إلى صنف $C^1(\Omega)$. نفرض أن $(a, b) \in \Omega$ وأن $F(a, b) = 0$ وأن $D_2F(a, b) > 0$.

(أ) أثبت أنه توجد خلية مغلقة $Q = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ بمركز (a, b) بحيث أن $D_2F(x, y) > 0$ لكل $(x, y) \in Q$ وبحيث أن $F(x, b_1) < 0$ و $F(x, b_2) > 0$ لكل $x \in [a_1, a_2]$.

(ب) إذا كانت $x \in [a_1, a_2]$ ، فإن الدالة $F_x: [b_1, b_2] \to \mathbf{R}$ المعرفة بأنها $F_x(y) = F(x, y)$ عند $y \in [b_1, b_2]$ تكون بحيث أن $F_x(b_1) < 0 < F_x(b_2)$ و $F_x'(y) > 0$ عند $y \in [b_1, b_2]$.

(ج) توجد دالة φ ترسم $[a_1, a_2]$ إلى $[b_1, b_2]$ بحيث أن $F(x, \varphi(x)) = 0$ لجميع $x \in [a_1, a_2]$.

(د) إذا كانت $x \in (a_1, a_2)$ وكانت $|h|$ صغيرة بكفاية ، أثبت أنه توجد h_1 عند $0 < |h_1| < |h|$ بحيث أن

$$\begin{aligned} 0 &= F[x+h, \varphi(x+h)] - F[x, \varphi(x)] \\ &= D_1F[x+h_1, \varphi(x+h_1)]h + D_2F[x+h_1, \varphi(x+h_1)][\varphi(x+h) - \varphi(x)] \end{aligned}$$

(هـ) أثبت أن φ قابلة للتفاضل فى (a_1, a_2) وأن

$$\varphi'(x) = -D_1F[x, \varphi(x)]/D_2F[x, \varphi(x)]$$

(و) عدل الاستنتاج السابق لدالة F معرفة على فئة مفتوحة $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^p$

(ز) نفرض أن $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^2$ مفتوحة ونفرض أن $F, G: \Omega \to \boldsymbol{R}$ تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$ ونفرض أنه لنقطة ما $(a, b) \in \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^2$ نحصل على $F(a, b) = 0$ ، $G(a, b) = 0$ نفرض أن

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} D_{p+1}F(a, b) & D_{p+2}F(a, b) \\ D_{p+1}G(a, b) & D_{p+2}G(a, b) \end{bmatrix} \neq 0$$

حينئذ لا يتلاشى على الأقل واحـــد من $D_{p+1}F(a, b)$ و $D_{p+2}F(a, b)$ نفرض أن $D_{p+2}F(a, b) \neq 0$ ونستخدم (و) لنحصل على $x_{p+2} = \varphi(x_1, \ldots, x_{p+1})$ فى جوار $(a, b_1) \in \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}$ ومن ثم $F(x_1, \ldots, x_{p+1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{p+1})) = 0$ فى هذا الجوار . نضع الآن

$$H(x_1, \ldots, x_{p+1}) = G(x_1, \ldots, x_{p+1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{p+1}))$$

حسب قاعدة السلسلة يكون

$$D_{p+1}H = D_{p+1}G + (D_{p+2}G)(D_{p+1}\varphi)$$

حيث حسبت هذه الدوال عند نقطة مناسبة . بما أن $D_{p+1}\varphi = -(D_{p+1}F)/(D_{p+2}F)$ فنستنتج أن $D_{p+1}H = -\Delta/D_{p+2}F$ التى لا تنعدم عند (a, b_1) . حينئذ يمكننا استخدام (و) للحصول على $x_{p+1} = \psi(x_1, \ldots, x_p)$ فى جوار $a \in \boldsymbol{R}^p$. (هذا يثبت نظرية الدالة الضمنية فى الحالة التى فيها $q = 2$ نحصل على امتدادات لحالة التى فيها تكون q عامة بالاستنتاج) .

٤١ — (β) (هذا المشروع يوازى المشروع ٤٠ — α ويعطى برهاناً مباشراً بدرجة أكثر لجزء الأول لنظرية الدالة المكسية ٤١ — ٨ ثم الجزء المذكور فى النص) . نفرض أن $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^p$ مفتوحة ، وأن $f: \Omega \to \boldsymbol{R}^p$ تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$ وأنه عند بعض $x_0 \in \Omega$ يكون الراسم الخطى $Df(x_0)$ تناظراً أحادياً . نفرض أن $\Gamma = Df(x_0)^{-1}$.

(أ) أثبت أنه توجد $r > 0$ بحيث أنه إذا كانت $\|x - x_0\| \leq r$ ، فإن $\|I - \Gamma \circ Df(x)\|_{pp} \leq \frac{1}{2}$.

(ب) نفرض أن $s \leq \frac{1}{2}r\|\Gamma\|_{pp}^{-1}$ وتعرف عند ثبوت y حيث $\|y - f(x_0)\| \leq s$ ، $F_y(x) = f(x) - y$ عند $\|x - x_0\| \leq r$. حينئذ F_y قابلة للتفاضـــل $\|\Gamma \circ F_y(x_0)\| \leq \frac{1}{2}r$ ، $\|I - \Gamma \circ DF_y(x)\|_{pp} \leq \frac{1}{2}$ عند $\|x - x_0\| \leq r$.

(ج) إذا كانت $\|y - f(x_0)\| \leq s$ ، نفرض أن G_y معرفة عند $\|x - x_0\| \leq r$ بأنها $G_y(x) - x - \Gamma \circ F_y(x)$. حينئذ G_y تقلص بمقدار ثابت $\frac{1}{2}$ على سطح هذه الكرة .

(د) إذا كانت $\|y - f(x_0)\| \leq s$ تعرف $\varphi(y) = x_0$ ، $\varphi_{n+1}(y) = G_y(\varphi_n(y))$ عند

$n = 0, 1, 2, \ldots$. أثبت أن $\|\varphi_{n+1}(y) - \varphi_n(y)\| \le 2^{-n}\|\varphi_1(y) - \varphi_0(y)\| \le 2^{-n-1}r$ ومنها ينتج أن $\|\varphi_{n+1}(y) - \varphi_m(y)\| \le 2^{-m}r$ عند $n \ge m \ge 0$. بوجه خاص يكون $\|\varphi_k(y) - x_0\| \le r$ أى أن هذا التكرر ممكن .

(هـ) وضح أن كلا من الدوال (φ_k) متصلة عند $\|y - f(x_0)\| \le s$ وأن المتتابعة φ_k تتقارب بانتظام إلى دالة متصلة φ بحيث أن $G_y(\varphi(y)) = \varphi(y)$ عند $\|y - f(x_0)\| \le s$ ومن ذلك ينتج أن $f(\varphi(y)) = y$ عند $\|y - f(x_0)\| \le s$. حينئذ تكون الدالة φ هى الدالة العكسية للدالة f فى الفئة $\{y : \|y - f(x_0)\| \le s\}$ وترسمها إلى الفئة $\{x : \|x - x_0\| \le r\}$

٤١ - (γ) (يوازى هذا المشروع مشروعى ٤٠ - α ، ٤١ - β ويعطى برهانا مباشراً لنظرية الدالة الضمنية) . نفرض أن $\Omega \subseteq R^p \times R^q$ مفتوحة ونفرض أن $(x_0, y_0) \in \Omega$ نفرض أن $F : \Omega \to R^q$ تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$ ، وأن $F(x_0, y_0) = 0$ ، وأن الراسم الخطى $L_2 : R^q \to R^q$ المعروف بأنه

$$L_2(v) = DF(x_0, y_0)(0, v) \quad \text{for} \quad v \in R^q$$

هو تناظر أحادى من R^q إلى R^q فوقيا ، نفرض أن $\Gamma = L_2^{-1}$.

(أ) أثبت أنه يوجد $r > 0$ بحيث أنه إذا كانت $\|x - x_0\|^2 + \|y - y_0\|^2 \le r^2$ حينئذ

$$\|v - \Gamma \circ DF(x, y)(0, v)\| \le \tfrac{1}{2}\|v\| \quad \text{for} \quad v \in R^q$$

(ب) نفرض أن $0 < s \le \frac{1}{2}r$ بحيث أنه إذا كانت $\|x - x_0\| \le s$ حينئذ

$$\|F(x, y_0)\| \le \tfrac{1}{4}r\,\|\Gamma\|_{qq}^{-1}$$

لكل x ثابتة عند $\|x - x_0\| \le s$ نعرف $G_x(y) = y - \Gamma \circ F(x, y)$ عند $\|y - y_0\| \le \frac{1}{2}r$ بقيم فى R^q . أثبت أنه لكل x عند $\|x - x_0\| \le s$ ، يكون

$$\|G_x(y_1) - G_x(y_2)\| \le \tfrac{1}{2}\|y_1 - y_2\|$$

لجميع y_1, y_2 اللذين يحققان $\|y_j - y_0\| \le \frac{1}{2}r$.

(ج) إذا كانت $\|x - x_0\| \le s$ ، عرف $\psi_0(x) = y_0$ و $\psi_{n+1}(x) = G_x(\psi_n(x))$ عند $n = 0, 1, 2, \ldots$. وضح أن $\|\psi_{n+1}(x) - \psi_m(x)\| \le 2^{-m-1}r$ عند $n \ge m \ge 0$ ومن ثم $\|\psi_k(x) - y_0\| \le \frac{1}{2}r$ ، أى أن هذا التكرار ممكن .

(د) أثبت أن كلا من الدوال ψ_k متصلة عند $\|x - x_0\| \le s$ وأن المتتابعة (ψ_k) تقاربية منتظمة لدالة منتظمة ψ بحيث أن

$$F(x, \psi(x)) = 0 \qquad \text{for all } \|x - x_0\| \le s$$

(هـ) لتوضيح أن ψ قابلة التفاضل عند $\|x = x_0\| < s$ استعمل تمرين ٣٩ - ث واستخدم استنتاجا مشابها للذى فى (د) ، (هـ) فى مشروع ٤١ - α لكل مركبة F .

الباب الثانى والأربعون — مسائل إضافية :

ناقشنا فى باب ٢٧ باختصار العملية المألوفة لتحديد نقط داخلية التى عندها تنال دالة حقيقية القيمة لمتغير واحد وقابلة للتفاضل نهايات عظمى أو صغرى نسبيا . لم يناقش دائما الاستفسار عن كون نقطة حرجة (أى ، نقطة تتلاشى عندها المشتقة) هى فعلا نقطة نهائية ، لكن يمكن غالبا دراسته باستخدام طريقة نظرية تايلور ٢٨ — ٦ . التحليل لنقط الرجوع (النهايات) التى تنتمى إلى حدى النطاق يؤدى غالبا إلى تطبيق لنظرية القيمة المتوسطة ٢٧ — ٦ .

فى حالة الدالة بنطاق فى R^p $(p>1)$ ومدى فى R ، يعتبر الموقف غالبا أكثر تعقيدا ، وتحتاج كل دالة إلى دراسة قائمة بذاتها . لكن ، توجد نظريات عامة قليلة ومفيدة ستقدم هنا .

نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ ونفرض أن $f:\Omega \to R$. يقال لنقطة $c \in \Omega$ إنها نقطة نهاية صغرى نسبية للدالة f إذا كانت توجد $\delta > 0$ بحيث أن $f(c) \leq f(x)$ لكل $x \in \Omega$ عند $\|x-c\| < \delta$ يقال لنقطة $c \in \Omega$ إنها نقطة نهاية صغرى دقيقة نسبية للدالة f إذا كان يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $f(c) < f(x)$ لكل $x \in \Omega$ عند $0 < \|x-c\| < \delta$ بالمثل نعرف نقطة نهاية عظمى (دقيقة) نسبية للدالة f . بالإضافة إلى ذلك ، إذا كانت $c \in \Omega$ هى نقطة نهاية صغرى (دقيقة) نسبية أو نهاية عظمى (دقيقة) نسبية للدالة f ، نقول إن c هى نقطة نهائية (دقيقة) نسبية للدالة f ، أو إن f لها نهاية (دقيقة) نسبية عند النقطة c .

النتيجة الآتية مفيدة جدا فى حالات كثيرة .

٤٢ — ١ نظرية . نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ ونفرض أن $f:\Omega \to R$ إذا كانت نقطة داخلية c من Ω هى نقطة نهاية نسبية للدالة f ، وإذا كانت المشتقة الجزئية $D_u f(c)$ للدالة f بالنسبة إلى متجه $u \in R^p$ موجودة ، حينئذ $D_u f(c) = 0$.

البرهان . من الفرض تقييد الدالة f إلى تقاطع Ω مع الخط المستقيم $\{c+tu : t \in R\}$ له نهاية نسبية عند c . لذلك ينتج من نظرية ٢٧ — ٤ أن $D_u f(c) = 0$

وهو المطلوب إثباته

٤٢ — ٢ نتيجة . نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ ، ونفرض $f:\Omega \to R$. إذا كانت نقطة داخلية c من Ω نقطة نهاية نسبية من الدالة f ، وإذا كانت المشتقة $Df(c)$ موجودة ، فإن $Df(c) = 0$

البرهان . ينتج من نتيجة ٣٩ — ٧ أن كلا من المشتقات الجزئية $D_j f(c),\ j=1,\ldots,p$ موجودة وأنه إذا كانت $u=(u_1,\ldots,u_p) \in R^p$ ، فإن

$$Df(c)(u) = \sum_{j=1}^{p} u_j D_j f(c)$$

من النظرية السابقة يكون $D_jf(c) = 0$ عند $j = 1, \ldots, p$ ، ومنها $Df(c)(u) = 0$ لكل $u \in R^p$. وهو المطلوب اثباته

ينتج أنه إذا كانت $\Omega \subseteq R^p$ ، وإذا كانت $f: \Omega \to R$ لها نقطة نهاية نسبية عند $c \in \Omega$ وإذا كانت $Df(c)$ موجودة ، حينئذ

$$D_1f(c) = 0, \ldots, D_pf(c) = 0 \qquad (42.1)$$

تسمى نقطة داخلية c التي عندها $Df(c) = 0$ نقطة حرجة للدالة f . نستنتج أنه إذا كانت Ω فئة مفتوحة في R^p التي فيها تكون f قابلة للتفاضل ، حينئذ تحتوى فئة النقطة الحرجة للدالة f على كل نقطة النهاية النسبية للدالة f . من الطبيعي ربما تحتوى هذه الفئة للنقط الحرجة أيضاً نقطا عندها لا يكون للدالة f نقط نهاية نسبية .

(وبالإضافة إلى ذلك ، ربما يكون للدالة f نقط نهاية نسبية عند نقط داخلية c من Ω عندها لا تكون المشتقة $Df(c)$ موجودة أو ربما يكون للدالة f نقطة نهاية نسبية عند نقطة $c \in \Omega$ والتي ليست نقطة داخلية للفئة Ω في أي حالة ، سوف لا تكون النقطة c نقطة حرجة للدالة f) .

٤٢ - ٣ أمثلة . (أ) نفرض أن $f_1(x) = x^3$ عند $x \in [-1, 1]$. حينئذ $Df_1(0) = 0$ ، لكن ، f_1 ليس لها نقطة نهاية عند $x = 0$. ومن زاوية أخرى ، الدالة f_1 لها نقطة نهاية دقيقة عند النقطتين ± 1 .(اللتين ليستا نقطتين داخليتين من النطاق وليستا نقطتين حرجتين) .

(ب) نفرض أن $f_2(x) = |x|$ عند $x \in [-1, 1]$. حينئذ $Df_2(0)$ غير موجودة، لكن ، f_2 لها نهاية صغرى دقيقة نسبية عند النقطه الداخلية 0 . ومن زاوية أخرى ، f_2 لها نقطة نهاية نسبية عند النقطتين ± 1 .

(ج) نفرض أن $f_3: R^2 \to R$ معرفة بأنها $f_3(x, y) = xy$. حينئذ $Df_3(0, 0) = 0$ أي أن نقطة الأصل $(0, 0)$ نقطة حرجة للدالة f_3 ، لكن ، ليست نقطة نهاية للدالة f_3 لأن :

$$f_3(0, 0) < f_3(x, y) \quad \text{for } xy > 0$$
$$f_3(0, 0) > f_3(x, y) \quad \text{for } xy < 0$$

نقول أن نقطة الأصل $(0, 0)$ هي نقطة ركوب (نقطة بردعة) للدالة f_3 بمعنى أن كل جوار $(0, 0)$ يحتوى نقطا عندها f_3 أكبر بدقة من $f_3(0, 0)$ وأيضاً يحتوى نقطا عندها f_3 أقل بدقة من $f_3(0, 0)$.

(د) نفرض أن $f_4: R^2 \to R$ معرفة بأنها $f_4(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. أثبت أن $Df_4(0, 0) = 0$ وأن تقييد f_4 إلى كل خط مار بالنقطة $(0, 0)$ له نهاية صغرى نسبية عند نقط الأصل . لكن ، أثبت أنه في كل جوار $(0, 0)$ توجد نقط عندها f_4 موجبة بدقة ونقط أيضاً عندها f_4 سالبة بدقة .

اختبار المشتقة الثانية :

نظراً إلى الأمثلة السابقة ، يكون من المناسب وجود شروط تكون ضرورية (أو كافية) لضمان أن نقطة حرجة هى نقطة نهاية أو أنها نقطة ركوب (بردعة) . نعطى النتائج الآتية شروطا بدلالة المشتقة الثانية للدالة f التى قدمناها عند نهاية باب ٤٠ .

٤٢ – ٤ نظرية . نفرض أن $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^p$ مفتوحة ونفرض أن $f: \Omega \to \boldsymbol{R}$ لها مشتقات جزئية ثانية متصلة فى Ω . إذا كانت $c \in \Omega$ هى نقطة نهاية صغرى نسبية (على الترتيب ، نهاية عظمى) للدالة f ، حينئذ

$$D^2f(c)(w)^2 = \sum_{i,j=1}^{p} D_{ij}f(c)w_iw_j \geq 0 \tag{42.2}$$

[على الترتيب ، $[D^2f(c)(w)^2 \leq 0]$ لكل $w \in \boldsymbol{R}^p$.

البرهان . نفرض أن $w \in \boldsymbol{R}^p, \|w\| = 1$. إذا كانت c هى نقطة نهاية صغرى نسبية ، فتوجد $\delta > 0$ بحيث أنه إذا كانت $|t| < \delta$ حينئذ $f(c+tw) - f(c) \geq 0$. بما أن Ω مفتوحة ، فيوجد $\delta_1 > 0$ عند $\delta_1 \leq \delta$ بحيث أن $c + tw$ تنتمى إلى Ω عند $0 \leq t \leq \delta_1$ من نظرية تايلور ٤٠ – ٩ توجد t_1 حيث $0 \leq t_1 \leq t \leq \delta_1$ بحيث أنه إذا كانت $c_t = c + t_1w$ ، فإن

$$f(c+tw) = f(c) + Df(c)(tw) + \tfrac{1}{2}D^2f(c_t)(tw)^2$$

بما أن c هى نقطة نهاية صغرى نسبية وينتج من نتيجة ٤٢ – ٢ أن $Df(c) = 0$ ؛ حينئذ نجد أن

$$\tfrac{1}{2}D^2f(c_t)(tw)^2 \geq 0$$

عند $0 \leq t \leq \delta_1$. ينتج أن $D^2f(c_t)(w)^2 \geq 0$. بما أن $\|c_t - c\| = |t_1| \leq |t|$ فينتج أن $c_t \to c$ عند $t \to 0$. بما أن المشتقات الجزئية الثانية للدالة f متصلة ، إذن $D^2f(c)(w)^2 \geq 0$ لكل $w \in \boldsymbol{R}^p$ حيث $\|w\| = 1$ ، التى منها تنتج النتيجة .

وهو المطلوب إثباته

النتيجة الآتية هى نتيجة عكسية جزئيا لنظرية ٤٢ – ٤ . لكن ، لاحظ أن فرضها أقوى قليلا من الاستنتاج ٤٢ – ٤ .

٤٢ – ٥ نظرية . نفرض أن $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^p$ مفتوحة ، ونفرض أن $f: \Omega \to \boldsymbol{R}$ لها مشتقات جزئية ثانية متصلة فى Ω ، ونفرض أن $c \in \Omega$ هى نقطة حرجة للدالة f .

(أ) إذا كانت $D^2f(c)(w)^2 > 0$ لكل $w \neq 0$ و $w \in \boldsymbol{R}^p$ ، حينئذ f لها نهاية صغرى دقيقة نسبية عند c .

(ب) إذا كانت $D^2 f(c)(w)^2 < 0$ لكل $w \in \mathbf{R}^p,\ w \neq 0$ ، حينئذ f لها نهاية عظمى دقيقة نسبية عند c .

(ج) إذا كانت $D^2 f(c)(w)^2$ تأخذ كلا من قيم موجبة دقيقة وقيم سالبة دقيقة عند $w \in \mathbf{R}^p$ ، حينئذ f لها نقطة ركوب (بردعة) عند c .

البرهان . (أ) من الفرض نجد أن $D^2 f(c)(w)^2 > 0$ عند w فى الفئة المدمجة $\{w \in \mathbf{R}^p : \|w\| = 1\}$. بما أن الراسم $w \to D^2 f(c)(w)^2$ متصلة فتوجد $m > 0$ بحيث أن

$$D^2 f(c)(w)^2 \geq m \text{ for } \|w\| = 1$$

بما أن المشتقات الجزئية الثانية للدالة f متصلة فى Ω ، فتوجد $\delta > 0$ بحيث أنه إذا كانت $\| x - c \| < \delta$ فإن

$$D^2 f(x)(w)^2 \geq \tfrac{1}{2} m \quad \text{for } \|w\| = 1$$

حسب نظرية تايلور ٤٠ – ٩ ، إذا كانت $0 \leq t \leq 1$ فإنه توجد نقطة c_t فى قطعة الخط الواصل بين c و $c + tw$ بحيث أن

$$f(c + tw) = f(c) + Df(c)(tw) + \tfrac{1}{2} D^2 f(c_t)(tw)^2$$

بما أن c نقطة حرجة فينتج أنه إذا كانت $0 < t < \delta$ و $\| w \| = 1$ ، فإن

$$f(c + tw) - f(c) = \tfrac{1}{2} t^2 D^2 f(c_t)(w)^2 \geq \tfrac{1}{4} m t^2 > 0$$

أى أن $f(c + u) > f(c)$ عند $0 < \|u - c\| < \delta$ ، وإذن f لها نهاية صغرى دقيقة نسبية عند c . أى أننا قد برهنا الجزء (أ) وبرهان الجزء (ب) يكون بالمثل .

(ج) نفرض أن $w_+,\ w_-$ متجهى وحدة فى $\mathbf{R}^p$ بحيث أن

$$D^2 f(c)(w_+)^2 > 0, \qquad D^2 f(c)(w_-)^2 < 0$$

إذن ينتج من نظرية تايلور أنه عندما تكون $t > 0$ صغيرة بكفاية نجد أن

$$f(c + tw_+) > f(c), \qquad f(c + tw_-) < f(c)$$

أى أن c نقطة ركوب (بردعة) للدالة f . وهو المطلوب إثباته

تقودنا مقارنة نظريتى ٤٢ – ٤ ، ٤٢ – ٥ ، إلى أجزاء التخمينات الآتية :

(i) إذا كانت $c \in \Omega$ نقطة نهاية صغرى دقيقة نسبية ، حينئذ $D^2 f(c)(w)^2 > 0$ لكل $w \in \mathbf{R}^p,\ w \neq 0$ ،

(ii) إذا كانت $c \in \Omega$ نقطة ركوب للدالة f ، حينئذ $D^2 f(c)(w)^2$ تأخذ كلا من قيم موجبة دقيقة وقيما سالبة دقيقة ،

(iii) إذا كانت $D^2 f(c)(w)^2 \geq 0$ لكل $w \in R^p$ فإن c نقطة نهاية صغرى نسبية . جميع هذه التخمينات باطلة ، ويمكن ملاحظة ذلك بأمثلة .

لإكمال نظرية ٤٢ — ٥ نجد من الضروري معرفة ما إذا كان للدالة $w \to D^2 f(c)(w)^2$ علامة واحدة . يمكن استخدام نتيجة هامة ومعروفة جدا فى الجبر (أنظر كتاب هوفان وكونتس المدون فى المراجع) . لتحديد هذا . لكل $j = 1, 2, \ldots, p$ ، نفرض أن Δ_j هى المحدد للمصفوفة (المتماثلة) .

$$\begin{bmatrix} D_{12}f(c) & \cdots & D_{1j}f(c) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ D_{j1}f(c) & \cdots & D_{jj}f(c) \end{bmatrix}$$

إذا كانت الأعداد $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$ كلها موجبة بدقة ، حينئذ $D^2 f(c)(w)^2 > 0$ لكل $w \neq 0$ وأن f لها نهاية صغرى بدقة نسبية عند c . إذا كانت الأعداد $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$ على التعاقب سالبة وموجبة بدقة ، فإن $D^2 f(c)(w)^2 < 0$ لكل $w \neq 0$ وأن f لها نهاية عظمى نسبية دقيقة عند c . فى الحالات الأخرى يمكن وجود نقط نهاية ونقط ركوب .

تكون صيغة أقل تعقيدا فى الحالة الخاصة الهامة التى فيها $p = 2$ أكثر ملاءمة وجزء أكبر من المعلومات يمكن اشتقاقه نحتاج هنا لدراسة دالة الدرجة الثانية .

$$Q = Au^2 + 2Buv + Cv^2$$

إذا كانت $\Delta = AC - B^2 > 0$ ، حينئذ $A \neq 0$ (وأن $C \neq 0$) ويمكن تكلة المربع ونكتب

$$Q = \frac{1}{A}[(Au + Bv)^2 + (AC - B^2)v^2]$$

وإذن علامة Q هى نفسها علامة A (أو C) . ومن ناحية أخرى ، إذا كانت $\Delta < 0$ ، فإن Q تأخذ كلا من قيم موجبة بدقة وقيم سالبة بدقة . يتضح هذا من المعادلة السابقة إذا كانت $A \neq 0$ والتى أثبتناها حالا عندما $A = 0$.

نجمع هذه الملاحظات فى نص أساسى .

٤٢ — ٦ نتيجة . نفرض أن $\Omega \subseteq R^2$ مفتوحة ، ونفرض أن $f: \Omega \to R$ لها مشتقات جزئية ثابتة فى Ω ، نفرض أن $c \in \Omega$ نقطة حرجة للدالة f ، ونفرض أن

$$\Delta = D_{11}f(c)D_{22}f(c) - [D_{12}f(c)]^2 \tag{42.3}$$

(أ) إذا كانت $\Delta > 0$ وإذا كانت $D_{11} f(c) > 0$ فإن للدالة f نهاية صغرى دقيقة نسبية عند النقطة c .

(ب) إذا كانت $\Delta > 0$ وإذا كانت $D_{11} f(c) < 0$ فإن للدالة f نهاية عظمى دقيقة نسبية عند النقطة c .

(ج) إذا كانت $\Delta < 0$ ، فإن للدالة f نقطة ركوب عند النقطة c .

بعض المعلومات الخاصة بالحالة التى فيها $\Delta = 0$ ستعطى فى التمارين .

مسائل نهايات بقيود :

قد ناقشنا للآن الحالة التى فيها تنتمى نهاية الدالة $f : \Omega \to R$ داخل نطاقها $\Omega \subseteq R^p$. لم نستخدم إحدى ملاحظاتنا لتحديد نقط النهاية عند الطرفين . لكن ، إذا كانت الدالة معرفة عند طرفى Ω وإذا كان هذان الطرفان يمكن تمثيلهما بارامتريا بدالة φ ، حينئذ تستنتج مسألة نقط النهاية بفحص نقطةالنهايات التركيب $f \circ \varphi$.

توجد مسألة متعلقة تقود إلى طريقة لطيفة ومشوقة نفرض أن S هو « سطح » محتوى فى النطاق Ω لدالة حقيقية القيمة f . يكون المطلوب غالبا هو إيجاد قيم الدالة f التى تكون نهاية عظمى أو صغرى من بين جميع القيم التى تنالها على S . مثال ذلك ، إذا كانت $\Omega = R^p$ وكانت $f(x) = \|x\|$ ، فإن المسألة التى وضعناها تكون مختصة بإيجاد النقط على السطح S التى تكون أقرب ما يمكن ، أو أبعد ما يمكن ، من نقطة الأصل . إذا كان السطح S معطى بصورة بارامترية ، فإنه يمكننا معاملة هذه المسألة باعتبار تركيب الدالة f بالتمثيل البارامترى للسطح S . لكن ، ليس من المناسب غالبا التعبير عن S بهذه الطريقة . ونرغب بدرجة أكثر فى طريقة أخرى .

نفرض أن S يمكن إعطاؤها كنقط x فى Ω بحيث تحقق علاقة على الصورة

$$g(x) = 0$$

لدالة g معرفة فى Ω إلى R . سنحاول إيجاد قيم النهاية النسبية للدالة f لهذه النقط x فى Ω التى تحقق القيد (أو الشرط الجانبى) $g(x) = 0$. إذا فرضنا أن g و f موجودين فى صنف $C^1(\Omega)$ وأن $Dg(c) \neq 0$ ، فإن شرطا ضروريا لأن c نقطة نهاية للدالة f بالنسبة إلى النقط x التى تحقق $g(x) = 0$ ، هو أن المشتقة $Dg(c)$ تكون مضاعفا للمشتقة $Df(c)$ وباستعمال المشتقات الجزئية ، يكون هذا الشرط هو وجود عدد حقيقى λ بحيث أن

$$\begin{aligned} D_1 f(c) &= \lambda D_1 g(c) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ D_p f(c) &= \lambda D_p g(c) \end{aligned} \qquad (42.4)$$

وعمليا نرغب فى تحديد الإحداثيات p للنقطة c التى تحقق هذا الشرط الضرورى لكن ، العدد الحقيقى λ ، الذى يسمى عادة بمضروب لاجرانج ، ليس معروفا كذلك . تحل المعادلات p المعطاة فى أعلى ، سويا مع المعادلة .

$$g(c) - 0$$

حينئذ للكميات المجهولة $p+1$ ، ومنها تكون إحداثيات النقطة c ذات فائدة .

٤٢ – ٧ نظرية لاجرانج . نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ مفتوحة ونفرض أن g و f دوال لقيم موجبة فى صنف $C^1(\Omega)$. نفرض أن $c \in \Omega$ بحيث أن $g(c) = 0$ وأنه يوجد جوار U من C بحيث أن

$$f(x) \leq f(c) \quad \text{أو} \quad f(x) \geq f(c)$$

لكل نقط $x \in U$ التى تحقق $g(x) = 0$. حينئذ يوجد عددان حقيقيان λ و μ وأن كلا منهما لا يساوى صفرا ، بحيث أن

$$\mu Df(c) = \lambda Dg(c) \tag{42.5}$$

وبالإضافة إلى ذلك ، إذا كانت $Dg(c) \neq 0$ ، فيمكننا أخذ $\mu = 1$.

البرهان . نفرض أن $F: U \to R^2$ معرفة بأنها

$$F(x) = (f(x), g(x)) \quad \text{for} \quad x \in U$$

وإذن F تنتمى إلى صنف $C^1(U)$ وأن

$$DF(x)(v) = (Df(x)(v), Dg(x)(v)), \qquad x \in U,\ v \in R^p$$

وبالإضافة إلى ذلك ، تحقق نقطة $x \in U$ القيد $g(x) = 0$ إذا وإذا فقط كانت $F(x) = (f(x), 0)$.

إذا كانت $f(x) \leq f(c)$ لكل $x \in U$ التى تحقق $g(x) = 0$ ، حينئذ تكون النقط $(r, 0)$ حيث $f(c) < r$ ليست فى الصورة $F(U)$ ، ومن ثم $DF(c)$ ليست تناظرا أحاديا للفراغ R^p إلى R^2 فوقيا . لكن بما أن المدى للراسم الخطى $DF(c)$ هو فراغ جزئى من R^2 ولا ينطبق على R^2 ، فإن مدى $DF(c)$ يكون محتويا فى خط ما فى R^2 يمر بالنقطة $(0, 0)$. لذلك ، توجد نقطة $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ بحيث أن مدى $DF(c)$ يكون محتويا فى الخط المار بالنقطتين $(0, 0)$ ، (λ, μ) . وإذن نحصل على

$$\mu Df(c)(v) = \lambda Dg(c)(v) \text{ for all } v \in R^p, v \in R^p \tag{42.6}$$

ومن ثم تنتج معادلة (٤٢ – ٥) .

أخيرا ، نفرض أن $Dg(c) \neq 0$. إذا كانت $\mu = 0$ ، حينئذ المعادلة (٤٢ – ٥)

تدل على أن $\lambda = 0$ ، مما يخالف حقيقة كون أن $(\mu, \lambda) \neq (0, 0)$. لذلك يجب فى هذه الحالة أن تكون $\mu \neq 0$ ويمكن القسمة على μ وإبدال λ/μ بالمقدار λ . وهو المطلوب إثباته

بما أن $U \subseteq R^p$ ، فإن معادلة (٤٢ - ٦) حيث $v = e_1, \ldots, e_p$ تنتج المجموعة لمعادلات p :

$$\mu D_1 f(c) = \lambda D_1 g(c)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mu D_p f(c) = \lambda D_p g(c)$$

إذا لم تتلاشى جميع $D_i g(c),\ i = 1, \ldots, p$ ، فيمكننا أخذ $\mu = 1$ للحصول على المجموعة (٤٢ - ٤) .

يجب أن نؤكد أن نظرية لاجرانج تنتج شرطا ضروريا فقط ، وأن النقط التى نحصل عليها بحل المعادلات (التى غالبا يكون إجراؤها صعبا) ربما تكون نهاية عظمى نسبية ، نهاية صغرى نسبية ، أو ليست أى منهما . لكن ، نستعمل نتيجة ٤٢ - ١٣ الآتية غالباً لاختبار النهاية العظمى أو الصغرى النسبية . بالإضافة إلى ذلك ، يكون فى تطبيقات تحديد ما إذا النقط هى فى الحقيقة نقط نهاية يمكن تأسيسه على اعتبارات هندسية أو فيزيائية .

٤٢ - ٨ أمثلة . (أ) لرغب فى إيجاد نقطة فى المستوى $\{(x, y, z) : 2x + 3y - z = 5\}$ فى الفراغ R^3 التى تكون أقرب ما يمكن إلى نقطة الأصل . لحل هذه المسألة ، سوف نجعل الدالة التى تعطى مربع المسافة إلى نقطة الأصل فى نهاية صغرى .

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

تحت القيد :

$$g(x, y, z) = 2x + 3y - z - 5 = 0$$

بما أن $Dg(c) \neq 0$ لكل $U \subseteq R^p$ ، فإن نظرية لاجرانج تقودنا على المجموعة

$$\begin{aligned} 2x &= 2\lambda, \\ 2y &= 3\lambda, \\ 2z &= -\lambda, \\ 2x + 3y - 2 - 5 &= 0 \end{aligned}$$

حينئذ ، عند حذف x, y, z ، نحصل على

$$2\lambda + 3(\tfrac{3}{2}\lambda) - (\ \tfrac{1}{2}\lambda) - 5 = 0$$

أو $14\lambda = 4\lambda + 9\lambda + \lambda = 10$ ومنها $\lambda = 5/7$. ونحصل على النقطة الوحيدة $(5/7, 15/14, -5/14)$. من اعتبارات هندسية نستنتج أن هذه هى النقطة فى المستوى التى تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة $(0, 0, 0)$.

(ب) أوجد أبعاد صندوق على شكل متوازى مستطيلات ، مفتوح من أعلى الذى حجمه أكبر ما يمكن إذا كانت مساحة سطحه هى A . نفرض أن x, y, z هى أبعاد الصندوق ، حيث z الارتفاع .

إذن نرغب فى جعل الدالة

$$V(x, y, z) = xyz$$

فى نهاية عظمى تحت شرط القيد

$$g(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz - A = 0$$

بما أن النقطة المطلوبة إحداثيات موجبة بدقة ، فتقودنا نظرية لاجرانج إلى المجموعة

$$\begin{aligned} yz &= \lambda(y + 2z), \\ xz &= \lambda(x + 2z), \\ xy &= \lambda(2x + 2y), \\ xy + 2xz + 2yz - A &= 0 \end{aligned}$$

إذا ضربنا المعادلات الثلاث الأولى فى x, y, z على الترتيب ، ثم ساوينا وقسمنا على λ (لماذا تكون $\lambda \neq 0$ ؟) ، نصل إلى

$$xy + 2xz = xy + 2yz = 2xz + 2yz$$

تدل المتساوية الأولى على أن $x = y$ ، وتعطى الثانية $y = 2z$. حينئذ تكون نسبة الاضلاع $1 : 2 : 2$ وينتج من المعادلة الأخيرة أن $4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = A$ تعطى $z = \frac{1}{2}(A/3)^{1/2}$. لذلك يكون حجم هذا الصندوق هو $\frac{1}{2}(A/3)^{3/2}$.

يوجد غالبا أكثر من قيد واحد ، فى هذه الحالة نجد أن النتيجة الآتية مفيدة .

٤٢ – ٩ نظرية . نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ مفتوحة ونفرض أن $g_1, \ldots, g_k$ و f هى دوال حقيقية القيمة فى $C^1(\Omega)$. نفرض أن $c \in \Omega$ تحقق القيود

$$g_1(x) = 0, \ldots, g_k(x) = 0$$

وأنه يوجد جوار مفتوح U بحيث أن $f(x) \leq f(c)$ [أو $f(x) \geq f(c)$] لجميع $x \in U$ التى تحقق هذه القيود . حينئذ توجد أعداد حقيقية $\mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ليست كلها أصفارا بحيث أن

$$\mu Df(c) = \lambda_1 Dg_1(c) + \cdots + \lambda Dg_k(c) \tag{42.7}$$

البرهان . نفرض $F : U \to R^{k+1}$ معرفة بأنها

$$F(x) = (f(x), g_1(x), \ldots, g_k(x)) \text{ for } x \in U$$

وبرهن كما فى برهان نظرية (٤٢ – ٧). وهو المطلوب إثباته

٤٢ – ١٠ نتيجة . بالاضافة إلى فرض نظرية (٤٢ – ٩) ، نفرض أن الرتبة للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} D_1g_1(c) & \cdots & D_1g_k(c) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ D_pg_1(c) & \cdots & D_pg_k(c) \end{bmatrix} \qquad (42.8)$$

تساوى $k(\leq p)$. حينئذ توجد أعداد حقيقية $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ليست جميعاً أصفاراً بحيث أن

$$\begin{aligned} D_1f(c) &= \lambda_1 D_1g_1(c) + \cdots + \lambda_k D_1g_k(c) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_pf(c) &= \lambda_1 D_pg_1(c) + \cdots + \lambda_k D_pg_k(c) \end{aligned} \qquad (42.9)$$

البرهان . إذا طبقنا القانون (٤٢ – ٧) على $e_1, \ldots, e_p \in \boldsymbol{R}^p$ ، نحصل على مجموعة من معادلات طرفها الأيمن هو الطرف الأيمن (٤٢ – ٩) وطرفها الأيسر هو الطرف الأيسر فى (٤٢ – ٩) مضروباً بالمقدار μ . إذا كانت $\mu = 0$ ، فإن الفرض بأن الرتبة مساوية k تدل على أن $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ ، مما يخالف الفرض . ومن ثم $\mu \neq 0$ ويمكننا أن نجعل هذه المجموعة طبيعية لحصول على (٤٢ – ٩) وهو المطلوب إثباته

٤٢ – ١١ مثال . أوجد النقط الموجودة فى تقاطع الاسطوانة $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4\}$ والمستوى $\{(x, y, z) : 6x + 3y + 2z = 6\}$ التى تكون أقرب ما يمكن إلى نقطة الأصل . والتى تكون أبعد مايمكن من نقطة الأصل .

سنبحث النقط النهائية النسبية للدالة

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

تحت القيود

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 - 4 = 0, \\ g_2(x, y, z) &= 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \end{aligned}$$

المصفوفة المناظرة إلى (٤٢ – ٨) فى هذه الحالة هى

$$\begin{bmatrix} 2x & 6 \\ 2y & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

ذات رتبة 2 ماعداً عند النقطة $(x, y) = (0, 0)$ التى لاتحقق القيود . حينئذ يمكننا استخدام النتيجة لحصول على المجموعة

$$2x = \lambda_1(2x) + \lambda_2(6),$$
$$2y = \lambda_1(2y) + \lambda_2(3),$$
$$2z = \lambda_2(2),$$
$$x^2 + y^2 = 4,$$
$$6x + 3y + 2z = 6$$

لخمس معادلات فى خمس متغيرات المعادلة الثالثة تعطى $z = \lambda_2$ ، لذلك يمكننا حذف λ_2 من المعادلتين الأوليين . لحذف λ_1 ، نضرب المعادلة الأولى الناتجة فى y والثانية فى x ونطرح ، لنحصل على

$$0 = 6yz - 3xz = 3z(2y - x)$$

ينتج أنه إما $z = 0$ أو $x = 2y$.

إذا كانت $z = 0$ ، فإن المعادلة الخامسة تعطى $2x + y = 2$. وعند ربطها بالمعادلة الرابعة نحصل على

$$x^2 + (2-2x)^2 = x^2 + 4 - 8x + 4x^2 = 4$$

وإذن $5x^2 - 8x = x(5x - 8) = 0$ ومن ثم $x = 0$ أو $x = 8/5$. تقودنا هذه الحالة إلى النقطتين $(0, 2, 0)$ و $(8/5, -6/5, 0)$ التى تكون كل منهما لها على مسافة 2 من نقطة الأصل .

ومن زاوية أخرى ، إذا كانت $x = 2y$ ، فإن المعادلة الرابعة تعطى $5y^2 = 4$ أى أن $y = 2/\sqrt{5}$ (فإن $x = 4/\sqrt{5}$) أو $y = -2/\sqrt{5}$ (وأن $x = -4/\sqrt{5}$). بالتعويض فىالمعادلة الخامسة نحصل على $z = 3(1+\sqrt{5})$ و $z = 3(1-\sqrt{5})$ ، على الترتيب . لذلك ، تقودنا هذه الحالة إلى النقطتين $(-4/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, 3(1+\sqrt{5}))$ و $(4/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 3(1-\sqrt{5}))$ ويلاحظ أن مربع المسافتين بين كل من هاتين النقطتين ونقطة الأصل هما $58 - 18\sqrt{5}$ و $58 + 18\sqrt{5}$ ، على الترتيب .

نستنتج أن كلتا النقطتين $(8/5, -6/5, 0)$ و $(0, 2, 0)$ تجعلان المسافة من نقطة الأصل وهذا التقاطع هى نهاية صغرى ، وأن النقطة $(-4/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, 3(1+\sqrt{5}))$ تجعل هذه المسافة فى نهاية عظمى . من اعتبارات هندسية نلاحظ أيضاً أن النقطة $(4/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 3(1-\sqrt{5}))$ تعطى نهاية عظمى نسبية بين نقط هذا التقاطع . (ينبغى على القارىء أن يرسم شكلا ليساعده لرؤية هذاالموقف) .

قيود متباينة :

فى السنوات الحديثة ، ازدادت مسائل النقط النهائية التى تحتوى قيودا هى متباينات أكثر من متساويات أهمية . أى ربما نرغب فى إيجاد نقط نهائية نسبية لدالة $f : \Omega \to \boldsymbol{R}$ كل نقط $\Omega \subset \boldsymbol{R}^p$ التى تحقق القيود

$$h_1(x) \geq 0, \ldots, h_k(x) \geq 0$$

سنرى أن مثل هذه المسائل يمكن أيضاً معاملتها بطريقة لاجرانج .

ربما تحتوى مسألة نقطة نهائية أحيانا كلا من متساويات ومتباينات ، لكن بما أن المتساوية $g(x) = 0$ تكافئ المتباينة $(g(x))^2 \geq 0$— ، فإن مثل هذه المسائل يمكن دائما اختزالها إلى مسألة تحتوى فقط على قيود متباينة .

٤٢ – ١٢ نظرية . نفرض أن $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^p$ مفتوحة ونفرض أن الدالة f والدوال $h_1, \ldots, h_k$ دوال حقيقية القيمة فى $C^1(\Omega)$. نفرض أن $c \in \Omega$ تحقق القيود المتباينة .

$$h_1(x) \geq 0, \ldots, h_k(x) \geq 0$$

ونفرض أنه يوجد جوار مفتوح U من c بحيث أن $f(x) \leq f(c)$ [أو $f(x) \geq f(c)$] لجميع $x \in U$ التى تحقق هذه القيود . حينئذ توجد أعداد حقيقية $\mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ليست كلها أصفارا بحيث أن

$$\mu Df(c) = \lambda_1 Dh_1(c) + \cdots + \lambda_k Dh_k(c) \tag{42.10}$$

وأبعد من ذلك ، إذا كانت $h_j(c) > 0$ لبعض j ، فإن $\lambda_j = 0$.

البرهان . نفرض أن $F : U \to \boldsymbol{R}^{k+1}$ معرفة بأنها

$$F(x) = (f(x), h_1(x), \ldots, h_k(x)) \quad \text{for } x \in U$$

إذا كانت c نقطة فى U حيثد تتحقق القيود وحيث تكون f إما فى نهاية عظمى أو فى نهاية صغرى ، حينئذ لايمكن أن تكون $DF(c)$ راسيا فوقيا ولذلك نجد أن تظل (٤٢ –١٠) صحيحة .

إذا كانت $h_1(c) = 0, \ldots, h_r(c) = 0$ لكن $h_{r+1}(c) > 0, \ldots, h_k(c) > 0$ حينئذ نفرض أن $U_1 \subseteq U$ هو جوار مفتوح للنقطة c الذى فيه تكون $h_{r+1}, \ldots, h_k$ موجبة بدقة واستخدم النظرية للقيود $h_1(x) \geq 0, \ldots, h_r(x) \geq 0$.

وهو المطلوب إثباته

٤٢ – ١٣ نتيجة . بالإضافة إلى فروض نظرية ٤٢ – ١٢ ، نفرض أن رتبة المصفوفة المناظرة إلى h_j حيث $h_j(c) = 0$ مساوية إلى r . حينئذ يمكننا أخذ $\mu = 1$ فى

$$\begin{bmatrix} D_1h_1(c) & \cdots & D_1h_r(c) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ D_ph_1(c) & \cdots & D_ph_r(c) \end{bmatrix} \tag{42.11}$$

(٤٢ – ١٠) وبالإضافة إلى ذلك ، إذا كانت $f(x) \leq f(c)$ على الترتيب ، $[f(x) \geq f(c)]$ لكل $x \in U$ التى تحقق القيود وإذا أخذنا $\mu = 1$ فى (٤٢ – ١٠) فإن $\lambda_i \leq 0$ على الترتيب ، $[\lambda_i \geq 0]$ عند $i = 1, \ldots, r$.

البرهان . البرهان الذى يمكننا أخذ $\mu = 1$ فى (٤٢ – ١٠) مماثل للبرهان فى نتيجة ٤٢ – ١٠ . نفرض ، إذن ، أن $\mu = 1$ وأن $f(x) \leq f(c)$ لكل $x \in U$ التى تحقق القيود . بما أن الرتبة للمصفوفة (٤٢ – ١١) هى $r \leq k$ ، حينئذ إذا كانت $1 \leq j \leq r$ فإنه يوجد متجه $v_j \in R^p$ بحيث أن

$$Dh_i(c)(v_j) = \delta_{ij}$$

وإذن ، إذا كانت $t > 0$ صغيرة بكفاية ، فإنه توجد نقطة c_t على قطعة الخط المستقيم الواصلة بين c و $c + tv_j$ بحيث أن

$$0 \geq f(c + tv_j) - f(c) = Df(c_t)(tv_j) = tDf(c_t)(v_j)$$

ونتيجة لذلك نحصل على

$$0 \geq \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(c + tv_j) - f(c)}{t} = Df(c)(v_j) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i Dh_i(c)(v_j) = \lambda_j$$

وإذن $\lambda_j \leq 0$ عند $j = 1, \ldots, r$. وهو المطلوب إثباته

لحصول على برهان أولى ، لكن مختلف جدا لنظرية لاجرانج التى تحتوى قيودا متباينة ، أنظر مقالة أ.ج ماك شان(*) المدونة فى المراجع

تمرينــــــات :

٤٢ – (أ) أوجد النقط الحرجة للدوال الآتية وحدد الطبيعة لهذه النقط

(أ) $f(x, y) = x^2 + 4xy$

(ب) $f(x, y) = x^4 + 2y^4 + 32x - y + 17$

(ج) $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 12y^2 - 36y$

(د) $f(x, y) = x^4 - 4xy$

(هـ) $f(x, y) = x^2 + 4xy + 2y^2 - 2y$

(و) $f(x, y) = x^2 + 3y^4 - 4y^3 - 12y^2$

(*) أ.ج ماك شان (١٩٠٤ –) حصل على درجة الدكتوراه من شيكاغو . وارتبط لمدة طويلة بجامعة فيرجينيا ومعروف عالميا بمســـاهماته فى نظرية التكامل وتفاضـــل وتكامل المتغيرات ، نظرية التحكم الامثل والتفنيات والطروم والدقشومات الخارجية .

٤٢ — (ب) نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ مفتوحة ، نفرض أن $f:\Omega \to R$ لها مشتقات جزئية ثانية متصلة فى Ω ، ونفرض أن $c \in \Omega$ نقطة حرجة للدالة f ، ونفرض كذلك أن $\delta > 0$.

(أ) أثبت أنه إذا كانت $D^2 f(x)(w)^2 \geq 0$ لكل $0 < \| x - c \| < \delta$ وأن $w \in R^p$ ، فإن c هى نقطة نهاية صغرى نسبية للدالة f .

(ب) أثبت أنه إذا كانت $D^2 f(x)(w)^2 > 0$ لكل $0 < \| x - c \| < \delta$ و $w \in R^p, w \neq 0$ ، فإن c هى نقطة نهاية صغرى دقيقة نسبية للدالة f .

٤٢ — (ج) نفرض أن $\Omega \subseteq R^2$ مفتوحة ، ونفرض أن $f:\Omega \to R$ لها مشتقات جزئية ثانية متصلة فى Ω ، ونفرض أن $c \in \Omega$ هى نقطة حرجة للدالة f ، ونفرض كذلك

$$\Delta(x) = D_{11}f(x)D_{22}f(x) - (D_{12}f(x))^2$$

عند $x \in \Omega$. نفرض أنه عند قيمة ما $\delta < 0$ ، فإن $\Delta(x) \geq 0$ لكل $\| x - c \| < \delta$.

(أ) إذا كانت $D_{11} f(x) > 0$ (أو إذا كانت $D_{22} f(x) > 0$) لكل x بحيث أن $0 < \| x - c \| < \delta$ ، وضح أن c هى نقطة نهاية صغرى نسبية للدالة f .

(ب) إذا كانت $D_{11} f(x) < 0$ (أو إذا كانت $D_{22} f(x) < 0$) لكل x بحيث أن $0 < \| x - c \| < \delta$ ، وضح أن c هى نقطة نهاية عظمى نسبية للدالة f .

٤٢ — (د) نفرض أن $f: R^p \to R$ قابلة للتفاضل فى R^p وأن $f(x) = 0$ لكل $x \in R^p$ حيث $\| x \| = 1$. وضح أنه توجد نقطة $c \in R^p$ عند $\| c \| < 1$ بحيث أن $Df(c) = 0$. (هذه هى ترجمة نظرية رول R^p) .

٤٢ — (هـ) استخدم نظرية الراسم الفوقى (٤١ — ٦) لإثبات نتيجة (٤٢ — ٢) .

٤٢ — (و) وضح أن كلا من الدوال الآتية لها نقطة حرجة عند نقطة الأصل . أوجد تلك التى لها نقط نهاية نسبية والتى لها نقط ركوب عند نقطة الأصل .

(أ)	$f(x, y) = x^2 y^2$	(ب)	$f(x, y) = x^2 + y^3$
(ج)	$f(x, y) = x^3 - y^3$	(د)	$f(x, y) = x^4 - x^2 y^2 + y^4$
(هـ)	$f(x, y) = x^3 y - x y^3$	(ف)	$f(x, y) = x^4 + y^4$

٤٢ — (ز) أثبت أن الدالة $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 y^4$ لها نقطة حرجة لكن ليس لها نقط نهاية نسبية .

٤٢ — (ح) ادرس سلوك الدالة $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ فى جوار نقطة الأصل . يسمى الشكل لهذه الدالة أحيانا « بردعة القرد » لماذا ؟

٤٢ — (ط) أوجد أصغر مسافة من النقطة $(2, 1, -3)$ للمستوى $2x + y - 2z = 4$

٤٢ – (ى) أوجد الأبعاد لصندوق قائم ، مفتوح من أعلى ، بحجم معلوم بحيث تكون مساحة سطحه فى نهاية صغرى .

٤٢ – (ك) أوجد أصغر بعد بين الخطين $L_1 = \{(x, y, z) : x = 2 - t,$
$y = 3 + t,\ z = 1 - 2t\}$ و $L_2 = \{(x, y, z) : x = 1 - s,\ y = 2 - s,\ z = 3 + s\}$

٤٢ – (ل) اعط أمثلة لتوضح أن كل التخمينات المنصوصة بعد نظرية ٤٢ – ٥ باطلة .

٤٢ – (م) نفرض أنه لدينا n نقط $(x_j, y_j),\ j = 1, \ldots, n$ فى R^2 ونريد إيجاد الدالة المألوفة $F : R \to R$ المعطاة بأنها $F(x) = Ax + B$ بحيث تكون الكمية

$$\sum_{j=1}^{n} (F(x_j) - y_j)^2$$

فى نهاية صغرى . وضح أن هذا يؤدى إلى المعادلات

$$A \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + B \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$
$$A \sum_{j=1}^{n} x_j + nB = \sum_{j=1}^{n} y_j$$

للعددين B و A . [تسمى هذه الدالة F بالدالة المألوفة التى « هى أحسن توفيق للنقط n بمفهوم طريقة أقل المربعات »] .

٤٢ – (ن) نفرض أن $f : [0, 1] \to R$ متصلة فى $[0, 1]$. نرغب فى اختيار أعداد حقيقية A, B, C بطريقة تجعل الكمية

$$\int_0^1 [f(x) - (Ax^2 + Bx + C)]^2\, dx$$

أصغر ما يمكن ، وضح أننا يجب أن نختار A, B, C لتحقق المجموعة

$$\tfrac{1}{5}A + \tfrac{1}{4}B + \tfrac{1}{3}C = \int_0^1 x^2 f(x)\, dx$$

$$\tfrac{1}{4}A + \tfrac{1}{3}B + \tfrac{1}{2}C = \int_0^1 x f(x)\, dx$$

$$\tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{2}B + C = \int_0^1 f(x)\, dx$$

[يقال للدالة الناتجة $x \mapsto Ax^2 + Bx + C$ أنها دالة درجة ثانية التى هى أحسن توفيق للدالة f فى $[0, 1]$ بمفهوم طريقة « أقل المربعات »] .

٤٢ – (س) استخدم نظرية لاجرانج لتحديد النقط على المنحنى $y = x^5 + x - 2$ التى عندها ربما يكون للدالة $f(x, y) = x - y$ فقط نهاية نسبية . حينئذ ارسم رسما تخطيطيا

للمنحنى والمنحنيات المستوية للدالة f لإثبات أن النقطة (النقط) التي حددتها ليست نقطة (نقطا) لنقط نهاية نسبية للدالة f .

٤٢ – (ع) نفرض أن $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ دالة من الدرجة الثانية $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ عند $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. نرغب فى إيجاد النقطة النهائية النسبية للدالة f فى دائرة الوحدة $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. استخدم نظرية لاجرانج لتوضيح أن النقط (x_0, y_0) التى عندها تكون هذه النقط نقط نهاية نسبية يجب أن تحقق المجموعة

$$(a - \lambda)x_0 + by_0 = 0$$
$$bx_0 + (c - \lambda)y_0 = 0$$

حيث مضروب لاجرانج λ هو جذر المعادلة

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2) = 0$$

أثبت أن القيمة المناظرة للمضروب λ تساوى القيمة النهائية للدالة f عند مثل هذه النقط النهائية النسبية .

٤٢ – (ف) حاصل جمع ثلاثة أعداد حقيقية هو 9 . أوجد هذه الأعداد إذا كان حاصل ضربهم أكبر ما يمكن .

٤٢ – (ص) أثبت أن حجم أكبر صندوق الذى يمكن رسمه داخل الجسم الناقص

$$\left\{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}$$

(حيث a, b, c هى أعداد موجبة بدقة) يساوى $8\,abc/3\sqrt{3}$

٤٢ – (ق) أوجد قيمة النهاية العظمى والنهاية الصغرى لكل من الدوال الآتية فى الفئة المعطاة (عند التخصيص ، اعتبر إشارة المضروبات) .

(أ) $f(x, y) = x^4 - y^4, \quad S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$

(ب) $f(x, y) = x^2 + 2x + y^4, \quad S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$

(ج) $f(x, y) = x^2 + 2x + y^2, \quad S = \{(x, y), |x| \le 1, |y| \le 1\}$

(د) $f(x, y) = (1 - x^2)\sin y, \quad S = \{(x, y), |x| \le 1, |y| \le \pi\}$

٤٢ (ر) – نفرض أن f معرفة عند $x > 0,\ y > 0$ إلى $\mathbf{R}$ بأنها $f(x, y) = 1/x + cxy + 1/y$

(أ) عين مواقع النقط الحرجة للدالة f وحدد طبيعتها .

(ب) إذا كانت $c > 0$ ، نفرض $S = \{(x, y) : 0 < x,\ 0 < y,\ x + y \le c\}$ حدد قيم النهاية العظمى والصغرى النسبية للدالة f فى S .

٤٢ – (ش) أوجد القيم النهائية للدالة $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ تحت القيود $x + y + z = 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

٤٢ – (ت) نفرض أن f لها مشتقات جزئية ثانية متصلة فى فئة مفتوحة تحتوى على الكرة $\{x \in \boldsymbol{R}^p : \|x\| \leq r\}$ إلى $\boldsymbol{R}$ ، ونفرض أنه توجد c حيث $\| c \| < r$ بحيث إن

$$M = f(c) > \sup\{f(x) : \|x\| = r\} = m$$

نفرض أن g معرفة بأنها

$$g(x) = f(x) + \frac{M - m}{4r^2}\|x - c\|^2$$

أثبت أن $g(c) = M$ بينما $g(x) < M$ عند $\| x \| = r$. حينئذ g تصل إلى نهاية عظمى عند نقطة ما c_1 حيث $\| c_1 \| < r$ ، وحيث نحصل على

$$\sum_{j=1}^{p} D_{jj}f(c_1) \leq -\frac{p}{2r^2}(M - m) < 0$$

٤٢ – (ث) نفرض أن $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^p$ فئة مفتوحة محدودة ، نفرض أن $b(\Omega)$ هى الفئة لنقط حدودية من Ω (انظر تعريف ٩ – ٧) ، ونفرض أن $\Omega^- = \Omega \cup b(\Omega)$ هى إقفال Ω يقال لدالة $f : \Omega^- \to \boldsymbol{R}$ أنها توافقية فى Ω إذا كانت متصلة فى Ω^- وتحقق معادلة لابلاس

$$\sum_{j=1}^{p} D_{jj}f(x) = 0$$

لكل $x \in \Omega$

(أ) استخدم الاستنتاج فى التمرين السابق لتوضيح أن دالة توافقية فى Ω تنال أعلى قيمة وأدنى قيمة فى $b(\Omega)$.

(ب) إذا كانت g و f دالتين توافقيتين فى Ω وإذا كانت $f(x) = g(x)$ عند $x \in b(\Omega)$ ، حينئذ $f(x) = g(x)$ لكل $x \in \Omega^-$

(ج) إذا كانت g و f دالتين توافقيتين فى Ω وإذا كانت $f(x) = \varphi(x), g(x) = \psi(x)$ عند $x \in b(\Omega)$ حينئذ

$$\sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \Omega\} = \sup\{|\varphi(x) - \psi(x)| : x \in b(\Omega)\}$$

(هذا الاستنتاج يمكن نصه بقولنا إن « الحلول لمسألة ديرشلت للفراغ Ω تتوقف دائماً على البيانات الحدودية ») .

٤٢ – (خ) أثبت أن النهاية العظمى للدالة $f(x_1, \ldots, x_p) = (x_1 \cdots x_p)^2$ ، تحت القيود $x_1^2 + \cdots + x_p^2 = 1$ تساوى $1/p^p$. استخدم هذا لحصول على المتباينة :

$$|y_1 \cdots y_p| \leq \frac{\|y\|^p}{p^{p/2}} \quad \text{عند} \quad y \in \boldsymbol{R}^p$$

٤٢ – (ذ) أثبت أن المتوسط الهندسى لمجموعة أعداد حقيقية موجبة $\{a_1, \ldots, a_p\}$ لا يزيد عن متوسطها الحسابى ، أى

$$(a_1 \cdots a_p)^{1/p} \leq \frac{1}{p}(a_1 + \cdots + a_p)$$

٤٢ – (ض) (أ) نفرض أن $p>1,\ q>1,\ 1/p+1/q=1$ أثبت أن النهاية الصغرى للدالة $f(x, y) = (1/p)x^p + (1/q)y^q\ (x>0, y>0)$ تحت القيد $xy = 1$ تساوى الواحد الصحيح .

(ب) استخدم جزء (أ) لتوضيح أنه إذا كانت $a>0, b>0$ ، فإن

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

(ج) نفرض أن $\{a_i\}, \{b_i\},\ i=1, \ldots, n$ هى أعداد حقيقية موجبة . أثبت أن متباينة هولدر :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

بوضع $A = (\sum a_i^p)^{1/p},\ B = (\sum b_i^q)^{1/q}$ وتطبيق جزء (ج) على $a = a_i/A,\ b = b_i/B$

(د) استخدم متباينة هولدر فى (ج) لحصول على متباينة منكوفسكى

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^{1/p}\right)^{1/p}$$

(إرشاد : $|a+b|^p = |a+b|\,|a+b|^{p/q} \leq |a|\,|a+b|^{p/q} + |b|\,|a+b|^{p/q}$) .

تكامل فى R^p

سنقدم فى هذا الباب النظرية لتكامل دوال حقيقية القيمة فى الفراغ R^p حيث $p > 1$. الاقتراب المستخدم هنا هو نفسه الذى ابتدأنا به فى باب ٢٩ فى حالة $p = 1$ ، لكن سوف نهتم هنا فقط بتكامل ريمان (وليس تكامل ريمان – اشتلتجز) .

سيلاحظ فى باب ٤٣ أنه ، لدوال محدودة معرفة فى خلية مغلقة فى R^p ، فإن النظرية لا تتطلب بالفعل تغييراً فى تلك الموجودة فى R . لكن ، لإمكانية القدرة على أن تكامل على فئات عامة فى R^p يكون من الضرورى أن نطور ، كما نفعل فى باب ٤٤ ، نظرية « محتوى » (كما سنسمى التصور « لمساحة » ذات R^p من الأبعاد) لعائلة فئات مناسبة فى الفراغ R^p . سوف نميز نظرية المحتوى من هذه العائلة من فئات ، وتوضح كيف تعبر عن تكاملات فى R^p كتكاملات متكررة . سنخصص الباب الأخير لتطور نظريات هامة على تحويل الفئات وتكاملات تحت رواسم قابلة للتفاضل . المشاكل النظرية تستحق الاعتبار ، لكن نختتم بنظرية مفيدة جداً تحقق تغيير المتغيرات حتى فى حالات ربما يجوز فيها التحويل كمية محدودة من سلوك « شاذ » .

الباب الثالث والأربعون — التكامل فى R^p :

ناقشنا فى الأبواب ٢٩ – ٣١ التكامل لدوال محدودة حقيقية معرفة فى فترة مدمجة J فى الفراغ R . قد يلاحظ قارىء بصير بالحالات العامة أن جزءاً كبيراً من الذى أجريناه فى هذه الأبواب يمكن إجراؤه عندما تقع قيم الدالة فى الفراغات الكارتيرية R^q . وبمجرد تعريف هذه الإمكانية فليس من الصعب إجراء التعديلات الضرورية لحصول على نظرية تكامل لدوال فى J إلى R^q .

وطبيعى أن نسأل عما إذا كان من الممكن الحصول على نظرية تكامل الدوال نطاقها هو فئة جزئية من الفراغ R^p ، وسيتذكر القارىء أن هذه قد أجريت فى الحقيقة فى مقررات التفاضل والتكامل حيث اعتبرنا تكاملات « مزدوجة » أو « ثلاثية » . سنبتدىء فى هذا الباب بدراسة تكامل ريمان لدوال حقيقية القيمة معرفة فى فئة جزئية محدودة مناسبة من الفراغ R^p . وبالرغم من أن كثيراً من نتائجنا يمكن امتدادها لتسمح بقيم فى R^p عند $q > 1$ ، فسوف نترك هذا الامتداد للقارىء .

محتوى صفر :

نتذكر من باب ٥ أن خلية فى R هى فئة يكون لها إحدى الصور الأربع :

$$(a, b), \quad [a, b], \quad [a, b), \quad (a, b]$$

حيث $a \le b$. يسمى العددان a, b بالنقطتين الطرفيتين لهذه الخلايا . خلية فى R^p هى حاصل ضرب كارتيزى $J = J_1 \times \cdots \times J_p$ لخليات p فى R . يقال للخلية J أنها مغلقة (على الترتيب ، مفتوحة) إذا كانت كل الخلايا $J_1, \ldots, J_p$ مغلقة (على الترتيب ، مفتوحة) فى R . إذا كانت الخلايا J_i لها نقطتان طرفيتان $a_i \le b_i (i = 1, \ldots, p)$ ، فنعرف المحتوى من $J = J_1 \times \cdots \times J_p$ بأنه حاصل الضرب

$$c(J) = (b_1 - a_1) \cdots (b_p - a_p)$$

إذا كانت $p = 1$ ، يسمى محتوى عادة « طول » ، إذا كانت $p = 2$ ، فيسمى المحتوى « مساحة » ، إذا كانت $p = 3$ ، فيسمى المحتوى« حجم » . سنستعمل الكلمة « محتوى » لأنها خالية من مدلولات مصاحبة خاصة لكلمات أخرى لها مدلولات .

لاحظ أنه إذا كانت $J = J_1 \times \cdots \times J_p$ و $K = K_1 \times \cdots \times K_p$ خلايا فى R^p بحيث إن النقطتين الطرفيتين للخلية J_i هما نفس النقطتين الطرفيتين الخلية K_i لكل $i = 1, \ldots, p$ ، فإن $c(J) = c(K)$. بالمثل، إذا كانت $a_k = b_k$ لبعض $k = 1, \ldots, p$ فإن الخلية J محتوى $c(J) = 0$ ؛ لكن ، ليس ضرورياً أن $J = \emptyset$

إذا كانت J_i خلية بنقطتين طرفيتين $a_i \le b_i$ و إذا كانت $b_1 - a_1 = \cdots = b_p - a_p > 0$

فنقول إن

$$J = J_1 \times \cdots \times J_p$$

هو مكعب . ربما يكون مكعباً مغلقاً ، مفتوحاً أولا واحد منهما . سنسمى العدد $b_1 - a_1 > 0$ الطول الجانبى للمكعب .

٤٣ – ١ تعريف . يكون للفئة $Z \subseteq R^p$ محتوى صفر إذا كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ فئة محدودة $J_1, \ldots, J_n$ للخلايا التى يحتوى اتحادها Z وبحيث إن

$$c(J_1) + \cdots + c(J_n) < \varepsilon$$

من المهم أن يوضح القارىء أن شخصاً يحتاج إلى كون الخلايا الظاهرة فى هذا التعريف مغلقة ، أو مفتوحة ، أو مكعبات ، وفكرة المحتوى صفر تظل تماماً نفس التصور

٤٣ – ٢ أمثلة . (أ) نقطة فى الفراغ R^p لها محتوى صفر ، (لماذا ؟) وأكثر عموماً ، أى فئة جزئية محدودة للفراغ R^p لها محتوى صفر .

(ب) إذا كانت $(z_n)_{n\in N}$ متتابعة فى R^p متقاربة إلى $z_0 \in R^p$ ، حينئذ يكون للفئة $Z = \{z_n : n \geq 0\}$ محتوى صفر . لأنه ، إذا كانت $\varepsilon > 0$ نفرض أن J_0 خلية مفتوحة تحتوى z_0 بحيث إن $c(J_0) < \varepsilon$. لذلك توجد $k \in N$ بحيث إن $z_n \in J_0$ لكل $n > k$ ويمكننا أخذ $J_i = \{z_i\}$ عند $i = 1, \ldots, k$ للحصـــول على $Z \subseteq J_0 \cup J_1 \cup \cdots \cup J_k$ بما أن

$$c(J_0) + c(J_1) + \cdots + c(J_k) < \varepsilon + 0 + \cdots + 0 = \varepsilon$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ اختيارية ، فينتج أن Z لها محتوى صفر .

(ج) أى فئة جزئية من فئة بمحتوى صفر لها محتوى صفر . الاتحاد لعـدد محدود من فئات بمحتوى صفر له محتوى صفر .

(د) فى الفراغ R^2 ، يكون للفئة التى على هيئة ماسة $S = \{(x, y) : |x| + |y| = 1\}$ محتوى صفر . لأنه ، إذا كانت $n \in N$ ، فإننا نقدم مربعات بأقطار على طول S ورؤوس عند النقط $x = y = \pm k/n \ (k = 0, 1, \ldots, n)$ حينئذ نرى أنه يمكننا أن نحصر S فى $4n$ مربعات مقفلة كل له محتوى $1/n^2$. ومن ثم المحتوى الكلى هو $4/n$ ، التى يمكن جعله صغيراً بدرجة اختيارية . (انظر شكل ٤٣ — ١) .

(هـ) الدائرة $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ فى R^2 لها محتوى صفر . يمكن برهنة هذه النتيجة بتعديل التعليل (د) .

(و) نفرض أن f دالة متصلة فى $J = [a, b]$ إلى R حينئذ يكون للشكل التخطيطى

$$G = \{(x, f(x)) \in R^2 : x \in J\}$$

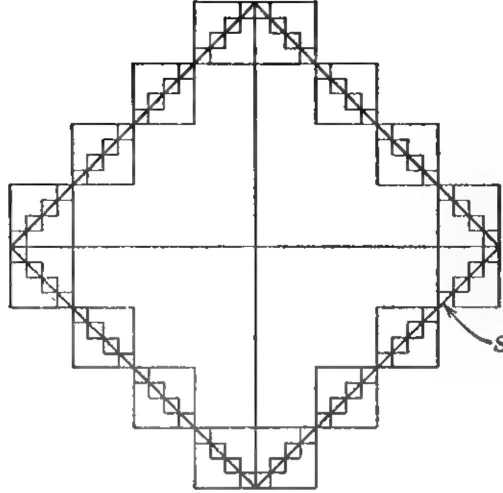
محتوى صفر . يمكن برهنة ذلك باستخدام الاتصال المنتظم للدالة f وتعديل المناقشة فى (د) .

(ز) الفئة $S \subseteq R^2$ ؛ تحتوى كل نقط (x, y) حيث كل من y و x تنتمى إلى $I \cap Q$ هى فئة محسوبة لكن ليس لها محتوى صفر . فى الحقيقة ، أى اتحاد محدود من خلايا تحتوى S يجب أن تحتوى أيضاً الخلية $I \times I$ ، التى لها محتوى الواحد الصحيح .

نلاحظ بخلاف (و) أنه توجد « منحنيات متصلة » فى R^2 لها محتوى موجب . فى الحقيقة ، توجد دالتان متصلتان f, g فى $I = [0, 1]$ إلى R بحيث إن الفئة

$$S = \{(f(t), g(t)); t \in I\}$$

تحتوى الخلية $I \times I$ فى R^2 . يسمى مثل هذا المنحنى منحنى حشو فراغ ، أو منحنى بيتو (انظر تمرين ٤٣ — ش) .



(شكل ٤٣ - ١)

تعريف التكامل :

سنعرف أولا تكامل دالة محدودة f معرفة على خلية مغلقة $I \subseteq R^p$ وبقيم فى R . نفرض أن

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$$

ولكن $k = 1, \ldots, p$ نفرض أن P_k هى تقسيم $[a_k, b_k]$ إلى عدد محدود لخلايا مغلقة فى R . ينتج هذا تقسيما P من I إلى عدد محدود من خلايا مغلقة فى R^p . إذا كانت Q و P تقسيمى I ، فنقول إن P هى تكرير Q إذا كانت كل خلية فى P محتوية فى خلية ما فى Q . (وبالتعاقب ، بملاحظة أن تفسيراً يتحدد برؤوس خلاياها ، تكون P تكرير Q إذا وإذا فقط كانت كل الرؤوس المحتوية فى Q هى أيضاً فى P) .

٤٣ - ٣ تعريف . يعطى حاصل جمع ريمان $S(P; f)$ المناظر للتقسيم $P = \{J_1, \ldots, J_n\}$ من I بما يلى :

$$S(P; f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) c(J_k)$$

حيث x_k هى أى نقطة « متوسطة » فى $J_k, k = 1, \ldots, n$. يعرف عدد حقيق L بأنه تكامل ريمان لدالة f على I إذا كان يوجد ، لكل $\varepsilon > 0$ تقسيم P_ε من I بحيث إنه إذا كانت P أى تكرير P_ε وكان $S(P; f)$ هى أى حاصل جمع ريمان المناظر إلى P ، حينئذ $|S(P; f) - L| \leq \varepsilon$. فى حالة وجود هذا التكامل نقول إن f قابلة للتكامل

على I . نفرض كتمرين روتيني نوضح أن القيمة L للتكامل محدودة وحيدة عند وجودها ، سوف نكتب في الحالة العامة

$$L = \int_I f$$

لكن ، عندما $p = 2$ فإننا نرمز من حين لحين للتكامل بالرمز

$$\iint_I f \quad \text{أو} \quad \iint_I f(x, y)\, d(x, y)$$

وعند $p = 3$ نكتب اتفاقاً

$$\iiint_I f \quad \text{أو} \quad \iiint_I f(x, y, z)\, d(x, y, z)$$

يوجد معيار كوشي مناسب لقابلية التكامل . بما أن برهانه بشأن برهان نظرية ٢٩ – ٤ ، فسوف نحذفه .

٤٣ – ٤ معيار كوشي . تكون دالة محدودة $f: I \to \mathbf{R}$ قابلة للتكامل على I إذا وإذا فقط كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ تقسيما Q_ε من I بحيث إنه إذا كان P ، Q تقسيمين من I هما تكريران للتقسيم Q_ε وكان $S(P; f)$ و $S(Q; f)$ هما أي حواصل ريمان المناظرين ، حينئذ .

$$|S(P; f) - S(Q; f)| \leq \varepsilon$$

نرغب الآن في أن نعتبر دوال معرفة على فئات جزئية محدودة من $\mathbf{R}^p$ أكثر عموماً من خلايا مغلقة . نفرض أن $A \subseteq \mathbf{R}^p$ هي فئة محدودة ونفرض أن $f: A \to \mathbf{R}$ دالة محدودة . بما أن A محدودة فتوجد خلية مغلقة $I \subseteq \mathbf{R}^p$ بحيث إن $A \subseteq I$. نعرف $f_I: I \to \mathbf{R}$ بأنها

$$\begin{aligned} f_I(x) &= f(x) && \text{عند} \quad x \in A \\ &= 0 && \text{عند} \quad x \in I \setminus A \end{aligned}$$

إذا كانت الدالة f_I قابلة للتكامل على I بمفهوم تعريف ٤٣ – ٣ ، حينئذ نوضح كتمرين (انظر ٤٣ – م) أن القيمة $\int_I f_I$ لا تتوقف على اختيار الخلية المغلقة I التي تحتوي A . سنقول تبعاً لذلك أن f قابلة للتكامل على A ونعرف

$$\int_A f = \int_I f_I$$

بما أن الطرف الأيمن يعتمد فقط على A و f . (في مناقشات قادمة ، سوف نرمز غالباً إلى f_I ببساطة الرمز f) .

بالمثل ، نفرض أن B و A فئتان جزئيتان محدودتان من R^p ونفرض أن $f : A \to R$ نفرض أن I هي خلية مغلقة تحتوى $A \cup B$ ونعرف $f_1 : I \to R$ بأنها

$$f_1(x) = f(x) \quad \text{عند} \quad x \in A \cap B$$
$$= 0 \quad \text{عند} \quad x \in I \setminus (A \cap B)$$

لاحظ أن f_1 هي الامتداد إلى I للقيد $f \mid A \cap B$. إذا كانت f_1 قابلة للتكامل على I ، فنقول إن f قابلة للتكامل على B ونعرف

$$\int_B f = \int_I f_1 \quad \left(= \int_{A \cap B} f \right)$$

خواص التكامل :

سوف نعطى الآن بعض الخواص المتوقعة التكامل . أثناء ذلك ، ستكون A فئة جزئية محدودة من R^p .

٤٣ — ٥ نظرية . نفرض أن g و f دالتان فى A إلى R وقابلتان التكامل على A ونفرض أن $\alpha, \beta \in R$. حينئذ تكون الدالة $\alpha f + \beta g$ قابلة للتكامل A ويكون

$$\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g$$

البرهان . تنتج هذه النتيجة من حقيقة كون أن حاصل جمع ريمان لتقسيم P لخلية $I \supseteq A$ يحققان

$$S(P; \alpha f + \beta g) = \alpha S(P; f) + \beta S(P; g)$$

عندما تستخدم نفس النقط المتوسطة x_k . وهو المطلوب إثباته

٤٣ — ٦ نظرية . نفرض أن $f : A \to R$ قابلة للتكامل على A وإذا كانت $f(x) \geq 0$ عند $x \in A$ ، حينئذ $\int_A f \geq 0$.

البرهان . لاحظ أن $S(P; f) \geq 0$ لأى حاصل جمع ريمان وهو المطلوب إثباته

٤٣ — ٧ نظرية . نفرض أن $f : A \to R$ دالة محدودة ونفرض أن للدالة A محتوى صفر . حينئذ f قابلة للتكامل على A وأن $\int_A f = 0$.

البرهان . نفرض أن I خلية مغلقة تحتوى A . إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، معطاة فنفرض أن P_ε تقسيم I بحيث إن تلك الخلايا فى P_ε التى تحتوى نقطاً من A لها محتوى كلى أقل من ε . (وضح أنه يوجد مثل هذا التقسيم P_ε) . الآن إذا كانت P تكريراً من P_ε ، حينئذ يكون لهذه الخلايا فى P التى تحتوى نقطاً من A محتوى كلياً أقل من ε .

حينئذ إذا كانت $|f(x)| \le M$ عند $x \in A$ ، نجد أن $|S(P;f)| \le M\varepsilon$ لأى حاصل جمع ريمان مناظر إلى P . لأن $\varepsilon > 0$ اختيارية ، مما يثبت أن $\int_A f = 0$

وهو المطلوب إثباته

٤٣ — ٨ نظرية . نفرض أن $f, g : A \to R$ دوال محدودة ونفرض أن f قابلة للتكامل على A . نفرض أن $E \subseteq A$ لها محتوى صفر ونفرض أن $f(x) = g(x)$ لكل $x \in A \setminus E$. حينئذ تكون g قابلة للتكامل على A ويكون

$$\int_A f = \int_A g$$

البرهان . مد g و f إلى الدالتين f_I, g_I المعرفتين فى خلية مغلقة I تحتوى A . يدل الفرض على أن الدالة $h_I = f_I - g_I$ محدودة وتساوى صفراً ماعدا على E . حسب نظرية ٤٣ — ٧ نستنتج أن h_I قابلة التكامل على I وقيمة تكاملها هى صفر باستخدام نظرية ٤٣ — ٥ ، نستنتج أن $g_I = f_I - h_I$ قابلة التكامل على I وأن

$$\int_A g = \int_I g_I = \int_I (f_I - h_I) = \int_I f_I = \int_A f$$

وهو المطلوب إثباته

وجود التكامل :

من المتوقع أنه إذا كانت f متصلة فى خلية مغلقة I إلى R ، فإن f قابلة للتكامل على I . سنثبت نتيجة أقوى تسمح للدالة f بأن تكون غير متصلة على مكملة فئة بمحتوى صفر .

٤٣ — ٩ نظرية القابلية للتكامل . نفرض أن $I \subseteq R^p$ هى خلية مغلقة ونفرض أن $f : I \to R$ محدودة . إذا كان يوجد فئة جزئية $E \subseteq I$ بمحتوى صفر بحيث تكون f متصلة على $I \setminus E$ ، فإن f قابلة للتكامل على I .

البرهان . نفرض أن $|f(x)| \le M$ لكل $x \in I$ ونفرض أن $\varepsilon > 0$ معطاة . حينئذ يوجد (لماذا ؟) تقسيم P_ε للخلية I بحيث إن (i) الخلايا فى P_ε التى تحتوى أى نقط من E تحتوى هذه النقط فى داخلهم ، وأن (ii) لهذه الخلايا محتوى كلى أقل من ε الاتحاد C لخلايا مغلقة فى P_ε التى لا تحتوى نقطاً من E هى فئة جزئية مدمجة تكون عليها الدالة f متصلة . طبقاً لنظرية الاتصال المنتظم ٢٣ — ٣ ، يكون التقييد للدالة f متصلا بانتظام على C . بإحلال P_ε بتكرير ، إذا كان ذلك ضرورياً ، ربما نفترض أنه إذا كانت J_k خلية فى P_ε ومحتوية فى C ، وإذا كانت $y \in J_k$ ، x فإن $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

نفترض أن Q و P تكريران المقدار P_ε . إذا كانت $S'(Q;f)$ و $S'(P;f)$

ترمزان إلى أجزاء حواصل جمع ريمان الممتدة على الخلايا فى C ، فإن مناقشة مشابهة إلى تلك الموجودة فى الجزء التالى من برهان نظرية ٣٠ - ١ ، تنتج

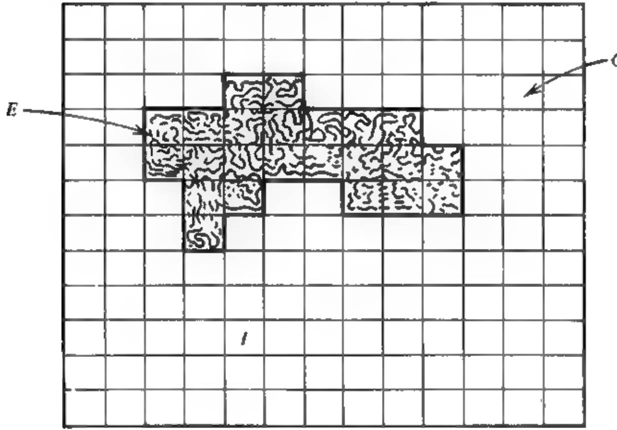
$$\begin{aligned}|S'(P;f)-S'(Q;f)| &\le |S'(P;f)-S'(P_\varepsilon;f)|+|S'(P_\varepsilon;f)-S'(Q;f)|\\ &\le 2\varepsilon c(I)\end{aligned}$$

بالمثل ، إذا كانت $S''(Q;f)$ و $S''(P;f)$ ترمزان إلى الجزء الباقى من حواصل جمع ريمان ، فإن •

$$|S''(P;f)-S''(Q;f)|\le |S''(P;f)|+|S''(Q;f)|\le 2M\varepsilon$$

لذلك ينتج أن

$$|S(P;f)-S(Q;f)|\le \varepsilon(2c(I)+2M)$$



(شكل ٤٣ - ٢)

بما أن $\varepsilon > 0$ اختيارية ، فنستنتج من معيار كوشى أن f قابلة التكامل على I . وهو المطلوب إثباته

ستعطى الشروط الضرورية والأساسية لقابلية التكامل فى (تمرين ٤٣ - ع) ومشروع ٤٤ - α .

تمرينـــــات :

٤٣ - (أ) . (أ) نفـرض أن $a=(a_1,\dots,a_p)\in \mathbf{R}^p$ ونفـــرض أن $J_1=[a_1,a_1],\dots,J_p=[a_p,a_p]$ هى خلايا فى $\mathbf{R}$. أثبت أن $J=J_1\times\cdots\times J_p$ لها محتوى صفر فى $\mathbf{R}^p$. ومن ثم أثبت أن للفئة $\{a\}$ محتوى صفر فى $\mathbf{R}^p$.

(ب) إذا أخذنا $J_1' = (a_1, a_1)$ حينئذ تكون الخلية $J' = J_1' \times J_2 \times \cdots \times J_p$ خالية ولها محتوى صفر .

٤٣ – (ب) أثبت أن الفئة $Z \subseteq \boldsymbol{R}^p$ محتوى صفر إذا وإذا فقط كان يوجد لكل $0 < \varepsilon$ فئة محدودة $K_1, \ldots, K_n$ لمكعبات اتحادها يحتوى Z وبحيث إن $c(K_1) + \cdots + c(K_n) < \varepsilon$

٤٣ – (ج) اكتب تفاصيل البرهان للفرض ، المذكور فى مثال ٤٣ – ٢ (و) ، الذى يقول إن المنحنى $S \subseteq \boldsymbol{R}^2$ لدالة متصلة $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ له محتوى صفر .

٤٣ – (د) إذا كانت J خلية مغلقة فى $\boldsymbol{R}^2$ وكانت $g : J \to \boldsymbol{R}$ متصلة ، أثبت أن للمنحنى $\{(x, y, g(x, y)) : (x, y) \in J\} \subseteq \boldsymbol{R}^3$ للدالة g محتوى صفر .

٤٣ – (هـ) نفرض أن $A \subseteq \boldsymbol{R}^2$ هى فئة تتكون من كل أزواج $(i/p, j/p)$ حيث p هو عدد أولى ، وأن $i, j = 1, 2, \ldots, p-1$. أثبت أن كل خط أفقى وأن كل خط رأسى فى $\mathbf{R}^2$ يقطع A فى عدد محدود (غالباً صفراً) من نقط . هل A لها محتوى صفر ؟

٤٣ – (و) نفرض أن $I \subseteq \boldsymbol{R}^p$ خلية مغلقة ونفرض أن $P = \{I_1, \ldots, I_n\}$ و $Q = \{J_1, \ldots, J_m\}$ تقسيمان للخلية I إلى خلايا مغلقة . أثبت أن

$$R = \{I_i \cap J_j : \ i = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, m\}$$

تقسيم للخلية I وأن R تكرير لكل من Q و P . يسمى التقسيم R بالتكرير المشترك للتقسيمين Q و P .

٤٣ – (ز) إذا كانت $I \subseteq J$ خلايا فى $\boldsymbol{R}^p$ وإذا كانت P تقسيما للخلية I ، وضح أنه يوجد تقسيم Q للمقدار J بحيث إن كل خلية فى P تنتمى إلى Q .

٤٣ – (ح) نفرض أن $Z \subseteq \boldsymbol{R}^p$ فئة بمحتوى صفر ونفرض أن I خلية مغلقة محتوية Z . إذا كانت $J_1, \ldots, J_n$ هى خلايا محتوية فى I التى اتحادها يحتوى Z ، أثبت أنه يوجد تقسيم P للخلية I بحيث إن الإقفال لكل J_k هو الاتحاد للخلايا فى P .

٤٣ – (ط) نفرض أن $Z \subseteq \boldsymbol{R}^p$ فئة بمحتوى صفر ونفرض أن I خلية مغلقة تحتوى Z . إذا كانت $0 < \varepsilon$ ، وضح أنه يوجد تقسيم P_ε للخلية I بحيث إن للخلايا فى P_ε التى يحتوى نقطاً فى Z محتوى كلى أقل من ε .

٤٣ – (ى) فى التمرين السابق ، وضح أنه يمكننا اختيار P_ε بحيث يكون لها الخاصية الإضافية وهى أن الخلايا فى P_ε التى تحتوى أى نقطة للفئة Z تحتويها فى داخلها .

٤٣ – (ك) فى (تمرين ٤٣ – ط) ، إذا كانت I مكعبا ، أثبت أنه يوجد تقسيم Q_ε للمكعب I إلى مكعبات بحيث إن المكعبات فى Q_ε التى تحتوى نقطاً فى Z لها محتوى كلى أقل من ε .

٤٣ – (ل) نفرض أن $A \subseteq \boldsymbol{R}^p$ محدودة ونفرض أن J و I خليتان مغلقتان في $\boldsymbol{R}^p$ بحيث إن $A \subseteq I \subseteq J$. إذا كانت $f : A \to \boldsymbol{R}$ دالة محدودة ، عرف $f_I : I \to \boldsymbol{R}$ (على الترتيب $f_J : J \to \boldsymbol{R}$) لتكون الدالة التي تتفق مع f على A وتنعدم على $I \setminus A$ (على الترتيب ، $J \setminus A$) . وضح أن تكامل الدالة f_I على I موجود إذاً وإذا فقط كان تكامل الدالة f_J على J موجوداً وفي هذه الحالة يكون التكاملان متساويين .

٤٣ – (م) نفرض أن $A \subseteq \boldsymbol{R}^p$ محدودة ونفرض أن I_2 و I_1 خليتان مغلقتان في $\boldsymbol{R}^p$ بحيث إن $A \subseteq I_j$. نفرض أن $f : A \to \boldsymbol{R}$ دالة محدودة ، وأننا ، عند $j = 1, 2$ ، نعرف $f_j : I_j \to \boldsymbol{R}$ بأنها $f_j(x) = f(x)$ عند $x \in A$ وأن $f_j(x) = 0$ عند $x \in I_j \setminus A$ وضح أن تكامل الدالة f_1 على الخلية I_1 موجود إذاً وإذا فقط كان تكامل الدالة f_2 على I_2 موجوداً ، وفي هذه الحالة يكون التكاملان متساويين .

٤٣ – (ن) أثبت وحدوية تكامل دالة محدودة f معرفة على خلية مقفلة $I \subseteq \boldsymbol{R}^p$.

٤٣ – (س) اكتب التفاصيل لبرهان معيار كوشي ٤٣ – ٤ .

٤٣ – (ع) نفرض أن $I \subseteq \boldsymbol{R}^p$ خلية مغلقة ونفرض أن $f : I \to \boldsymbol{R}$ محدودة . حينئذ تكون الدالة f قابلة للتكامل على I إذاً وإذا فقط كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ تقسيم P_ε للخلية I بحيث إنه إذا كانت $P = \{J_1, \ldots, J_n\}$ تكريراً P_ε ، فإن

$$\sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j) c(J_j) < \varepsilon$$

حيث $m_j = \inf\{f(x) : x \in J_j\}$ و $M_j = \sup\{f(x) : x \in J_j\}$ عند $j = 1, \ldots, n$ تسمى هذه النتيجة معيار ريمان للقابلية للتكامل (انظر نظرية ٣٠ – ١) .

٣٤ – (ف) نفرض أن $I \subseteq \boldsymbol{R}^p$ خلية مغلقة ونفرض أن $f : I \to \boldsymbol{R}$ محدودة بالمقدار M . إذا كانت f قابلة للتكامل على I ، أثبت أن الدالة $|f|$ تكون قابلة للتكامل على I وأن $\int_I |f| \leq Mc(I)$.

٣٤ – (ص) نفرض أن $I \subseteq \boldsymbol{R}^p$ خلية مغلقة ونفرض أن $f, g : I \to \boldsymbol{R}$ قابلة للتكامل على I . أثبت أن دالة حاصل الضرب fg قابلة للتكامل على I .

٤٣ – (ق) نفرض أن $I \subseteq \boldsymbol{R}^p$ خلية مغلقة ونفرض أن (f_n) متتابعة دوال قابلة للتكامل على I . إذا كانت المتتابعة تتقارب بانتظام على I إلى f ، أثبت أن f قابلة للتكامل على I وأن

$$\int_I f = \lim_n \left(\int_I f_n \right)$$

٤٣ – (ر) نفرض أن $K \subseteq \boldsymbol{R}^p$ مكعب مغلق ونفرض أن $f, g : K \to \boldsymbol{R}$

متصلة . أثبت أنه إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، فإنه يوجد تقسيم $P_\varepsilon = \{K_1, \ldots, K_r\}$ للمكعب K إلى مكعبات بحيث إنه إذا كانت x_j, y_j أى نقط من $K_j, j = 1, \ldots, r$ ، فإن

$$\left| \int_K fg - \sum_{j=1}^{r} f(x_j)g(y_j)c(K_j) \right| < \varepsilon c(K)$$

٤٣ – (ش) يعطى هذا التمرين مثالا يرجع إلى آى . ج . شونبرج(*) لمنحنى حشو الفراغ نفرض أن $\varphi : R \to R$ متصلة ، زوجية ، بدوره 2 وبحيث إن

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 0 && \text{for} \quad 0 \le t \le \tfrac{1}{3} \\ &= 3t - 1 && \text{for} \quad \tfrac{1}{3} < t < \tfrac{2}{3}, \\ &= 1 && \text{for} \quad \tfrac{2}{3} \le t \le 1 \end{aligned}$$

(أ) ارسم شكلا تخطيطياً للدالة φ . لاحظ أن $\|\varphi\|_R = 1$.

(ب) إذا كانت $t \in I$ ، عرف $g(t)$ و $f(t)$ بأنها

$$f(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2^2}\varphi(3^2 t) + \frac{1}{2^3}\varphi(3^4 t) + \cdots$$

$$g(t) = \frac{1}{2}\varphi(3t) + \frac{1}{2^2}\varphi(3^3 t) + \frac{1}{2^3}\varphi(3^5 t) + \cdots$$

أثبت أن هاتين المسلسلتين يتقاربان بانتظام ، أى أن f, g متصلتان على I .

(ج) أوجد قيمة $g(t)$ و $f(t)$ ، حيث t لها المفكوك الثلاثى (قاعدة 3) المعطى كما يلى

0.2020, 0.0220, 0.0022, 0.2002

(د) نفرض أن (x, y) تنتمى إلى المنحنى $S = \{(f(t), g(t)) : t \in I\}$ واكتب x, y فى صورة مفكوكها الثنائى (قاعدة 2) :

$$x = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots, \qquad y = 0.\beta_1\beta_2\beta_3 \ldots$$

حيث β_m و α_n يساويان إما صفراً أو 1 . نفرض أن t هى العدد الحقيقى المناظر الذى مفكوكه الثلاثى هو

$$t = 0.(2\alpha_1)(2\beta_1)(2\alpha_2)(2\beta_2) \ldots .$$

أثبت أن $x = f(t)$ و $y = g(t)$. وإذن كل نقطة فى المكعب $I \times I$ تنتمى إلى المنحنى S .

(*) اسحق ج. شونبرج (١٩٠٣ –   ) ولد فى رومانيا وتعلم هناك وفى ألمانيا لعدة سنوات أثناء وجوده فى جامعة بنسلفانيا ، بحث فى نظرية العدد ، التحليل الحقيقى والمركب ، وتفاضل وتكامل المتغيرات .

٤٣ – (ت) فئة $Z \subseteq R^p$ لها مقياس صفر إذا وجدت لكل $\varepsilon > 0$ متتابعة (J_n) لخلايا اتحادها يحتوى Z وبحيث إن $\sum c(J_n) < \varepsilon$.

(أ) بما أن الفئة الخالية هى خلية ، وضح أن فئة لها محتوى صفر يكون لها أيضاً مقياس صفر .

(ب) أثبت أن كل فئة محسوبة فى R^p لها مقياس صفر . وإذن الفئة فى مثال ٤٣ – ٢ (ز) لها مقياس صفر (لكن ليس لها محتوى صفر) .

(ج) وضح أنه ، فى التعريف « المقياس صفر » المعطى أعلى ، يمكن أن نحتاج إلى كون الخلايا مفتوحة ، أو مكعبات .

(د) أثبت أن لكل فئة مدمجة بمقياس صفر أيضاً محتوى صفر .

(هـ) للاتحاد لعائلة من فئات محسوبة بمحتوى صفر مقياس صفر .

مشروعات :

٤٣ – α نفرض أن $I \subseteq R^p$ خلية مغلقة ونفرض أن $f : I \to R$ محدودة . إذا كانت $P = \{J_1, \dots, J_n\}$ تقسيما للخلية I ، نفرض أن

$$m_j = \inf\{f(x) : x \in J_j\}, \qquad M_j = \sup\{f(x) : x \in J_j\}$$

عند $j = 1, \dots, n$ وعرف حاصل الجمع العلوى والسفلى للدالة f عند P كما يلى

$$L(P; f) = \sum_{j=1}^{n} m_j c(J_j), \qquad U(P; f) = \sum_{j=1}^{n} M_j c(J_j)$$

(أ) إذا كانت $S(P; f)$ أى حاصل جمع ريمان المناظر إلى P ، حينئذ

$$L(P; f) \le S(P; f) \le U(P; f)$$

إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، فإنه يوجد حاصل جمع ريمان $S_2(P; f)$ و $S_1(P; f)$ المناظران إلى P بحيث إن

$$S_1(P; f) \le L(P; f) + \varepsilon, \qquad U(P; f) - \varepsilon \le S_2(P; f)$$

(ب) إذا كانت P تقسيما من I وكانت Q تكرير P ، حينئذ

$$L(P; f) \le L(Q; f) \le U(Q; f) \le U(P; f)$$

(ج) إذا كانت P_2 و P_1 أى تقسيمين من I ، حينئذ $L(P_1; f) \le U(P_2; f)$

(د) عرف التكامل الأدنى والأعلى للدالة f على I بأنه

$$L(f) = \sup\{L(P; f)\}, \qquad U(f) = \inf\{U(P; f)\}$$

على الترتيب ، حسبت النهاية الأعلى والنهاية الأدنى تكون مأخوذة على كل أجزاء I . أثبت أن $L(f) \leq U(f)$.

(هـ) وضح أن f قابلة للتكامل (بمفهوم تعريف ٤٣ - ٣) إذا وإذا فقط كان $L(f) = U(f)$ ، وفى هذه الحالة يكون $L(f) = U(f) = \int_I f$

(و) وضح أن f قابلة للتكامل إذا وإذا فقط كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ تقسيما P بحيث إن $U(P;f) - L(P;f) < \varepsilon$. (يسمى هذا الشرط أحياناً شرط ريمان ، قارنه بتمرين ٤٣ - ع) .

٤٣ - β تطور هذا المشروع تكامل الدوال على خلية مغلقة $I \subseteq R^p$ ويقيم فى R^q . إذا كانت $P = \{J_1, \dots, J_n\}$ تقسيما للخلية I ، فإن حاصل جمع ريمان $S(P;f)$ المناظر إلى P هو حاصل جمع

$$S(P;f) = \sum_{k=1}^{n} c(J_k) f(x_k)$$

حيث $x_k \in J_k$. يكون العنصر $L \in R^q$ تكامل ريمان للدالة f على I إذا كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ تقسيم P_ε للخلية I بحيث إنه إذا كانت P تكرير P_ε وكان $S(P;f)$ هو أى حاصل جمع ريمان مناظر ، فإن $\|S(P;f) - L\| < \varepsilon$. افحص أى النظريات الموجودة فى هذا الباب تظل صحيحة لدوال بقيم فى R^q . وضح أن $f: I \rightarrow R^q$ قابلة للتكامل إذا وإذا فقط كانت كل دالة $f_j = e_j \cdot f,\ j = 1, \dots, q$ قابلة للتكامل . (هنا $e_1, \dots, e_q$ هى المتجهات الأساسية القياسية فى R^q) .

الباب الرابع والأربعون — محتوى التكامل :

سنقدم فى هذا الباب مجموعة الفئات بمحتويات ، ونميز الدالة المحتوية كدالة حقيقية القيمة معرفة على هذه المجموعة من فئات . سنحصل الآن على بعض خواص أبعد للتكامل على فئات بمحتوى ، ونوضح كيف أنه يمكن حساب التكامل « كتكامل مكرر » .

٤٤ - ١ تعريف . إذا كانت $A \subseteq R^p$ ، حينئذ نتذكر أن نقطة $x \in R^p$ يقال إنها نقطة حدودية للفئة A إذا احتوى كل جوار x على كل من نقط فى A ونقط فى مكملتها $\mathscr{C}(A)$ حدود A هى فئة جزئية من الفراغ R^p وتتكون من كل النقط الحدودية من A ؛ وسيرمز لها بالرمز $b(A)$.

نتذكر أنه إذا كانت $A \subseteq R^p$ ، فإن نقطة الفراغ R^p هى بالضبط إحدى النقط الآتية : نقطة داخلية من A ، نقطة حدودية من A ، أو هى نقطة خارجية عن A . يتكون الداخل A^0 من كل النقط الداخلية من A ؛ هى فئة مفتوحة فى R^q كما لاحظنا أعلاه

تحتوى الحدودية $b(A)$ على كل النقط الحدودية من A ؛ هى فئة مغلقة فى R^p . إقفال A^- هو اتحاد $A \cup b(A)$ ؛ هو فئة مغلقة فى R^p .

نتوقع عادة أن الحدودية لفئة صغيرة ، لكن هذا ناتج بسبب تعودنا التفكير فى المستطيلات والدوائر والأشكال الأولية . يوضح مثال ٤٣ – ٢ (ز) أن الحدودية لفئة محسوبة فى الفراغ R^2 يمكن أن تساوى حدوديتّها $I \times I$.

فئات مع محتوى :

سنعرف الآن المحتوى لفئة جزئية من الفراغ R^p التى حدوديتّها لها محتوى صفر .

٤٤ – ٢ تعريف . فئة محدودة $A \subseteq R^p$ حدوديتّها $b(A)$ والتى لها محتوى صفر يقال إن لها محتوى . سيرمز للمجموعة لكل الفئات الجزئية للفراغ R^p التى لها محتوى بالرمز $\mathscr{D}(R^p)$. إذا كانت $A \in \mathscr{D}(R^p)$ وإذا كانت I خلية مغلقة تحتوى A ، فإن الدالة g_I المعرفة بأنها

$$\begin{aligned} g_I(x) &= 1 \quad \text{عند} \quad x \in A, \\ &= 0 \quad \text{عند} \quad x \in I \setminus A \end{aligned}$$

متصلة على I ماعدا إمكانية عدم اتصالها عند نقط من $b(A)$. ومن ثم g_I قابلة للتكامل على I ونعرف المحتوى $c(A)$ للفئة A بأنه يساوى $\int_I g_I$. أى أن

$$c(A) = \int_I g_I = \int_A 1$$

لاحظ أنه إذا كانت $J \subseteq R^p$ خلية ، حينئذ تتكون حدوديتّها من الاتحاد لأعداد محدودة من « الأوجه » التى هى خلايا كل لها محتوى صفر . [مثال ذلك ، إذا كانت $J = [a, b] \times [c, d]$ ، حينئذ $b(J)$ هو الاتحاد للأربع خلايا

$$[a, b] \times [c, c], \qquad [a, b] \times [d, d]$$
$$[a, a] \times [c, d], \qquad [b, b] \times [c, d]$$

هذه الخلايا الأربع نفسها هى أيضاً الحدودية للخلية $(a, b) \times (c, d)$] ينتج أن خلية فى R^p يكون لها محتوى ؛ بالإضافة إلى ذلك ، يكون من السهولة ملاحظة أنه إذا كانت $J = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ ، فإن

$$c(J) = \int_J 1 = (b_1 - a_1) \cdots (b_p - a_p)$$

ومن ثم يتفق معنى المحتوى لخلية ، كما أعطى بتعريف (٤٤ – ٢) ، مع التعريف للمحتوى المختص ترجع بخلية مغلقة فى باب ٤٣ . بالمثل تستخدم ملاحظات مماثلة لخلايا أخرى

فى الفراغ R^p ، بوجه خاص ، نلاحظ أنه إذا كانت $K = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_p, b_p)$ فإن

$$c(K) = \int_K 1 = (b_1 - a_1) \cdots (b_p - a_p).$$

سوف نوضح الآن أن المفهوم لمحتوى صفر الذى قدمناه فى تعريف (٤٣ – ١) يتفق مع المفهوم للمحتوى الذى قدمناه فى تعريف (٤٤ – ٢) .

٤٤ – ٣ مفترض . يكون للفئة $A \subseteq R^p$ لها محتوى صفر (بمفهوم تعريف ٤٣ – ١ إذا وإذا فقط كان لها محتوى (بمفهوم تعريف ٤٤ – ٢) ويكون $c(A) = 0$.

البرهـــان . نفرض أن $A \subseteq R^p$ لها محتوى صفر . حينئذ ، إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، فيمكننا أن نحصر A فى الاتحاد U لعدد محدود لخلايا مغلقة بمحتوى كل أقل من ε . بما أن هذا الاتحاد U هو فئة محدودة ، فإن A محدودة ، بما أن U مغلقة ، فإنها تحتوى أيضاً $b(A)$ بما أن $\varepsilon > 0$ اختيارية ، فنستنتج أن $b(A)$ لها محتوى صفر ؛ ومن ثم A لها محتوى وأن

$$c(A) = \int_A 1 ،$$

الآن ينتج من مفترض (٤٣ – ٧) أن $c(A) = 0$.

وبالعكس ، نفرض أن $A \subseteq R^p$ لها محتوى وأن $c(A) = 0$ ، ومن ثم توجد خلية مغلقة I تحتوى A وبحيث تكون الدالة

$$g_I(x) = 1 \quad \text{for} \quad x \in A,$$
$$= 0 \quad \text{for} \quad x \in I \setminus A,$$

قابلة للتكامل على I . نفرض $\varepsilon > 0$ معطاة ونفرض أن P_ε تقسيم I بحيث إن أى حاصل جمع ريمان المناظر إلى P_ε يحقق $0 \leq S(P_\varepsilon; g_I) < \varepsilon$. إذا أخذنا النقط الوسطى فى $(P_\varepsilon; g_I)$. لتنتمى إلى A كلما كان ذلك ممكناً ، فنستنتج أن A تكون محتوية فى الاتحاد لعدد محدود لخلايا فى P_ε بمحتوى كل أقل من ε . أى إن A لها محتوى صفر بمعنى تعريف (٤٣ – ١) .

٤٤ – ٤ نظرية . نفرض أن B و A تنتميان إلى $\mathcal{D}(R^p)$ ونفرض أن $x \in R^p$.

(أ) الفئتان $A \cap B$ و $A \cup B$ تنتميان إلى $\mathcal{D}(R^p)$ وأن

$$c(A) + c(B) = c(A \cap B) + c(A \cup B)$$

(ب) الفئتان $A \setminus B$ تنتميان إلى $B \setminus A$ وأن $\mathcal{D}(R^p)$ و

$$c(A \cup B) = c(A \setminus B) + c(A \cap B) + c(B \setminus A)$$

(ج) إذا كانت $x+A=\{x+a : a\in A\}$ ، فإن $x+A$ تنتمى إلى $\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ وأن

$$c(x+A)=c(A)$$

البرهان . من الفرض ، الحدوديتان $b(A), b(B)$ لهما محتوى صفر . سنترك كتمرين للقارىء توضيح أن الحدوديات

$$b(A\cap B),\quad b(A\cup B),\quad b(A\setminus B),\quad b(B\setminus A)$$

هى محتوية فى $b(A)\cup b(B)$. ينتج من هذا ومن مثال ٤٣ - ٢ (ج) أن : $B\setminus A$ و $A\cap B, A\cup B\ A\setminus B$ تنتمى إلى $\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$.

نفرض الآن أن I خلية مغلقة تحتوى $A\cup B$ ونفرض أن f_a, f_b, f_i, f_u هى الدوال المساوية للواحد الصحيح على $A, B, A\cap B, A\cup B$ ، على الترتيب ، ومساوية صفراً خلاف ذلك على I . بما أن كلا من هذه الدوال متصلة ماعدا على فئات محتوى صفر ، فإنها قابلة للتكامل على I . بما أن

$$f_a+f_b=f_i+f_u \quad .$$

فينتج من نظرية (٤٣ - ٥) وتعريف المحتوى أن

$$c(A)+c(B)=\int_I f_a+\int_I f_b=\int_I (f_a+f_b)$$
$$=\int_I (f_i+f_u)=\int_I f_i+\int_I f_u$$
$$=c(A\cap B)+c(A\cup B)$$

مما يثبت القانون المعطى فى (أ) ، ويمكن برهنة القانون فى (ب) بالمثل .

لبرهان (ج) ، لاحظ أنه إذا كانت $\varepsilon>0$ معطاة وإذا كانت $J_1,\ldots,J_n$ خلايا بمحتوى كل أقل من ε اتحادها يحتوى $b(A)$ ، حينئذ $x+J_1,\ldots,x+J_n$ خلايا بمحتوى كل أقل من ε اتحادها يحتوى $b(x+A)$. بما أن $\varepsilon>0$ اختيارية ، فإن الفئة $x+A$ تنتمى إلى $\mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$. لتوضح أن $c(x+A)=c(A)$ ، نفرض أن I خلية مغلقة تحتوى A ، ومن ثم تكون $x+I$ خلية مغلقة تحتوى $x+A$. نفرض أن $f_1 : I\to\mathbf{R}$ بحيث إن $f_1(y)=1$ عند $y\in A$ وأن $f_1(y)=0$ عند $y\in I\setminus A$ ونفرض أن $f_2 : x+I\to\mathbf{R}$ بحيث إن $f_2(z)=1$ عند $z\in x+A$ وأن $f_2(z)=0$ عند $z\in(x+I)\setminus(x+A)$. وضح أنه لكل حاصل جمع ريمان للدالة f_1 يوجد حاصل جمع ريمان مناظر للدالة f_2 ويساويه . وإذن

$$c(A)=\int_I f_1=\int_{x+I} f_2=c(x+A)$$

وهو المطلوب إثباته

٤٤ – ٥ نتيجة . نفرض أن B و A تنتميان إلى $\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^p)$

(أ) إذا كانت $A \cap B = \emptyset$ فإن $c(A \cup B) = c(A) + c(B)$

(ب) إذا كانت $A \subseteq B$ ، فإن $c(B \setminus A) = c(B) - c(A)$

تمييز للدالة المحتوية :

قد رأينا أن الدالة المحتوية $c : \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^p) \to \boldsymbol{R}$ موجبة « إضافية » ، « ثابتة تحت إزاحة » وتخصص القيمة 1 إلى مكعب « نصف مفتوح » .

$$K_0 = [0, 1) \times [0, 1) \times \cdots \times [0, 1)$$

سنوضح الآن أن هذه الخواص الأربع تميز c .

٤٤ – ٦ نظرية . نفرض أن $\gamma : \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^p) \to \boldsymbol{R}$ دالة ذات الخواص الآتية :

(i) $\gamma(A) \geq 0$ لكل $A \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^p)$

(ii) إذا كانت $A \cap B = \emptyset$ و $A, B \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^p)$

فإن $\gamma(A \cup B) = \gamma(A) + \gamma(B)$

(iii) إذا كانت $x \in \boldsymbol{R}^p$ و $A \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^p)$ فإن $\gamma(A) = \gamma(x + A)$

(iv) $\gamma(K_0) = 1$

حينئذ نجد أن $\gamma(A) = c(A)$ لكل $A \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^p)$

البرهان . إذا كانت $n \in \boldsymbol{N}$ ، نفرض أن K_n هي المكعب « النصف مفتوح »

$$K_n = [0, 2^{-n}) \times [0, 2^{-n}) \times \cdots \times [0, 2^{-n})$$

نلاحظ أن K_0 هي الاتحاد إزاحات غير متصلة عددها 2^{np} للمكعب K_n ؛ إذن

$1 = \gamma(K_0) = 2^{np}\gamma(K_n)$ ومنها $\gamma(K_n) = 1/2^{np} = c(K_n)$

نفرض أن A, B تنتميان إلى $\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^p)$ ونفرض أن $A \subseteq B$. حينئذ يمكننا أن نكتب $B = A \cup (B \setminus A)$ بما أن $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ ، فينتج من (ii)، (i) أن

$$\gamma(B) = \gamma(A) + \gamma(B \setminus A) \geq \gamma(A)$$

ومن ثم تكون γ مطردة بمعنى أنه إذا كانت $A \subseteq B$ فإن $\gamma(A) \leq \gamma(B)$. نفرض الآن $A \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^p)$ بما أن A محدودة ، حينئذ لبعض $M \in \boldsymbol{N}$ ، تكون الفئة A محتوية فى داخل مكعب مغلق I طول نصف ضلعه هو 2^M ومركزه عند 0 . إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، فيوجد تقسيم للمكعب I إلى مكعبات صغيرة طول ضلع كل منها 2^{-n} ، مثلا ، بحيث يكون محتوى الاتحاد لكل المكعبات $I_1, \ldots, I_r$ المحتوية فى A تزيد عن $c(A) - \varepsilon$ ، وبحيث

إن محتوى كل الخلايا $I_1, \ldots, I_s$ $(r < s)$ التى تحتوى نقطاً من A لاتزيد عن $c(A) + \varepsilon$ (انظر تمرين ٤٤ – ط) . الآن كل من هذه الفئات I تختلف عن إزاحة $x_i + K_n$ بفئة محتوى صفر . حينئذ نحصل على

$$c(A) - \varepsilon \le c\Big(\bigcup_{i=1}^{r} (x_i + K_n)\Big) \le c(A) \le c\Big(\bigcup_{i=1}^{s} (x_i + K_n)\Big) \le c(A) + \varepsilon$$

الآن كل من γ و c لاتتغيران تحت إزاحة الفئة وتتفق مع K_n . وبالإضافة إلى ذلك γ و c هما قابلتان للجمع تحت اتحادات محدودة غير متصلة . حينئذ ينتج أن

$$c\Big(\bigcup_{i=1}^{r} (x_i + K_n)\Big) = \sum_{i=1}^{r} c(x_i + K_n) = \sum_{i=1}^{r} \gamma(x_i + K_n)$$
$$= \gamma\Big(\bigcup_{i=1}^{r} (x_i + K_n)\Big)$$

ينتج من هذا وحقيقة كون γ مطردة أن

$$c(A) - \varepsilon \le \gamma\Big(\bigcup_{i=1}^{r} (x_i + K_n)\Big) \le \gamma(A) \le \gamma\Big(\bigcup_{i=1}^{s} (x_i + K_n)\Big) \le c(A) + \varepsilon$$

ومنها $|\gamma(A) - c(A)| \le \varepsilon$. بما أن $\varepsilon > 0$ اختيارية ، فنستنتج أن $\gamma(A) = c(A)$. وهو المطلوب إثباته

٤٤ – ٧ نتيجة . نفرض أن $\mu : \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^p) \to \boldsymbol{R}$ هى دالة تحقق الخواص **(i)** و **(ii)** و **(iii)** حينئذ يوجد مقدار ثابت $m \ge 0$ بحيث إن $\mu(A) = mc(A)$ لكل $A \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^p)$

البرهان . بما أن μ تحقق الخاصيتين **(i)** و **(ii)** ، فن السهل ملاحظة أن μ مطردة بمعنى أن $A \subseteq B$ تضمن أن $\mu(A) \le \mu(B)$. إذا كانت $\mu(K_0) = 0$ ، فإن μ لأى فئة محدودة هى صفر ، ومن ثم ينتج أن $\mu(A) = 0$ لكل $A \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^p)$ ، لذلك يمكننا أخذ $m = 0$. إذا كانت $\mu(K_0) \neq 0$ ، نفرض أن

$$\gamma(A) = \frac{1}{\mu(K_0)} \mu(A) \qquad \text{for all } A \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^p)$$

بما أننا رأينا حالا أن γ لها الخواص **(iv)** و **(iii)** و **(ii)** و **(i)** المذكورة فى النظرية ، فينتج أن $\gamma = c$. وإذن نأخذ $m = \mu(K_0)$ وهو المطلوب إثباته

خواص اضافية للتكامل :

سنعطى الآن بعض خواص إضافية للتكامل مفيدة غالباً .

٤٤ – ٨ نظرية . نفرض أن $A \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R}^p)$ ونفرض أن $f: A \to \boldsymbol{R}$ محدودة ومتصلة فى A . حينئذ تكون f قابلة للتكامل على A .

البرهان . نفرض أن I خلية مغلقة حيث $A \subseteq I$ ونفرض أن $f_1 : I \to \boldsymbol{R}$ تساوى الدالة f على A وتساوى صفراً على $I \setminus A$. بما أن f_1 محدودة فى I ومتصلة على $I \setminus b(A)$ فينتج من نظرية القابلية للتكامل (٤٣ – ٩) أن f_1 تكون قابلة للتكامل فى I . لذلك تكون f قابلة للتكامل على A . وهو المطلوب إثباته

سنوضح الآن أن التكامل يقبل الجمع بالنسبة إلى الفئة التى يكون التكامل مأخوذاً عليها .

٤٤ – ٩ نظرية . (أ) نفرض أن A_2 و A_1 تنتمى إلى $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^p)$ ونفرض أن $A_1 \cap A_2$ لها محتوى صفر . إذا كانت $A = A_1 \cup A_2$ وإذا كانت $f: A \to \boldsymbol{R}$ قابلة للتكامل على A_2 و A_1 فإن f قابلة للتكامل على A وأن

$$\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f \tag{44.1}$$

(ب) نفرض أن A تنتمى إلى $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^p)$ ونفرض أن $A_1, A_2 \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R}^p)$ بحيث إن $A = A_1 \cup A_2$ وبحيث إن $A_1 \cap A_2$ لها محتوى صفر . إذا كانت $f: A \to \boldsymbol{R}$ قابلة للتكامل على A ، وإذا كانت تقييدات الدالة f على A_2 و A_1 قابلة للتكامل ، فإن (٤٤ – ١) تظل صحيحة .

البرهان . (أ) نفرض أن I خلية مغلقة تحتوى على $A = A_1 \cup A_2$ ونفرض أن $f_i : I \to \boldsymbol{R}, i = 1, 2$ تساوى f فى A_i وتساوى صفراً فى أى مكان آخر فى I . من الفرض f_2 و f_1 قابلتان للتكامل على I وأن

$$\int_I f_i = \int_{A_i} f, \qquad i = 1, 2$$

ينتج من نظرية ٤٣ – ٥ أن $f_1 + f_2$ قابلة للتكامل على I وأن

$$\int_I (f_1 + f_2) = \int_I f_1 + \int_I f_2$$

بما أن $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ بشرط أن $x \in A \setminus (A_1 \cap A_2)$ ، فينتج الآن من مفرض ٤٣ – ٨ أن f قابلة للتكامل على A وأن (٤٤ – ١) تظل صحيحة .

(ب) نحتفظ برموز البرهان فى (أ) . من الفرض ، f_i قابلة للتكامل على I . تكون

الآن $f_I(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ماعدا عند x فى $A_1 \cap A_2$ ، فئة بمحتوى صفر .
لذلك ينتج من نظرية ٤٣ — ٥ ومفترض ٤٣ — ٨ أن

$$\int_A f = \int_I f = \int_I (f_1 + f_2) = \int_I f_1 + \int_I f_2$$

$$= \int_{A_1} f + \int_{A_2} f$$

وهو المطلوب إثباته

نلاحظ أنه إذا كانت $f: A \to R$ دالة محدودة قابلة التكامل ، حينئذ يتحقق الفرض الموجود فى ٤٤ — ٩ (ب) الذى يقول إن تقييدى الدالة f إلى A_2 و A_1 قابلتان التكامل تكون أوتوماتيكياً (انظر تمرين ٤٤ — ى) .

النتيجة القادمة مفيدة غالباً لحساب قيمة التكامل .

٤٤ — ١٠ نظرية . نفرض أن $A \in \mathscr{D}(R^p)$ ونفرض أن $f: A \to R$ قابلة التكامل على A وبحيث إن $|f(x)| \leq M$ لكل $x \in A$. حينئذ

$$\left| \int_A f \right| \leq Mc(A) \tag{44.2}$$

وبصورة أعم ، إذا كانت f حقيقية القيمة وكانت $m \leq f(x) \leq M$ لكل $x \in A$ ، فإن

$$mc(A) \leq \int_A f \leq Mc(A) \tag{44.3}$$

البرهان . نفرض أن f_I امتداد الدالة f لخلية مغلقة I تحتـوى A . إذا كانت $\varepsilon > 0$ معطاة ، فإنه يوجد تقسيم $P_\varepsilon = \{J_1, \ldots, J_k\}$ للخلية I بحيث إنه إذا كانت $S(P_\varepsilon; f_I)$ هى أى حاصـل جمع ريمان المناظر ، فإن

$$S(P_\varepsilon; f_I) - \varepsilon \leq \int_I f_I \leq S(P_\varepsilon; f) + \varepsilon$$

نلاحظ أنه إذا اختيرت النقطالوسطى لحاصل جمع ريمان خارج A كلما كان ذلك ممكناً ، فنجـد أن

$$S(P_\varepsilon; f) = \sum{}' f(x_i)c(J_i)$$

حيث يؤخذ حاصل الجمع على هذه الخلايا فى P_ε المحتوية كلية فى A . ومن ثم

$$S(P_\varepsilon; f) \leq M \sum{}' c(J_k) \leq Mc(A)$$

لذلك نجد أن

$$\int_A f = \int_I f_I \leq Mc(A) + \varepsilon$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ اختيارية فنحصل على الطرف الأيمن من المتباينة (٤٤ – ٣) . يثبت الطرف الأيسر بطريقة مماثلة . وهو المطلوب إثباته

كنتيجة لهذه النتيجة ، نحصل على النظرية الآتية ، التي هي امتداد للنظرية الأولى للقيمة المتوسطة ٣٠ – ٦ .

٤٤ – ١١ نظرية قيمة متوسطة . نفرض أن $A \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^p)$ فئة متصلة ونفرض أن $f : A \to \boldsymbol{R}$ محدودة ومتصلة على A . حينئذ توجد نقطة $p \in A$ بحيث إن

$$\int_A f = f(p)c(A) \tag{44.4}$$

البرهان . إذا كانت $c(A) = 0$ ، فالاستنتاج بسيط ، لذلك نفرض أن $c(A) \neq 0$. نفرض أن

$$m = \inf\{f(x) : x \in A\}, \qquad M = \sup\{f(x) : x \in A\}$$

فينتج من الجزء الثاني من النظرية السابقة أن

$$m \leq \frac{1}{c(A)} \int_A f \leq M \tag{44.5}$$

إذا كانت كل من المتباينتين الموجودتين في (٤٤ – ٥) دقيقتين ، وتنتج النتيجة من نظرية القيمة الوسطى لبولتزانو ٢٢ – ٤ .

نفرض الآن أن $\int_A f = Mc(A)$. إذا كان حصلنا على النهاية الأعلى M عند $p \in A$ ، فينتج المطلوب أيضاً . لذلك نفترض أن النهاية الأعلى M ليست عند A . بما أن $c(A) \neq 0$ ، وتوجد خلية مغلقة $K \subseteq A$ ، بحيث إن $c(K) \neq 0$ (انظر تمرين ٤٤ – ز) بما أن K مدمجة وأن f متصلة على K ، فتوجد $\varepsilon > 0$ بحيث إن $f(x) \leq M - \varepsilon$ لكل $x \in K$. بما أن $A = K \cup (A \setminus K)$ فينتج من نظرية ٤٤ – ٩ ، ٤٤ – ١٠ أن

$$\begin{aligned} Mc(A) = \int_A f &= \int_K f + \int_{A \setminus K} f \\ &\leq (M - \varepsilon)c(K) + Mc(A \setminus K) < Mc(A) \end{aligned}$$

هي تقلص . إذا كانت $\int_A f = mc(A)$ ، فنستخدم مناقشة مماثلة .

وهو المطلوب إثباته

التكامل كتكامل مكرر :

يكون من المرغوب معرفة أنه إذا كانت f قابلة للتكامل على خلية مغلقة
$$J = [a_1, b_1]\times\cdots\times[a_p, b_p]$$
فى R^p ولها قيم فى R ، فإن التكامل f J يمكن حسابه بدلالة « تكامل متكرر » لطيات p :

$$\int_{a_p}^{b_p}\left\{\cdots\left\{\int_{a_2}^{b_2}\left\{\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1\right\} dx_2\right\}\cdots\right\} dx_p$$

هذه الطريقة لحساب التكاملات الثنائية والثلاثية بطريقة التكاملات المتكررة مألوفة للقارىء من علم حساب التفاضل والتكامل الأولى . سنعطى تحقيقاً لهذه الطريقة : للبساطة سنفترض أن $p=2$ ، لكن من الواضح أن النتيجة صحيحة فى حالة أبعد أكثر .

٤٤ – ١٢ نظرية . إذا كانت f متصلة على خلية مغلقة $J = [a, b]\times[c, d]$ إلى R ، فإن

$$\int_J f = \int_c^d\left\{\int_a^b f(x, y)\, dx\right\} dy$$
$$= \int_a^b\left\{\int_c^d f(x, y)\, dy\right\} dx$$

البرهان . لاحظنا فى نظرية التبديل ٣١ – ٩ أن التكاملين المكررين متساويان . لتوضيح أن تكامل الدالة f على J يكون معطياً بالتكامل المكرر الأول ، نفرض أن F معرفة عند $y \in [c, d]$ بأنها
$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

نفرض أن $c = y_0 \le y_1 \le \cdots \le y_r = d$ تقسيم للفترة $[c, d]$ ، نفرض أن $a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_s = b$ تقسيم للفترة $[a, b]$ ، ونفرض أن P ترمز إلى التقسيم للفترة J الناتج من استخدام الخلايا $[x_{k-1}, x_k]\times[y_{j-1}, y_j]$. نفرض أن y_j^* هى أى نقطة فى $[y_{j-1}, y_j]$ ولاحظ أن

$$F(y_j^*) = \int_a^b f(x, y_j^*)\, dx = \sum_{k=1}^{s}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y_j^*)\, dx$$

حسب النظرية الأولى للفترة المتوسطة ٣٦ – ٦ ، يوجد لكل j و k نقطة x_{jk}^* فى $[x_{k-1}, x_k]$ بحيث إن

$$F(y_j^*) - \sum_{k=1}^{s} f(x_{jk}^*, y_j^*)(x_k - x_{k-1})$$

بالضرب فى $(y_j - y_{j-1})$ ثم الجمع نحصل على

$$\sum_{j=1}^{r} F(y_j^*)(y_j - y_{j-1}) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} f(x_{jk}^*, y_j^*)(x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1})$$

الآن يكون المقدار الموجود فى الطرف الأيسر لهـذا القانون هو حاصل جمع ريمان الاختيارى للتكامل

$$\int_c^d F(y)\, dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y)\, dx \right\} dy$$

قد وضحنا أن حاصـل جمع ريمان السابق يساوى حاصل جمع ريمان الخـاص والمناظر للتقسيم P . بما أن f قابلة للتكامل على J ، فنحصل على إثبات وجود التكامل المكرر ومساواته بالتكامل على J . وهو المطلوب إثباته

تعديل بسيط للبرهان المعطى فى النظرية السابقة يعطى النص الأقوى قليلا .

٤٤ — ١٣ نظرية . نفرض أن f قابلة للتكامل على المستطيل $J = [a, b] \times [c, d]$ إلى R ونفرض أنه ، لكل $y \in [c, d]$ ، تكون للدالة $x \to f(x, y)$ للفترة $[a, b]$ إلى R متصلة ما عدا إمكانية عند عدد محدود من نقط ، التى عندها يكون لها نهايات طرف واحد . حينئـذ

$$\int_J f = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y)\, dx \right\} dy$$

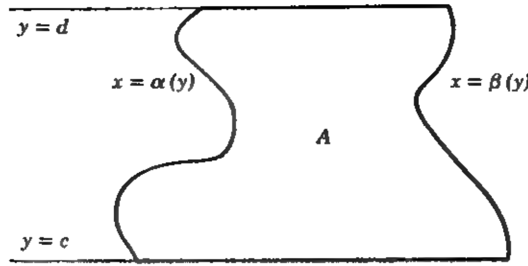
كنتيجة لهذه النظرية ، سنحصل على نتيجة تستخدم غالباً لحساب التكاملات لدوال معرفة على فئة محدودة بمنحنيات متصلة . وللملائمة ، سنقرر النتيجة فى الحالة التى فيها تكون للفئة قطع خطوط مستقيمة أفقية كحدود عليا وسفلى لها ومنحنيات متصلة كحدود جانبية . ومن الواضح أن نتيجة مماثلة تظل صحيحة . إذا كانت الحدود الجانبية هى قطع خطوط مستقيمة رأسية وكانت الحدود العليا والسفلى منحنيات . تعامل فئات أكثر تعقيداً بتحليل الفئات إلى الاتحـاد لفئات جزئية من هذين النوعين .

٤٤ — ١٤ نظرية . نفرض أن $A \subseteq R^2$ معطاة كما يلى :

$$A = \{(x, y) : \alpha(y) \le x \le \beta(y),\ c \le y \le d\}$$

حيث α β دالتان متصلتان على $[c, d]$ بقيم فى $[a, b]$. إذا كانت f متصلة على $A \to R$ ، فإن f قابلة للتكامل على A وأن

$$\int_A f = \int_c^d \left\{ \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx \right\} dy$$



(شكل ٤٤ – ١)

البرهان . نفرض أن J خلية مغلقة تحتوى A ونفرض أن f_J هى الامتداد للدالة f إلى J . يوضح تغيير لمثال ٤٣ – ٢ (و) أن حدود الفئة A لها محتوى صفر ؛ وإذن تكون f_J قابلة للتكامل على J . الآن لكل $y \in [c, d]$ تكون الدالة $x \mapsto f_J(x, y)$ متصلة ماعدا إمكانية عند النقطتين $\beta(y)$ و $\alpha(y)$ ، التى عندها يكون لها نهايات طرف واحد . ينتج من النظرية السابقة أن

$$\int_A f = \int_J f_J = \int_c^d \left\{ \int_a^b f_J(x, y)\, dx \right\} dy$$
$$= \int_c^d \left\{ \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx \right\} dy$$

وهو المطلوب إثباته

تمرينـــــات :

٤٤ – (أ) إذا كانت $A \subseteq \mathbf{R}^p$ ، فإن نقطة تكون نقطة حدودية للفئة A إذا وإذا فقط كانت نقطة حدودية للمكلة $\mathscr{C}(A)$ للفئة A . حينئذ $b(A) = b(\mathscr{C}(A))$.

٤٤ – (ب) نفرض أن $A \subseteq \mathbf{R}^p$ ، ونفرض أن $b(A)$ هى الحدودية للفئة A .

(أ) الفئة $b(A)$ مغلقة فى $\mathbf{R}^p$.

(ب) الداخل $A^\circ = A \setminus b(A)$ مفتوح فى $\mathbf{R}^p$ ويحتوى كل فئة مفتوحة G حيث $G \subseteq A$

(ج) الإقفال $A^- = A \cup b(A)$ مغلق فى $\mathbf{R}^p$ ويكون محتوياً فى كل فئة مغلقة F حيث $A \subseteq F$.

٤٤ – (ج) نفرض أن $A \subseteq \mathbf{R}^p$ ونفرض أن $A^- = A \cup b(A)$ هو إقفال الفئة A . وضح أن $b(A^-) \subset b(A)$. اعط مثالا لتوضح أن التساوى يمكن أن يظل صحيحاً ، ومثالا يوضح أن التساوى يمكن أن يفشل .

٤٤ — (د) نفرض أن A, B فئتين جزئيتين من R^p . وضح أن الحدود لكل الفئات

$$A \cap B, \qquad A \setminus B, \qquad A \cup B$$

يكون محتوياً فى $b(A) \cup b(B)$. (إرشاد : $b(A) = A^- \cap (\mathscr{C}(A))^-$) .

٤٤ — (هـ) تكون فئة $A \subseteq R^p$ مغلقة فى R^p إذاً وإذا فقط كانت $b(A) \subseteq A$
تكون فئة $B \subseteq R^p$ مفتوحة فى R^p إذا وإذا فقط كان $B \cap b(B) = \emptyset$

٤٤ — (و) إذا كانت $A \in \mathscr{D}(R^p)$ ، وضح أن داخلها $A^0 = A \setminus b(A)$ وإقفالها $A^- = A \cup b(A)$ ينتميان أيضاً إلى $\mathscr{D}(R^p)$ وأن $c(A^0) = c(A) = c(A^-)$

٤٤ — (ز) إذا كانت $A \in \mathscr{D}(R^p)$ وكانت $c(A) > 0$ ، أثبت أنه توجد خلية مغلقة $K \subseteq A$ بحيث إن $c(K) \neq 0$.

٤٤ — (ح) إذا كانت $A \subseteq R^p$ ، نعرف المحتوى الداخل والخارجى للفئة A بأنها

$$c_*(A) = \sup c(U), \qquad c^*(A) = \inf c(V),$$

حيث يؤخذ الحد الأعلى على فئة كل للاتحادات المحدودة لخلايا محتوية فى A ، ويؤخذ الحد الأسفل على فئة كل الاتحادات المحدودة لخلايا تحتوى نقطا من الفئة A .

(أ) أثبت أن $c_*(A) \leq c^*(A)$ وأن A لهـا محتوى إذا وإذا فقط كان $c_*(A) = c^*(A)$ ، فى هذه الحالة تكون $c(A)$ هى هذه القيمة المشتركة .

(ب) إذا كانت A, B فئتين جزئيتين غير متصلتين للفراغ R^p ؛ وضح أن
$c^*(A \cup B) \leq c^*(A) + c^*(B)$

(ج) أعط مثالا لفئتين غير متصلتين A, B بحيث إن $0 \neq c^*(A) = c^*(B) = c^*(A \cup B)$

٤٤ — (ط) نفرض أن $M \in N$ ونفرض أن $I_M \subseteq R^p$ هو مكعب بنصف طوله هو 2^M ومركزه 0 . عند $n \in N$ نقسم I_M . إلى شبكة $G_{M,n}$ طولها 2^{-n} المكون بمجموعة كل المكعبات فى I_M بطول جانبى 2^{-n} وبنقط طرفية قياسية زوجية المقام (أى إن ، نقط طرفيه على الصورة $k/2^n$ حيث $k \in Z$)

(أ) إذا كانت $J \subseteq I_M$ خلية مغلقة وكانت $\varepsilon > 0$ ، وضح أنه يوجد $n \in N$ بحيث أن الاتحاد لكل المكعبات فى $G_{M,n}$ التى تكون محتوية فى J له محتوى كل يزيد من $c(J) - \varepsilon$ والاتحاد لكل المكعبات فى $G_{M,n}$ الذى يحتوى نقطا فى J له محتوى كلى أقل من $c(J) + \varepsilon$.

(ب) إذا كانت $A \subseteq I_M$ لها محتوى وكانت $\varepsilon > 0$ ، وضح أنه توجد $n \in N$ بحيث إن الاتحاد لكل المكعبات فى $G_{M,n}$ التى تكون محتوية فى A لها محتوى كلى يزيد عن

$c(A)+\varepsilon$ والاتحاد لكل المكعبات فى $G_{M,n}$ الذى يحتوى نقطا فى A له محتوى كل أقل من $c(A)+\varepsilon$.

٤٤ – (ى) نفترض أن $I \subseteq \mathbf{R}^p$ خلية مغلقة ونفرض أن $f: I \to \mathbf{R}$ قابلة للتكامل على I . إذا كانت $A \subseteq I$ لها محتوى ، فإن تقييد الدالة f إلى A يكون قابلا للتكامل على A . (إرشاد : استخدم تمرين ٤٣ – ع) .

٤٤ – (ك) نفرض أن $A \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ ونفرض أن g و f قابلتان للتكامل على A وأن $g(x) \geq 0$ لكل $x \in A$. إذا كانت $m = \inf f(A),\ M = \sup f(A)$ فإنه يوجد عدد حقيق $\mu \in [m, M]$ بحيث إن

$$\int_A fg = \mu \int_A g$$

٤٤ – (ل) إذا فرضنا بالإضافة إلى الفرض الموجود بالتمرين السابق أن A موصولة وأن f متصلة على A ، حينئذ توجد نقطة $p \in A$ بحيث إن

$$\int_A fg = f(p) \int_A g$$

٤٤ – (م) نفرض أن $\{(x_n, y_n) : n \in \mathbf{N}\}$ هى سرد النقط فى $(0, 1) \times (0, 1)$ بإحداثيات قياسية لكل $n \in \mathbf{N}$ ، نفرض أن I_n خلية مفتوحة فى $(0, 1) \times (0, 1)$ تحتوى على (x_n, y_n) ونفرض أن $G = \bigcup_{n\in N} I_n$. أثبت أن G هى فئة مفتوحة فى $\mathbf{R}^2$ حدودها $b(G)$ هى $(0,1)\times(0,1)\setminus G$ أثبت أنه إذا كانت $\sum c(I_n) < 1$ ، فإن الفئة المفتوحة G ليس لها محتوى .

٤٤ (ن) – استخدم المصطلحات العلمية الموجودة فى تمرين (٧ – ك) ، نفرض أن $A \subseteq [0, 1]$ هى فئة « مثل فئة كنتور » طولها $\frac{1}{2}$. إذا كانت $K = A \times [0, 1]$ أن K هى فئة جزئية مدمجة من $\mathbf{R}^2$ ، وأن $b(K) = K$ ، وأن K ليس لها محتوى .

٤٤ – (س) نفرض أن $a \leq b$ ونفرض أن $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ متصلة وبحيث أن $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a, b]$ نفرض أن $S_f = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ تسمى فئة الأحداثى الرأسى للدالة f. بفحص حدود الفئة S_f أثبت أن لها محتوى . أثبت أن

$$c(S_f) = \int_a^b \left\{ \int_0^{y=f(x)} 1dy \right\} dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

٤٤ – (ع) نفرض أن $A \subseteq \mathbf{R}^2$ هى الفئة المذكورة فى تمرين (٤٣ – هـ) ونفرض أن f معرفة على $Q = [0,1]\times[0,1] \to \mathbf{R}$ بأنها $f(x, y) = 1$ عند $(x, y) \in A$ وبأن $f(x, y) = 0$ فيما عدا ذلك. وضح أن A ليس لها محتوى وأن f ليست قابلة للتكامل على Q . لكن ، التكاملات المكررة موجودة وتحقق

$$\int_0^1\left\{\int_0^1 f(x, y)\, dx\right\} dy = \int_0^1\left\{\int_0^1 f(x, y)\, dy\right\} dx$$

٤٤ – (ف) نفرض أن $Q=[0,1]\times[0,1]$ ونفرض أن $f:Q\to \boldsymbol{R}$ معرفة بأنها $f(x, y) = 0$ إذا كانت إما x وإما y غير قياسية وأن $f(x, y) = 1/n$ إذا كانت y قياسية وكانت $x = m/n$ حيث $n > 0$ و m هما عددان صحيحان أوليان نسبياً .
وضح أن

$$\int_Q f = \int_0^1\left\{\int_0^1 f(x, y)\, dx\right\} dy = 0$$

لكن $\int_0^1 f(x, y)\, dy$ غير موجود لعدد قياسي x .

٤٤ – (ص) نفرض أن $J \subseteq \boldsymbol{R}^2$ خلية مفتوحة تحتوى $(0, 0)$ ونفرض أن $f:J\to \boldsymbol{R}$ متصلة على J . عرف $F:J\to \boldsymbol{R}$ بالتكامل المكرر :

$$F(x, y) = \int_0^x\left\{\int_0^y f(s, t)\, dt\right\} ds$$

وضح أن $D_2D_1F(x, y) = f(x, y) = D_1D_2F(x, y)$ عند $(x, y)\in J$

٤٤ – (ق) نفرض أن J هى كما فى التمرين السابق ونفرض أن $G:J\to R$ بحيث إن D_2D_1G متصلة على J . استخدم هذا التمرين لإثبات أن D_1D_2G موجود ويساوى D_2D_1G .

٤٤ – (ر) نفرض أن $J=[a_1, b_1]\times\cdots\times[a_p, b_p]$ ونفرض أن $f:J\to \boldsymbol{R}$ متصلة . نفرض أن $J_{(1)}=[a_2, b_2]\times\cdots\times[a_p, b_p]$ فى $\boldsymbol{R}^{p-1}$ ونفرض أن $F_{(1)}:J_{(1)}\to \boldsymbol{R}$ معرف بأنه

$$F_{(1)}(x_2, \ldots, x_p) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1$$

(أ) وضح أن $F_{(1)}$ متصلة على $J_{(1)}$.

(ب) بأخذ $(x_2^*, \ldots, x_p^*)$ فى $J_{(1)}$ وأى تقسيم :
$a_1 = x_{1,0} < x_{1,1} < \cdots < x_{1,n} = b_1$ للفترة $[a_1, b_1]$ ، أثبت أنه توجد نقط $x_{1,k}^*$ فى الفترة $[x_{1,k-1}, x_{1,k}]$ بحيث إن

$$F_{(1)}(x_2^*, \ldots, x_p^*) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{1,k}^*, x_2^*, \ldots, x_p^*)(x_{1,k} - x_{1,k-1})$$

(ج) أثبت أن

$$\int_{J_{(1)}} F_{(1)}(x_2, \ldots, x_p)\, d(x_2, \ldots, x_p) = \int_{J_{(1)}}\left\{\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1\right\} d(x_2, \ldots, x_p)$$
$$= \int_J f(x_1, \ldots, x_p)\, d(x_1, \ldots, x_p)$$

(د) اعمل امتداداً للنتيجة لحالة التي فيها تكون لكل نقطة $(x_2, \ldots, x_p)$ في $J_{(1)}$ الدالة $x_1 \mapsto F(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ للفترة $[a_1, b_1] \to \boldsymbol{R}$ متصلة ما عدا إمكانية عند عدد محدود من نقط التي عندها لها نهايات طرف واحد .

٤٤ – (ش) (أ) نفرض أن $\alpha, \beta : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ متصلة حيث $\alpha(x) \leq \beta(x)$ لكل $x \in [a, b]$. وضح أن الفئة

$$B = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

مدمجة في $\boldsymbol{R}^2$ بمحتوى .

(ب) نفرض الآن أن $\gamma, \delta : B \to \boldsymbol{R}$ دالتان متصلتان حيث $\gamma(x, y) \leq \delta(x, y)$ لكل $(x, y) \in B$. أثبت أن الفئة

$$D = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 : (x, y) \in B, \gamma(x, y) \leq z \leq \delta(x, y)\}$$

مدمجة في $\boldsymbol{R}^3$ بمحتوى .

(ج) إذا كانت $f : D \to \boldsymbol{R}$ متصلة ، أثبت أن f قابلة للتكامل على D وأن

$$\int_D f = \int_a^b \left\{ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left\{ \int_{\gamma(x, y)}^{\delta(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right\} dy \right\} dx$$

٤٤ – (ت) نفرض أن $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ ولكل $j = 1, \ldots, p$ نفرض أن $f_j : [a_j, b_j] \to \boldsymbol{R}$ هي دالة قابلة للتكامل .

إذا كانت $\varphi : I \to \boldsymbol{R}$ معرفة بأنها $\varphi(x_1, \ldots, x_p) = f_1(x_1) \cdots f_p(x_p)$ أثبت أن φ قابلة للتكامل على I وأن

$$\int_I \varphi = \left\{ \int_{a_1}^{b_1} f_1 \right\} \cdots \left\{ \int_{a_p}^{b_p} f_p \right\}$$

٤٤ – (ث) استخدم نظرية تقريب فير اشتراس لتوضح أنه إذا كانت $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ وإذا كانت $g : I \to \boldsymbol{R}$ متصلة ، فإن

$$\int_I g = \int_{a_1}^{b_1} \left\{ \int_{a_2}^{b_2} \cdots \left\{ \int_{a_p}^{b_p} g(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_p \right\} \cdots dx_2 \right\} dx_1$$

٤٤ – (خ) نفرض أن $\varphi : [0, +\infty) \to \boldsymbol{R}$ حيث $\varphi(0) = 0$ متصلة ، غير محدودة ، وتزايدية بدقة ، ونفرض أن ψ هي دالتها العكسية . حينئذ تكون ψ أيضاً متصلة وتزايدية بدقة على $[0, +\infty)$.

(أ) إذا كانت α, β عددين موجبين ، قارن المساحة الفترة $[0, \alpha] \times [0, \beta]$ بالمساحة المحصورة بين محور الاحداثيات ومنحنى φ لتحصل على متباينة ينج :

$$\alpha\beta \le \int_0^\alpha \varphi + \int_0^\beta \psi$$

(ب) إذا كانت $q \ge 1$ و $p \ge 1$ بحيث إن $(1/p) + (1/q) = 1$ وإذا كانت $\varphi(x) = x^{p/q}$ وكانت $\psi(y) = y^{q/p}$ ، استخدم متباينة ينج لإثبات المتباينة

$$\alpha\beta \le \alpha^p/p + \beta^q/q$$

(ج) إذا كانت $a_i, b_i, i = 1, \ldots, n$ أعداداً حقيقية وإذا كانت $A = (|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p)^{1/p}$ ، $B = (|b_1|^q + \cdots + |b_n|^q)^{1/q}$ استخدم المتباينة السابقة لاشتقاق متباينة هولدر

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \le AB$$

التي حصلنا عليها في مشروع (٨ - β) (ب) .

مشروعات :

٤٤ - α نفرض أن $I \subseteq R^p$ خلية مغلقة ونفرض أن $f: I \to R$ محدودة . عند $\alpha > 0$ نفرض أن $D_\alpha = \{x \in I : \omega_f(x) \ge \alpha\}$ حيث $\omega_f(x)$ تدل على تذبذب الدالة f عند x (انظر مشروع ٣٣ - α) .

(أ) نفرض أن D_α لها محتوى صفر . نفرض أن $P_\alpha = \{I_1, \ldots, I_n\}$ تقسيم من I بحيث إن (i) كل نقطة من D_α تكون محتوية في داخل إحدى الخلايا $I_1, \ldots, I_r (r \le n)$ (ii) $c(I_1) + \cdots + c(I_r) \le \alpha/2 \|f\|_I$ ، (iii) إذا كانت $x, y \in K_j$ عند $j = r+1, \ldots, n$ فإن $|f(x) - f(y)| < \alpha$. إذا كانت P تكريراً من P_α أثبت أن

$$|S(P;f) - S(P_\alpha;f)| \le \alpha(c(I) + 1)$$

(ب) استنتج أنه إذا كانت D_α لها محتوى صفر لكل $\alpha > 0$ ، فإن f قابلة للتكامل على I .

(ج) نفرض أنه عند قيمة ما $\alpha > 0$ ، يكون المحتوى الخارجي $c^*(D_\alpha) > 0$. وضح أنه عند تقسيم ما $P = \{J_1, \ldots, J_n\}$ من I نجد أن

$$\sum_{j=1}^n (M_j - m_j) c(J_j) \ge \alpha c^*(D_\alpha)$$

استنتج أن f ليست قابلة للتكامل على I .

(د) استنتج أن f تكون قابلة للتكامل على I إذا وإذاً فقط كان للفئة D_α محتوى صفر لكل $\alpha > 0$

(هـ) تذكر أن $D - \bigcup_{n\in N} D_{1/n}$ هي فئة النقط التي عندها f ليست متصلة . أثبت أن لها مقياس صفر (بمفهوم تمرين ٤٣ – ت) إذا وإذاً فقط كان لكل فئة $D_{1/n}$ محتوى صفر .

(و) استنتج أن f قابلة للتكامل على I إذا وإذاً فقط كان للفئة D لنقط عدم اتصال لها مقياس صفر . (هذه النتيجة هي معيار ليبيج لقابلية التكامل) .

٤٤ – β يدرس هذا المشروع التكاملين العلوى والسفلى (المذكورين فى ٤٣ – α) وتكرارهما إذا فرضنا أن $I \subseteq R^r$ و $J \subseteq R^s$ خليتان مغلقتان ، $p = r + s$ ، ونفرض أن $K = I \times J \subseteq R^p = R^r \times R^s$. نفرض أن $f: K \to R$ محدودة .

(أ) لكل $x \in I$ ، عرف $g_x: J \to R$ بأنها $g_x(y) = f(x, y)$ عند $y \in J$. نفرض أن $\lambda: I \to R$ معرفة بأنها التكامل السفلى $\lambda(x) = L(g_x)$ وأن $\mu: I \to R$ معرفة بأنها التكامل العلوى $\mu(x) = U(g_x)$ من g_x . إذا كانت R أى تقسيم من I ، وكانت S أى تقسيم من J ، وكان $P = R \times S$ هو التقسيم الناتج من K ، حينئذ أثبت أن

$$L(P; f) \le L(R; \lambda) \le U(R; \lambda) \le U(R; \mu) \le U(P; f)$$

(ب) أثبت أن

$$L(f) \le L(\lambda) \le U(\lambda) \le U(f), \qquad L(f) \le L(\mu) \le U(\mu) \le U(f)$$

ومن ثم ، إذا كانت f قابلة للتكامل على K ، فإن μ و λ قابلتان للتكامل على I وأن

$$\int_K f = \int_I \lambda = \int_I \mu$$

(ج) لكل $y \in J$ ، عرف $h_y: I \to R$ بأنها $h_y(x) = f(x, y)$ عند $x \in I$ نفرض أن $\lambda': J \to R$ وأن $\mu': J \to R$ معرفة بأنها

$$\lambda'(y) = L(h_y), \qquad \mu'(y) = U(h_y)$$

أثبت أنه إذا كانت f قابلة للتكامل على K ، فإن μ' و λ' قابلتان للتكامل عند J وأن

$$\int_K f = \int_J \lambda' = \int_J \mu'$$

(د) إذا كانت $g_x: J \to R$ قابلة للتكامل على J لكل $x \in I$ ، فإن $\lambda = \mu$ وأن

$$\int_K f(x, y)\, d(x, y) = \int_K f = \int_J \left\{ \int_I f(x, y)\, dy \right\} dx$$

بالمثل ، إذا كانت $h_y: I \to R$ قابلة للتكامل على I لكل $y \in J$ فإن

$$\int_K f(x, y)\, d(x, y) = \int_K f = \int_I \left\{\int_J f(x, y)\, dx\right\} dy$$

٤٤ – γ نفرض أن $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$ مفتوحة ونفرض أن $\mathcal{D}(\Omega)$ مجموعة من كل الفئات $A \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ حيث $A^- \subseteq \Omega$ ستقدم فى هذا المشروع مفهوم الدالة القابلة للجمع على $\mathcal{D}(\Omega)$ « و كثافتها القوية » يقال لدالة $G : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{R}$ إنها قابلة للجمع إذا كانت

$$G(A \cup B) = G(A) + G(B)$$

طالما $A \cap B = \emptyset$ و $A, B \in \mathcal{D}(\Omega)$.

(أ) إذا كانت $f : \Omega \to \mathbf{R}$ قابلة للتكامل على كل فئة فى $\mathcal{D}(\Omega)$ وإذا عرفنا $F : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{R}$ بأنها

$$F(A) = \int_A f$$

حينئذ F تكون قابلة للجمع على $\mathcal{D}(\Omega)$.

(ب) نفرض أن $G : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{R}$ دالة قابلة للجمع ونفرض أن $g : \Omega \to \mathbf{R}$. نقول إن g كثافة قوية للدالة G ، إذا كان يوجد لكل $\varepsilon > 0$ وكل فئة $A \in \mathcal{D}(\Omega)$ ، $\delta > 0$ بحيث إنه إذا كانت K مكعباً مغلقاً طول ضلعه أقل من δ محتوى فى Ω وإذا كانت $x \in A \cap K$ ، فإن

$$\left| \frac{G(K)}{c(K)} - g(x) \right| < \varepsilon$$

(ج) نفرض أن $\Omega = \mathbf{R}^p$. وضح أن الدالة المحتوية $c : \mathcal{D}(\mathbf{R}^p) \to \mathbf{R}$ لها كثافة قوية محايدة تساوى الواحد الصحيح على $\mathbf{R}^p$.

(د) نفرض أن $\mu : \mathcal{D}(\mathbf{R}^p) \to \mathbf{R}$ دالة قابلة للجمع موجبة التى لاتتغير تحت نقل الفئات [أى أن $\mu(x + A) = \mu(A)$ لكل $x \in \mathbf{R}^p, A \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$] . أثبت أن μ لها كثافة قوية ثابتة على $\mathbf{R}^p$.

(هـ) إذا كانت $f : \Omega \to \mathbf{R}$ متصلة وإذا كانت F معرفة كما فى (أ) ، أن F لها كثافة قوية f على Ω .

(و) إذا كانت $G : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{R}$ قابلة للجمع ولها كثافة قوية $g : \Omega \to \mathbf{R}$ وضح أن g متصلة على Ω . ومن ثم تكون g متصلة بانتظام على كل $A \in \mathcal{D}(\Omega)$.

(ز) نفرض أن $G : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{R}$ قابلة للجمع ولها كثافة قوية تساوى صفراً تطابقياً على Ω . وضح أنه إذا كانت K مكعباً مقفلا وإذا كانت $\varepsilon > 0$ ، فإنه يوجد تقسيم للمكعب K إلى مكعبات $\{K_1, \ldots, K_r\}$ بحيث إن $|G(K_j)| \le \varepsilon c(K_j)$ عند $j = 1, \ldots, r$

وإذن ينتج أن $|G(K)| \le \varepsilon c(\bar{K})$. استنتج أن $G(K) = 0$ لكل مكعبات مغلقة $K \subset \Omega$

(ح) نفرض أن F_2 و F_1 دالتان قابلتان للجمع على $\mathscr{D}(\Omega)$ بحيث إنه لكل قيمة ما $M > 0$ نجد أن $|F_i(A)| \le Mc(A)$ لكل $A \in \mathscr{D}(\Omega),\ j = 1, 2.$

إذا كانت $F_1(K) = F_2(K)$ لكل مكعب $K \subseteq \Omega$ ، أثبت أن $F_1(A) = F_2(A)$ لكل $A \in \mathscr{D}(\Omega)$

الباب الخامس والأربعون ــ تحويلات لفئات ولتكاملات :

لاحظنا فى باب ٤٣ أن الرواسم المتصلة على فترة فى R يمكن أن تغطى مكعباً مغلقاً فى R^2 . سنوضح أن هذه الظاهرة لايمكن أن تحدث إذا كان الراسم فى صنف C^1 وسوف ندرس الراسم لفئات بمحتوى تحت C^1 رواسم حال الراسم خطى مهمة بوجه خاص . والنتيجة بسيطة بدرجة كافية . فى الحالة الراسم غير الخطى ، سيتضح أن جاكوبيان الراسم يدل على درجة التواء التحويل .

ستستخدم هذه النتائج لإثبات نظرية تتعلق « بتغيير المتغير » لتكامل على فئة فى R^p . تفحص الحالات الخاصة للاحداثيات القطبية والكروية باختصار ، ونعطى نظرية أقوى تستخدم لتحويلات كثيرة تعرض كية رقيقة من الإفرادات .

٤٥ ــ ١ مفترض . الفئة $\Omega \subseteq R^p$ مفتوحة ونفرض أن $\varphi : \Omega \to R^p$ تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$. نفرض أن A فئة محدودة حيث $A^- \subseteq \Omega$. حينئذ توجد فئة مفتوحة Ω_1 حيث $A^- \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega_1^- \subseteq \Omega$ ومقدار ثابت $M > 0$ بحيث إنه إذا كانت A محتوية فى الاتحاد لعدد محدود من مكعبات مغلقة فى Ω_1 بمحتوى كلى α ، على الأكثر ، فإن $\varphi(A)$ تكون محتواة فى الاتحاد لعدد محدود من مكعبات مغلقة بمحتوى كلى $(\sqrt{p}\, M)^p \alpha$ على الأكثر .

البرهان . إذا كانت $\Omega = R^p$ ، نفرض أن $\delta = 1$ ؛ وإلا نفرض أن $\delta = \frac{1}{2} \inf \{\|a - x\| ، a \in A \ ,\ x \notin \Omega\}$ وبما أن A^- مدمجة ، فينتج أن $\delta > 0$. (لماذا ؟) الآن نفرض أن $\Omega_1 = \ y \in R^p : \|y - a\| < \delta$ عند بعض $a \in A$ أى إن Ω_1 تكون مفتوحة ومحدودة وأن $A^- \subseteq \Omega_1$ ، $\Omega_1^- \subseteq \Omega$ وبما أن $\varphi \in C^1(\Omega)$ ، Ω_1^- مدمجة ، فينتج أن $M = \sup \{\|D\varphi(x)\|_{pp} : x \in \Omega_1\}$ محدودة . إذا كانت $A \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_n$ ، حيث I_j هى مكعبات مغلقة محتواة فى Ω_1 ، حينئذ ينتج من نتيجة ٤٠ ــ ٦ أنه عند $x, y \in I_j$ يكون

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \le M \|x - y\|$$

نفرض أن طول الضلع المكعب I_j هو $2r_j$ وتأخذ x مركزاً للمكعب I_j ؛ حينئذ إذا كانت $y \in I_j$ ، فإن $\|x-y\| \le \sqrt{p}\, r_j$ وكذلك $\|\varphi(x)-\varphi(y)\| < \sqrt{p}\, Mr_j$ أى إن $\varphi(I_j)$ تكون محتواة فى مكعب مغلق طول ضلعه $2\sqrt{p}\, Mr_j$. ومن ثم ينتج أن $\varphi(A)$ تكون محتواة فى الاتحاد لعدد محدود لمكعبات مغلقة بمحتوى كلى $(\sqrt{p}\, M)^p\alpha$ على الأكثر .

٤٥ – ٢ نظرية . إذا كانت $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^p$ مفتوحة ونفرض أن $\varphi : \Omega \to \boldsymbol{R}^p$ تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$ إذا كانت $A \subset \Omega$ لها محتوى صفر وإذا كانت $A^- \subseteq \Omega$ ، حينئذ $\varphi(A)$ لها محتوى صفر .

البرهان : استخدم المفترض عند $\alpha > 0$ اختيارية . وهو المطلوب إثباته

٤٥ – ٣ نتيجة . نفرض ان $r < p$ ونفرض أن $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^r$ مفتوحة ونفرض أن $\psi : \Omega \to \boldsymbol{R}^p$ تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$. إذا كانت $A \subseteq \Omega$ فئة محدودة حيث $A^- \subseteq \Omega$ ، حينئذ $\psi(A)$ لها محتوى صفر فى $\boldsymbol{R}^p$.

البرهان . نفرض أن $\Omega_0 = \Omega \times \boldsymbol{R}^{p-r}$ بحيث أن Ω_0 مفتوحة فى $\boldsymbol{R}^p$ ، وعرف $\varphi : \Omega_0 \to \boldsymbol{R}^p$ بأنها

$$\varphi(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_p) = \psi(x_1, \ldots, x_r)$$

وضح أن $\varphi \in C^1(\Omega_0)$. نفرض $A_0 = A \times \{0, \ldots, 0\}$ بحيث إن $A_0^- \subseteq \Omega_0$ وأن A_0 لها محتوى صفر فى $\boldsymbol{R}^p$. ينتج أن $\psi(A) = \varphi(A_0)$ لها محتوى صفر فى $\boldsymbol{R}^p$.
وهو المطلوب إثباته

نلاحظ أن هذه النتيجة تؤكد أن الصورة C^1 لأى فئة محدودة « أقل بعدية أى لها أبعاد أقل » لها محتوى صفر

بما أن الحدود لفئة A بمحتوى لها محتوى صفر ، فينتج من نظرية (٤٥ – ٢) أنه إذا كانت φ فى الصنف C^1 فإن $\varphi(b(A))$ لها محتوى صفر . لسوء الحظ $\varphi(b(A))$ تحتاج إلى علاقة بسيطة ، بوجه عام ، مع $b(\varphi(A))$. هذه الملاحظة تحسن الاهتمام بالنتيجتين الآتيتين .

٤٥ – ٤ نظرية . نفرض أن $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^p$ مفتوحة ونفرض أن $\varphi : \Omega \to \boldsymbol{R}^p$ تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$ نفرض أن A لها محتوى ، $A^- \subseteq \Omega$ ، وأن $J_\varphi(x) \neq 0$ لكل $x \in A^0$. حينئذ $\varphi(A)$ لها محتوى .

البرهان . بما أن A^- مدمجة وأن φ متصلة ، حينئذ $\varphi(A) \subseteq \varphi(A^-)$ تكون محدودة لإثبات أن $\varphi(A)$ لها محتوى سنوضح أن $b(\varphi(A)) \subseteq \varphi(b(A))$ وأن $\varphi(b(A))$ لها محتوى صفر .

بما أن $\varphi(A^-)$ مدمجة ، فنجد أن $b(\varphi(A))\subset\varphi(A^-)=\varphi(A^0\cup b(A))$ حينئذ ، إذ كانت $y\in b(\varphi(A))$ ، فإنه يوجد $x\in A^0\cup b(A)$ بحيث إن $y=\varphi(x)$ إذا كانت $x\in A^0$ ، فإن $J_\varphi(x)\neq 0$ وينتج من نظرية الراسم الفوق (٤١ – ٦) أن $y=\varphi(x)$ هى نقطة داخلية من $\varphi(A^0)\subset\varphi(A)$. لكن هذا يخالف الفرض بأن $y\in b(\varphi(A))$. لذلك نستنتج أن $b(\varphi(A))\subseteq\varphi(b(A))$

الآن ، بما أن A لها محتوى ، فإن حدودها $b(A)\subseteq\Omega$ فئة خالية بمحتوى صفر ، وإذن ينتج من نظرية (٤٥ – ٢) أن $\varphi(b(A))$ لها محتوى صفر .

وهو المطلوب إثباته.

٤٥ – ٥ نتيجة . نفرض $\Omega\subseteq \boldsymbol{R}^p$ مفتوحة ، ونفرض أن $\varphi:\Omega\to\boldsymbol{R}^p$ تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$ وإدخالية فى Ω . إذا كانت A لها محتوى ، $A^-\subseteq\Omega$ ، وكانت $J_\varphi(x)\neq 0$ عند $x\in A^0$ ، حينئذ $b(\varphi(A))=\varphi(b(A))$.

البرهان . يكفى أن نوضح أن $\varphi(b(A))\subseteq b(\varphi(A))$ ، لأن النتيجة العكسية قد أثبتت أثناء برهان النظرية . نفرض أن $x\in b(A)$. أى إنه توجد متتابعة (x_n) فى A ومتتابعة (y_n) فى $\Omega\setminus A$ ، كل منهما يقترب من x . بما أن φ متصلة ، فإن $\varphi(x_n)\to\varphi(x)$ وأن $\varphi(y_n)\to\varphi(x)$. بما أن φ إدخالية على Ω ، فإن $\varphi(y_n)\notin\varphi(A)$ ومن ثم $\varphi(x)\in b(\varphi(A))$. لذلك $\varphi(b(A))\subseteq b(\varphi(A))$

تحويلات برواسم خطية :

سنوضح الآن أن الفئات بمحتوى ترسم برواسم خطى فى الفراغ $\boldsymbol{R}^p$ إلى الفئات محتواها هو مضاعف ثابت للمحتوى الأصلى . فبالإضافة إلى ذلك ، هذا المضاعف هو القيمة المطلقة للمحدد المناظر للراسم الخطى . (فى هذه النظرية سوف نفترض أن المدلول وخواص أولية لمحدد الراسم خطى فى $\boldsymbol{R}^p$ مألوفة للقارىء).

٤٥ – ٦ نظرية . نفرض أن $L\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^p)$. إذا كانت $A\in\mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^p)$ ، فإن $c(L(A))=|\det L|\,c(A)$.

البرهان . إذا كانت L فريدة (شاذة أى إنه ، إذا كانت $\det L=0$) فإن L ترسم $\boldsymbol{R}^p$ إلى فراغ جزئى خطى صحيح من الفراغ $\boldsymbol{R}^p$. بما أن هذا الفراغ الجزئى يمكن أيضاً الحصول عليه كصورة لمقدار ما $L':\boldsymbol{R}^r\to\boldsymbol{R}^p$ حيث $r<p$ ، فينتج من نتيجة (٤٥ –٣) أن $c(L(A))=0$ لكل $A\in\mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^p)$. ومن ثم تكون النظرية صحيحة لرواسم خطية فريدة (شاذة)

إذا كان L ليس فريداً (أى إنه ، إذا كانت $L \neq 0$) ، حينئذ تدل نظرية (٤٥-٤) على أنه إذا كانت $A \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R}^p)$ ، فإن $L(A) \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R}^p)$ نعرف الآن $\lambda : \mathscr{D}(\boldsymbol{R}^p) \to \boldsymbol{R}$ بأنها $\lambda(A) = c(L(A))$. (i) من الواضح أن $\lambda(A) \geq 0$ لجميع $A \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R}^p)$ (ii) نفرض أن $A, B \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R}^p)$ وأن $A \cap B = \emptyset$ حينئذ

$$\lambda(A \cup B) = c(L(A \cup B)) = c(L(A) \cup L(B))$$

بما أن L راسم إدخالى ، إذن $L(A) \cap L(B) = \emptyset$ ومن ثم

$$c(L(A) \cup L(B)) = c(L(A)) + c(L(B)) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

(iii) إذا فرضنا أن $x \in \boldsymbol{R}^p$ وأن $A \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R}^p)$ ؛ فإن

$$\lambda(x + A) = c(L(x + A)) = c(L(x) + L(A)) = c(L(A)) = \lambda(A)$$

لذلك ينتج من نتيجة (٤٤ - ٧) أنه يوجد مقدار ثابت $m_L \geq 0$ بحيث إن :

$$\lambda(A) = m_L c(A) \quad \text{لكل} \quad A \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R}^p)$$

نبحث بعد ذلك كيفية توقف m_L على $L \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^p)$. نفرض أن $M \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^p)$ ليست فريدة ؛ حينئذ إذا كانت $A \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R}^p)$ ، نجد أن

$$\begin{aligned} m_{L \circ M} c(A) &= c(L \circ M(A)) = c(L(M(A))) \\ &= m_L c(M(A)) = m_L m_M c(A)) \end{aligned}$$

ومن ثم يكون $m_{L \circ M} = m_L m_M$ لجميع $L, M \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^p)$ غير الفريدة

يتبقى أن نوضح أن $m_L = |\det L|$ لإجراء هذا سوف نستعمل الحقيقة من الجبر الخطى التى تقول إن كل غير فريدة $L \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^p)$ هى تركيب رواسم خطية على الصور الثلاث الآتية :

(أ) $L_1(x_1, \ldots, x_p) = (\alpha x_1, x_2, \ldots, x_p)$ for some $\alpha \neq 0$

(ب) $L_2(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_p)$

(ج) $L_3(x_1, \ldots, x_p) = (x_1 + x_2, x_2, \ldots, x_p)$

لاحظ أنه إذا كانت K_0 هى المكعب النصف مفتوح $[0, 1) \times \cdots \times [0, 1)$ فى الفراغ $\boldsymbol{R}^p$ وإذا كانت $\alpha > 0$ ، فإن $L_1(K_0) = [0, \alpha) \times [0, 1) \times \cdots \times [0, 1)$ ومن ثم ينتج أن

$$\alpha = c(L_1(K_0)) = m_{L_1} c(K_0) = m_{L_1}$$

بالمثل ، إذا كانت $\alpha < 0$ ، فإن $L_1(K_0) = (\alpha, 0] \times [0, 1) \times \cdots \times [0, 1)$ وأن

$$-\alpha = c(L_1(K_0)) = m_{L_1} c(K_0) = m_{L_1}$$

ومن ثم ، فى أى حالة نجد أن $m_{L_1}=|\alpha|=|\det L_1|$

بما أن $L_2(K_0)=K_0$ ، فينتج أن $m_{L_2}=1=|\det L_2|$

أخيراً ، نفرض أن Δ_2 و Δ_1 هما الفئتان

$$\Delta_1=\{(x_1,\ldots,x_p):0\le x_i<1,\ x_1<x_2\}$$
$$\Delta_2=\{(x_1,\ldots,x_p):0\le x_i<1,\ x_2\le x_1\}$$

من الواضح أن $\Delta_1\cap\Delta_2=\emptyset$ و $K_0=\Delta_1\cup\Delta_2$. بما أنه يمكن ملاحظة أن

$$L_3(K_0)=\Delta_2\cup\{(1,0,\ldots,0)+\Delta_1\}$$

فينتج أن

$$c(L_3(K_0))=c(\Delta_2)+c((1,0,\ldots,0)+\Delta_1)=c(\Delta_2)+c(\Delta_1)$$
$$=c(\Delta_1\cup\Delta_2)=c(K_0)$$

ومن ثم $m_{L_3}=1=|\det L_3|$

نفرض الآن أن الراسم الخطى غير الشاذ (الفريد) L هو تركيب الرواسم الخطية $L_1, L_2, \ldots, L_r$ له إحدى الصور الثلاث السابقة . بما أن

$$m_L=m_{L_1\circ L_2\circ\cdots\circ L_r}=m_{L_1}m_{L_2}\cdots m_{L_r}$$
$$=|\det L_1|\,|\det L_2|\cdots|\det L_r|$$
$$=|(\det L_1)(\det L_2)\cdots(\det L_r)|$$
$$=|\det(L_1\circ L_2\circ\cdots\circ L_r)|=|\det L|$$

فتكون النظرية قد برهنت وهو المطلوب إثباته

تحويل برواسم ليست خطية :

سوف نحصل الآن على امتداد لنظرية ٤٥-٦ الرواسم C^1غير الخطية . بالطبع ، فى هذه الحالة لا يحتاج المحتوى للصورة للفئة اختيارية مضاعف ثابت لمحتوى الفئة المعطاة ، لكن ربما يتغير من نقطة إلى نقطة . تدل نظرية جاكوبيان على أنه إذا كانت K مكعباً صغيرا بكفاية مركزة x ، فإن $c(\varphi(K))$ تساوى تقريباً $|J_\varphi(x)|\,c(K)$. هذه النتيجة قاطعة لإثبات نظرية تغيير المتغيرات . سيكون من المناسب اصطلاحياً اعتبار الحالة الخاصة الآتية أولا :

٤٥ - ٧ مفترض . نفرض أن $K\subseteq R^p$ مكعب مقفل مركزه 0 . نفرض أن Ω فئة مفتوحة تحتوى K ونفرض أن $\psi:\Omega\to R^p$ تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$ وأنه راسم إدخالى . نفرض بالإضافة إلى ذلك أن $J_\psi(x)\neq 0$ عند $x\in K$ وأن

$$(45.1) \qquad \|\psi(x)-x\| \le \alpha \|x\| \qquad for\ x \in K$$

حيث α تحقق $0<\alpha<1/\sqrt{p}$. حينئذ

$$(1-\alpha\sqrt{p})^p \le \frac{c(\psi(K))}{c(K)} \le (1+\alpha\sqrt{p})^p$$

البرهان . ينتج من نظرية ٤٥ – ٤ أن $\psi(K)$ لها محتوى ومن نتيجة ٤٥ – ٥ أن $b(\psi(K)) = \psi(b(K))$. إذا كان طول ضلع K هو $2r$ وإذا كانت $x \in b(K)$ ، فنجد من (نظرية ٨–١٠) أن $r \le \|x\| \le r\sqrt{p}$. تدل المتباينة (٤٥–١) على أن $\psi(x)$ هي على مسافة $\alpha r \sqrt{p}$ من $x \in b(K)$. وإذن لاتقطع الفئة المدمجة $\psi(b(K))=b(\psi(K))$ مكعباً مفتوحاً C_i بمركز 0 وطول ضلع $2(1-\alpha\sqrt{p})r$. إذا فرضنا أن A (على الترتيب ، B) هي الفئة لكل النقط الداخلية (على الترتيب ، النقط الخارجية) من $\psi(K)$ ، حينئذ B و A هما فئتان مفتوحتان غير خاليتين ومنفصلتين باتحاد $R^p \setminus b(\psi(K))$ بما أن C_i' موصـــول فى R^p ، فيجب أن يكون إما $C_i \subseteq A$ أو $C_i \subseteq B$. لكن ، بما أن $0 \in C_i \cap A$ ، نستنتج أن $C_i \subseteq A \subseteq \psi(K)$. يمكن للقارىء بأسلوب مماثل توضيح أنه إذا كان C_o هو المكعب المقفل بمركز 0 وطول ضلع $2(1+\alpha\sqrt{p})r$ ، فإن $\psi(K) \subseteq C_o$. ينتج المطلوب الآن من هذه التضمينات .

٤٥ – ٨ نظرية جاكوبيان . نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ مفتوحة ونفرض أن $\varphi : \Omega \to R^p$ ينتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$ ، وهو راسم إدخالى على Ω ، وأن $J_\varphi(x) \neq 0$ عند $x \in \Omega$ نفرض أن A لها محتوى وأن $A^- \subseteq \Omega$. إذا كانت $\varepsilon > 0$ معطاة ، فإنه يوجد $\gamma > 0$ بحيث إنه إذا كانت K مكعباً مقفلا بمركز $x \in A$ وطول ضلع أقل من 2γ ، فإن

$$(45.2) \qquad |J_\varphi(x)|\,(1-\varepsilon)^p \le \frac{c(\varphi(K))}{c(K)} \le |J_\varphi(x)|\,(1+\varepsilon)^p$$

البرهـــان . شيد $\delta > 0$ ، Ω_1 كما فى برهـــان مفترض ٤٥ – ١ . بما أن $\det D\varphi(x) = J_\varphi(x) \neq 0$ لكل $x \in \Omega$. ، فينتج أن $L_x = (D\varphi(x))^{-1}$ موجودة ، بما أن $1 = \det(L_x \circ D\varphi(x)) = (\det L_x)(\det D\varphi(x))$ ، فينتج أن

$$\det L_x = 1/J_\varphi(x) \qquad \text{for } x \in \Omega$$

بما أن الرموز السفلى فى تمثيل المصفوفة القياسية L_x هى دوال متصلة ، فينتج من إدماج (٢١ – ٤) أنه يوجد مقدار ثابت $M > 0$ بحيث إن $\|L_x\|_{pp} \le M$ لجميع $x \in \Omega_1$.

نفرض الآن أن ε ، حيث $0 < \varepsilon < 1$ ، معطاة . بما أن الراسم $x \to D\varphi(x)$ متصل بانتظام على Ω_1 ، فتوجد β حيث $0 < \beta < \delta$ بحيث إنه إذا كانت $x_1, x_2 \in \Omega_1$ وكانت $\|x_1 - x_2\| \le \beta$ ، فإن $\|D\varphi(x_1) - D\varphi(x_2)\|_{pp} \le \varepsilon/M\sqrt{p}$ نفرض الآن

أن $x \in A$ معطاة ، وإذن إذا كانت $\|z\| \le \beta$ فإن $x+z$ و x تنتميان إلى Ω_1 ومن ثم ينتج من مفترض ٤١ - ٣ أن

$$\|\varphi(x+z)-\varphi(x)-D\varphi(x)(z)\| \le \|z\| \sup_{0\le t\le 1} \|D\varphi(x+tz) \quad D\varphi(x)\|_{pp} \tag{45.3}$$

$$\le \frac{\varepsilon}{M\sqrt{p}}\|z\|$$

نفرض أن $x \in A$ وعرف $\psi(z)$ عند $\|z\| \le \beta$ بأنها

$$\psi(z) = L_x[\varphi(x+z)-\varphi(x)]$$

بما أن $L_x = (D\varphi(x))^{-1}$ ، فإن المتباينة (٤٥ - ٣) تنتج

$$\|\psi(z)-z\| \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}\|z\| \qquad \text{for } \|z\| \le \beta$$

نستخدم الآن المفترض السابق حيث $\alpha = \varepsilon/\sqrt{p}$ لنستنتج أنه إذا كانت K_1 أي مكعب مقفل مركزه 0 ومحتوى في كرة مفتوحة نصف قطرها β ، فإن

$$(1-\varepsilon)^p \le \frac{c(\psi(K_1))}{c(K_1)} \le (1+\varepsilon)^p$$

ينتج من تعريف ψ ونظرية ٤٥ - ٦ أنه إذا كانت $K = x + K_1$ ، فإن K مكعب مغلق مركزه x وأن $c(K) = c(K_1)$ وأن

$$c(\psi(K_1)) = |\det L_x|\, c(\varphi(x+K_1)-\varphi(x))$$

$$= \frac{1}{|J_\varphi(x)|}\, c(\varphi(K))$$

ومن ثم ، إذا كانت K مكعباً مغلقاً مركزه $x \in A$ وطول ضلع أقل من 2γ (حيث $\gamma = \beta/\sqrt{p}$) ، فإن المتباينة (٤٥ - ٢) تظل صحيحة . وهو المطلوب إثباته

تغيير المتغيرات :

سوف نستخدم الآن نظرية جاكوبيان لنحصل على نظرية هامة التي تعطى الحالة العامة في R^p لنظرية تغير المتغيرات ٣٠ - ١٢ . تؤكد النتيجة السابقة أنه إذا كانت $\varphi : [\alpha, \beta] \to R$ لها مشتقة متصلة وأنه إذا كانت الدالة f متصلة على مدى φ ، فإن

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi' \tag{45.4}$$

تختص النتيجة التي ستقررها براسم إدخالي φ معرف على فئة جزئية مفتوحة $\Omega \subseteq R^p$ بقيم في R^p . سنفرض أن $\varphi \in C^1(\Omega)$ وأن محدد جاكوبيان لها

$$J_\varphi(x) = \det[D_j\varphi_i(x)]$$

لا ينعدم على Ω . سيتضح أنه إذا كانت A لها محتوى ، وإذا كانت $A^- \subseteq \Omega$ ، وإذا كانت f محدودة ومتصلة على $\varphi(A)$ إلى R. ، حينئذ $\varphi(A)$ لها محتوى ويكون

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f\circ\varphi)\,|J_\varphi| \qquad (45.5)$$

سيلاحظ أن الفروض تقييدية بدرجة أكثر قليلا عن الحالة التي فيها $p = 1$. في الحقيقة ، في (٤٥ – ٤) لانفترض أن φ إدخالية أو أن $\varphi'(x) \neq 0$ عند $x \in [\alpha, \beta]$. إذا حدث وكانت φ راسما إدخاليا ، نلاحظ أن التماثل الصحيح للنتيجة (٤٥ – ٥) في الحالة $p = 1$ هو

$$\int_A^B f = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\,|\varphi'|$$

حيث $B = \sup\{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\}$ ، $A = \inf\{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\}$. وطبعاً ، إذا كانت $\varphi'(x) > 0$ عند $\alpha \le x \le \beta$ ، فيختزل قانون (٤٥ – ٥) إلى (٤٥ – ٤) ؛ بينما إذا كانت $\varphi'(x) < 0$ عند $\alpha \le x \le \beta$ ، فيختزل قانون (٤٥ – ٥) إلى

$$\int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)} f = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(-\varphi')$$

ومن ثم تنتج (٤٥ – ٤) أيضاً . التفسير لهذا الاختلاف هو أن التكامل على الفترات في R هو « محدد » بالمعنى الذي نعرف به .

$$\int_u^v f = -\int_v^u f$$

لأي عددين حقيقيين u و v . لما يعرف مثل هذا التحديد لتكاملات على R^p .

البرهان المعطى يرجع أصلا إلى ج. ت. اشفارتز(*) وهو أولى بمعنى أنه لا يستفيد من أي النتائج من نظرية القياس . لكن ، المناقشة دقيقة جداً وتستخدم عدداً من خواص أعمق لدوال متصلة ، ومدمجة وفئات مرتبطة ، وخواص التكامل . حتى أيضاً ، النظرية التي ستبرهن ليست كافية تماماً لكل الحالات الهامة التي تظهر وسننميها فيما يلي بصورة أقوى تسمح بانعدام وبجعل $f\circ\varphi$ غير متصلة على فئة بمحتوى صفر .

٤٥ – ٩ نظرية تغيير المتغيرات . نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ مفتوحة ونفرض أن $\varphi : \Omega \to R^p$ تنتمي إلى صنف $C^1(\Omega)$ ، هي راسم إدخالي على Ω ، وأن $J_\varphi(x) \neq 0$

(*) ج.ت اشفارتز (١٩٣٠ —) تخرج من CCNY وحصل على الدكتوراه من جامعة ييل ، وهو أستاذ بمعهد كورانت بجامعة نيويورك . مع أنه معروف جيدا بعمله في التحليل الدالي ، فقد ساهم أيضا في المعادلات التفاضلية ، الهندسية ، ولغات الكمبيوتر ، ومظاهر متعددة للفيزياء الرياضية والاقتصاديات الرياضية .

عند $x \in \Omega$. نفرض أن A لها محتوى ، $A \subseteq \Omega$ ، وأن $f : \varphi(A) \to \mathbf{R}$ محدودة ومتصلة . حينئذ .

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi)\,|J_\varphi| \tag{45.5}$$

البرهان . ينتج من نظرية ٤٥ – ٤ أن $\varphi(A)$ لها محتوى . بما أن الدوال المراد تكاملها متصلة ، فينتج أن التكاملات فى (٤٥ – ٥) موجودة ؛ يتبقى إثبات المتساوية . بفرض $f = f^+ - f^-$ ، حيث $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$ ونفرض $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ وباستخدام خطية التكامل ، يكفى أن نفرض أن $f(y) \geq 0$ لكل $y \in \varphi(A)$

نفرض الآن أن Ω_1 كما فى مفترض ٤٥ – ١ ونفرض أن

$$M_\varphi = \sup\{\|D\varphi(x)\|_{pp} : x \in \Omega_1\},$$
$$M_f = \sup\{f(y) : y \in \varphi(A)\},$$
$$M_J = \sup\{|J_\varphi(x)| : x \in A\}$$

نفرض أن $\varepsilon > 0$ اختيارية ماعدا عند $0 < \varepsilon < 1$ ، نفرض أن I خلية مغلقة تحتوى على A ، ونفرض أن $\{K_i : i = 1, \ldots, M\}$ تقسيم من I إلى مكعبات مغلقة غير متداخلة بطول ضلع أقل من 2γ ، حيث γ هو الثابت فى نظرية جاكوبيان . بفرض أن هذه المكعبات المحتوية بالكامل فى A هى $K_1, \ldots, K_m$ ؛ نفرض أن تلك التى لها نقط فى كل من A وتكملتها هى $K_m, \ldots, K_n$ ، ونفرض أن تلك المكعبات المحتوية بالكامل فى مكملة A هى $K_{n+1}, \ldots, K_M$. بما أن A له محتوى ، فيمكننا فرض أن التقسيم قد اختير دقيقاً بكفاية بحيث إن

$$c(A) \leq \sum_{i=1}^{m} c(K_i) + \varepsilon, \qquad \sum_{i=m+1}^{n} c(K_i) < \varepsilon \tag{i}$$

نفرض أن $B = K_1 \cup \cdots \cup K_m$ بحيث إن $B \subseteq A$. بما أن $c(A \setminus B) = c(A) - c(B) < \varepsilon$ ، فنجد أن

$$\left| \int_A (f \circ \varphi)\,|J_\varphi| - \int_B (f \circ \varphi)\,|J_\varphi| \right| \tag{ii}$$
$$= \left| \int_{A \setminus B} (f \circ \varphi)\,|J_\varphi| \right| \leq M_f M_J c(A \setminus B) \leq [M_f M_J]\varepsilon$$

ينتج من مفترض ٤٥ – ١ أن $c(\varphi(A \setminus B)) \leq (\sqrt{p}\,M_\varphi)^p \varepsilon$ ، بحيث إن

$$\left| \int_{\varphi(A)} f - \int_{\varphi(B)} f \right| = \left| \int_{\varphi(A \setminus B)} f \right| \leq [M_f (\sqrt{p}\,M_\varphi)^p]\varepsilon \tag{iii}$$

إذا كانت x_j هى مركز K_i ، $i = l, \ldots, m$ ، فينتج من نظرية چاكوبيان أن

$$|J_\varphi(x_i)|\,(1-\varepsilon)^p \le \frac{c(\varphi(K_i))}{c(K_i)} \le |J_\varphi(x_i)|\,(1+\varepsilon)^p$$

الآن بما أن $0 < \varepsilon < 1$ ، يتضح أن $1-2^p\varepsilon \le (1-\varepsilon)^p$ ، $(1+\varepsilon)^p \le 1+2^p\varepsilon$ لذلك يمكننا أن نكتب هذه المتباينة فى الصورة

$$\text{(iv)} \qquad \left|c(\varphi(K_i)) - |J_\varphi(x_i)|\,c(K_i)\right| \le [c(K_i)M_J 2^p]\varepsilon$$

الآن بسبب اتصال الدوال المراد تكاملها على الفئة المدمجة B ، ينتج أننا يمكننا فرض أنه لأى نقطة $y_i \in K_i$ ، يكوَن

$$\text{(v)} \qquad \left| \int_B (f\circ\varphi)\,|J_\varphi| - \sum_{i=1}^{m} (f\circ\varphi)(y_i)\,|J_\varphi(x_i)|\,c(K_i) \right| < \varepsilon c(B)$$

(لأنه ، إذا كان ضروريا ، يمكننا تقسيم المكعبات $K_1, \ldots, K_m$ إلى مكعبات صغيرة ، (انظر تمرين ٤٣ – د) .

بما أن φ راسم أحادى فإن فئتين من $\{\varphi(K_i) : i = 1, \ldots, m\}$ تتقاطعان على الأكثر فى فئة $\varphi(K_i \cap K_j)$ لها محتوى صفر لأن $c(K_i \cap K_j) = 0$. أيضاً ، بما أن $\varphi(K_i)$ لها محتوى ، فإن f قابلة للتكامل على $\varphi(K_i)$ ؛ ومن ثم ينتج من نظرية ٤٤ – ٩ (ب) أن

$$\int_{\varphi(B)} f = \sum_{i=1}^{m} \int_{\varphi(K_i)} f$$

الآن بما أن K_i موصولة ، فإن $\varphi(K_i)$ موصولة . بما أن f محدودة ومتصلة على $\varphi(K_i)$ فينتج من نظرية القيمة المتوسطة ٤٤ – ١١ أنه يوجد $p_i \in \varphi(K_i)$ بحيث إن

$$\int_{\varphi(K_i)} f = f(p_i)c(\varphi(K_i)), \qquad i = 1, \ldots, m$$

بما أن $p_i \in \varphi(K_i)$ ، يوجد $y_i \in K_i$ وحيدة حيث $p_i = \varphi(y_i),\ i = 1, \ldots, m$ ومن ثم نجد أن

$$\text{(vi)} \qquad \int_{\varphi(B)} f = \sum_{i=1}^{m} (f\circ\varphi)(y_i)c(\varphi(K_i))$$

لكن بما أن $(f\circ\varphi)(y_i) \ge 0$ ، فينتج من **(iv)** أن

$$\left| \sum_{i=1}^{m} (f\circ\varphi)(y_i)c(\varphi(K_i)) - \sum_{i=1}^{m} (f\circ\varphi)(y_i)\,|J_\varphi(x_i)|\,c(K_i) \right|$$
$$\le \left[M_J 2^p \sum_{i=1}^{m} (f\circ\varphi)(y_i)c(K_i) \right]\varepsilon$$
$$\le \left[M_J M_f 2^p \sum_{i=1}^{m} c(K_i) \right]\varepsilon \le [M_J M_f 2^p c(A)]\varepsilon$$

إذا ربطنا هذه العلاقة الأخيرة مع (v) ، (vi) ، نحصل على

$$\left| \int_{\varphi(B)} f - \int_B (f \circ \varphi) |J_\varphi| \right| \le (1 + M_J M_f 2^p) c(A) \varepsilon \qquad \text{(vii)}$$

يربط (vii) مع (ii) ، (iii) ، نحصل على

$$\left| \int_{\varphi(A)} f - \int_A (f \circ \varphi) |J_\varphi| \right| \le [M_f(\sqrt{p} M_\varphi)^p + (1 + M_J M_f 2^p) c(A) + M_f M_J] \varepsilon$$

بما أن ε عدد اختيارى حيث $0 < \varepsilon < 1$ ، فإن المعادلة (٤٥ – ٥) تكون أثبتت وهو المطلوب إثباته

تطبيقـــات :

الاستخدام للنظرية على تغيير المتغيرات عند $p > 1$ يختلف عادة عن التطبيق للنظرية المناظرة عند $p = 1$. مثال ذلك ، فى حساب

$$\int_0^1 x(1+x^2)^{1/2}\, dx$$

نلاحظ عادة أنه إذا قدمنا $\varphi(x) = 1 + x^2$ فإن $\varphi'(x) = 2x$ ؛ ومن ثم تأخذ الدالة المراد تكاملها الصورة $\frac{1}{2}(\varphi(x))^{1/2}\varphi'(x)$ وكذلك

$$\int_0^1 x(1+x^2)^{1/2}\, dx = \tfrac{1}{2}\tfrac{2}{3}(\varphi(x))^{3/2}\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \tfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \tfrac{1}{3}(2^{3/2}-1)$$

وإذن يكون إجراء التكامل بملاحظة أن الدالة المعطاة المراد تكاملها هى تركيب لدالة ما والدالة φ ، مضروبة فى مشتقة الدالة φ . ويمكن إعادة إجراء تطبيقات مماثلة لحساب التكاملات لأكثر من متغير واحد فقط فى الحالة التى فيها حد الجاكوبيان ثابت (أو بسيط جداً)مثال ذلك، تكامل على الصورة .

$$\iint_A f(x+2y, 2x-3y)\, d(x, y)$$

يمكن إجراؤه بادخال التحويل الخطى $\varphi(x, y) = (x+2y, 2x-3y)$ هنا

$$J_\varphi(x, y) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = -3 - 4 = -7$$

وأيضاً نجد أن

$$\iint_A f(x+2y, 2x-3y)\, d(x, y) = \frac{1}{7} \iint_{\varphi(A)} f(u, v)\, d(u, v)$$

هذا التكامل الثانى ربما يكون أبسط إذا كانت $f(u, v)$ أبسط [مثال ذلك ، إذا كانت $f(u, v) = g(u)h(v)]$ ، أو إذا كانت $\varphi(A)$ بسيطة (مثال ذلك ، إذا كانت خلية) . وخلاف ذلك ، ربما لا يبسط التحويل الأشياء بدرجة كبيرة جداً .

استخدام نمطى أكثر للنظرية هو حساب تكامل متعدد $\int_D f$ بملاحظة أن الفئة D هى الصورة لفئة أبسط A (مثال ذلك ، خلية) تحت راسم مناسب φ .

٤٥ – ١٠ أمثلة . (أ) نفرض أن D تدل على المستطيل الذى رؤوسه $(0, 0), (2, 2)$ ، $(1, 3), (-1, 1)$ ، أى إن ، المنطقة محدودة بالخطوط التى معادلتها هى

$$y = x, \quad y = -x + 4, \quad y = x + 2, \quad y = -x$$

إذا أخذنا $u = y - x$ و $v = y + x$ فإن هذه الخطوط تصبح

$$u = 0, \quad v = 4, \quad u = 2, \quad v = 0$$

ومن ثم ، إذا كانت φ هى الراسم $\varphi(u, v) = (x, y)$ ، حينئذ φ ترسم الخلية $A = [0, 2] \times [0, 4]$ إلى D . سنترك للقارىء إثبات أن

$$\iint_D f(x, y)\, d(x, y) = \iint_A f[\tfrac{1}{2}(v-u), \tfrac{1}{2}(u+v)]\tfrac{1}{2}\, d(u, v)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 \left\{ \int_0^2 f[\tfrac{1}{2}(v-u), \tfrac{1}{2}(u+v)]\, du \right\} dv$$

(ب) نفرض أن $D \subseteq R^2$ هى فئة النقط فى R^2 المعطاة بما يلى

$$D = \{(u, v) : 1 \leq u^2 - v^2 \leq 9, 1 \leq uv \leq 4\}$$

وإذن D محدودة بأربعة قطوع زائدية . إذا عرفنا $\psi : (u, v) \mapsto (x, y)$ بأنها

$$x = u^2 - v^2, \qquad y = uv$$

حينئذ من الواضح أن ψ ترسم هذه القطوع الزائدية فى مستوى (u, v) إلى الخطوط $x = 1$ $x = 9,\ y = 1,\ y = 4$ فى المستوى (x, y) . مع أن ψ ليست إدخالية على جميع R^2 ، فهى إدخالية على الفئة $Q = \{(u, v) : u > 0, v > 0\}$ وأن $J_\psi(u, v) = 2(u^2 + v^2)$. وبالإضافة إلى ذلك $\psi(Q) = \{(x, y) : x \in R, y > 0\}$

ومن ثم نعرف φ على $\{(x, y) : x \in R, y > 0\}$ إلى $Q \subseteq R^2$ فإن تكون عكس ψ مما سبق يتضح أن φ ترسم المستقيمات $x = 1,\ x = 9,\ y = 1,\ y = 4$ إلى القطوع الزائدية .

$$u^2 - v^2 = 1, \quad u^2 - v^2 = 9, \quad uv = 1, \quad uv = 4$$

على الترتيب ، وأن الفئة D هى الصورة تحت φ لخلية $A=[1,9]\times[1,4]$. يوضح حساب مباشر أن φ تكون على الصورة $\varphi(x, y) = (u, v)$ حيث

$$u=\left[\frac{x+(x^2+4y^2)^{1/2}}{2}\right]^{1/2}, \qquad v=\left[\frac{-x+(x^2+4y^2)^{1/2}}{2}\right]^{1/2} \tag{45.6}$$

ينتج من هذا أن $u^2+v^2=(x^2+4y^2)^{1/2}$ بحيث إن $J_\varphi(x, y)=\frac{1}{2}(x^2+4y^2)^{1/2}$.
[تنتج هذه الحقيقة أيضاً من المطابقة $(u^2+v^2)^2=(u^2-v^2)^2+4u^2v^2=x^2+4y^2$]
أى إن

$$\iint_D f(u, v)\, d(u, v)=\iint_A \frac{f(u(x, y), v(x, y))}{2\sqrt{x^2+4y^2}}\, d(x, y)$$

حيث أعطيت $A=[1,9]\times[1,4]$ حيث $v(x, y)$ و $u(x, y)$ فى (٤٥ - ٦) .

الاحداثيات القطبية والكروية :

من المناسب غالباً تعيين النقط فى المستوى R^2 بإعطائها « إحداثياتها القطبية » نتصور عادة المستوى كما لكل من الإحداثيات الكارتيزية (المعطاة بخطين رأسى وأفق) والنظام القطبى . (المعطى بأشعة من نقطة الأصل ودوائر مركزها المشترك هو نقطة الأصل) وعلى التعاقب ، يمكننا اعتبار الإحداثيات القطبية كراسم $(r, \theta)\in R^2$ إلى $(x, y)\in R^2$ المعطاة بما يلى

$$(x, y)=\varphi(r, \theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta) \tag{45.7}$$

يسمى أى زوج من الأعداد $(r, \theta)\in R^2$ بحيث إن $(x, y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ فئة الاحداثيات القطبية للنقطة (x, y) . نتطلب عادة $r\geq 0$ ؛ حتى إذا تحقق هذا ، فإن لكل نقطة (x, y) فى R^2 فئات كثيرة عددها لانهائى للاحداثيات القطبية .

مثال ذلك ، إذا كانت $(x, y)=(0, 0)$ ، فإن $(0, \theta)$ هى فئة إحداثيات قطبية للنقطة $(0, 0)$ لكل $\theta\in R$ ؛ إذا كانت $(x, y)\neq(0, 0)$ وكانت (r, θ) هى فئة إحداثيات قطبية للنقطة (x, y) ، حينئذ لكل $n\in Z$ يكون الزوج $(r, \theta+n2\pi)$ هو أيضاً فئة إحداثيات قطبية للنقطة (x, y) .

إذا كانت $(x, y)\neq(0, 0)$ فيسمى الزوج (الفريد) الوحيد (r, θ) حيث $r>0,\ 0\leq\theta<2\pi$ بالفئة الأساسية للاحداثيات القطبية للنقطة (x, y) . أى إن الدالة φ تنتج راسماً إدخالياً من $(0, +\infty)\times[0, 2\pi)$ إلى $R^2\setminus\{(0, 0)\}$. وتعطى أيضاً راسماً من $[0, +\infty)\times[0, 2\pi)$ إلى R^2 لكنها ليست إدخالية حيث إنها ترسل كل النقط $(0, \theta),\ 0\leq\theta<2\pi$ إلى $(0, 0)$ لاحظ أيضاً أن الجاكوبيان هو

$$J_\varphi(r,\theta)=\det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix} \tag{45.8}$$
$$= r(\cos\theta)^2+r(\sin\theta)^2=r$$

الذى ينعدم عند $r = 0$.

من الواضح أن φ ترسم الخلية $A=[0,1]\times[0,2\pi]$ فى المستوى (r,θ) إلى وحدة القرص $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$ لكن بما أن φ ليست إدخالية على A وبما أن J_φ تنعدم عند $r = 0$ ، فلا يمكننا استخدام نظرية تغيير المتغيرات (٤٥ – ٩) لتحويل تكامل على D إلى تكامل على A .

نلاقى صعوبات مماثلة للاحداثيات الكروية فى R^3 نتذكر تعريف إحداثيات كروية براسم $\Phi: R^3\to R^3$ حيث :

$$\Phi(r,\theta,\phi)=(r\cos\theta\sin\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\phi) \tag{45.9}$$

تسمى أى ثلاثة من الأعداد $(r,\theta,\phi)\in R^3$ بحيث إن $(x,y,z)=\Phi(r,\theta,\phi)$ تسمى بفئة الاحداثيات الكروية للنقطة (x, y, z) . يحتاج الشخص عادة $r \ge 0$ ، لكن حتى بهذا التقييد يكون لكل نقطة فى R^3 فئات كثيرة عددها لانهائى من إحداثيات كروية .

مثال ذلك ، إذا كانت $(x,y,z)=(0,0,0)$ فإن $(0,\theta,\phi)$ هى فئة إحداثيات كروية لجميع $\theta\in R, \phi\in R$ ؛ إذا كانت $(x,y,z)\ne(0,0,0)$ وكانت (r,θ,ϕ) هى فئة إحداثيـــات قطبية للنقطة (x, y, z) ، فإنه لكل $m, n\in Z$ ، الثلاثيات $(r,\theta+(2m+1)\pi,\phi+(2n+1)\pi)$ و $(r,\theta+2m\pi,\phi+2n\pi)$ هى فئات بإحداثيات كروية لهذه النقطة .

إذا كانت (x, y, z) بحيث إن $(x,y)\ne(0,0)$ ، حينئذ يسمى الثلاثى الوحيد (r,θ,ϕ) حيث $r>0,\ 0\le\theta<2\pi,\ 0<\phi<\pi$ بالفئة الأساسية للاحداثيات الكروية للنقطة (x, y, z) . أى إن الدالة Φ تنتج راسماً أحادياً . من $(0,+\infty)\times[0,2\pi)\times(0,\pi)$ إلى $R^3\setminus\{(0,0,z): z\in R\}$. فوقيا التقييد على Φ إلى $[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$ يعطى راسماً فوقياً إلى جميع R^3 لكنه ليس أحادياً ، حيث يرسل كل النقط $(0,\theta,\phi)$ إلى $(0, 0, 0)$ وأنه ، إذا كانت $\phi = 0$ أو π ، حينئذ كل النقط (r,θ,ϕ) ترسم إلى $(0, 0, r\cos\phi)$.
لاحظ أيضاً أن

$$J_\Phi(r,\theta,\phi)=\det\begin{bmatrix}\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi\\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi\end{bmatrix} \tag{45.10}$$
$$= -r^2\sin\phi$$

لاحظنا حالا أن Φ ترسم الخلية $A = [0, 1]\times[0, 2\pi]\times[0, \pi]$ فى الفراغ (r, θ, ϕ) إلى وحدة الكرات $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ لكن بما أن Φ ليست أحادية على A وأن J_Φ تنعدم عند $r^2 \sin \phi = 0$ ، فلا يمكننا استخدام نظرية تغير المتغيرات (٤٥ – ٩) لتحويل تكامل على D إلى تكامل على A .

سنقدم الآن نظرية تمكننا من معالجة الصعوبات التى نلاقيها فى استخدام الاحداثيات القطبية والاحداثيات الكروية وهى مفيدة غالباً فى « تحويلات » أخرى « بإفرادات أو شواذ » سيلاحظ أن النظرية لاتتطلب كون φ أحادية على الفئة A ، مع أنها أحادية على A^0 .

٤٥ – ١١ نظرية تغيير المتغيرات (صورة أقوى) . إذا فرضنا $\Omega \subseteq R^p$ مفتوحة ونفرض أن $\varphi : \Omega \to R^p$ تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$. نفرض أن Ω_0 فئة مفتوحة بمحتوى بحيث إن $\Omega_0^- \subseteq \Omega$ وبحيث إن φ أحادية على Ω_0 . نفرض أن $E \subseteq \Omega$ فئة إدماجية بمحتوى صفر بحيث إن $J_\varphi(x) \neq 0$ عند $x \in \Omega_0 \setminus E$. نفرض أن $A \subseteq \Omega$ لها محتوى ، $A^- \subseteq \Omega_0^-$ ، وأن $f : \varphi(A) \to R$ محدودة ، وأن f متصلة على $\varphi(A \setminus E)$. حينئذ

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi)\,|J_\varphi| \tag{45.5}$$

البرهان . بما أن $b(\Omega_0)$ و $b(A)$ مدمجتان ولهما محتوى صفر ، فيمكننا فرض أنهما محتويان فى E ؛ وإذن $A^0 \setminus E \subseteq \Omega_0 \setminus E$. بما أن E و A لهما محتوى ، والفئة $A \setminus E$ لها محتوى ؛ وبالإضافة إلى ذلك ، بما أن E مغلقة ، فإن $(A \setminus E)^0 = A^0 \setminus E$ بحيث إن $J_\varphi(x) \neq 0$ عند $x \in (A \setminus E)^0$. لذلك بتطبيق نظرية (٤٥–٤) على $A \setminus E$ ، نستنتج أن $\varphi(A \setminus E)$ لها محتوى . ينتج من نظرية (٤٥ – ٢) أن $\varphi(E)$ لها محتوى صفر ، وبما أن $\varphi(A) = \varphi((A \setminus E) \cup (A \cap E)) = \varphi(A \setminus E) \cup \varphi(A \cap E)$ فإن $\varphi(A)$ لها محتوى بما أن f محدودة على $\varphi(A)$ ومتصلة ماعدا على فئة جزئية من $\varphi(E)$ ، فنستنتج أن f قابلة للتكامل على $\varphi(A)$. وبالإضافة إلى ذلك ، بما أن $f \circ \varphi$ متصلة ماعدا على فئة جزئية من E ، فنستنتج أن $(f \circ \varphi)\,|J_\varphi|$ قابلة للتكامل على A . يتبقى أن نوضح أن هذين التكاملين متساويان .

نطبق الآن مفترض (٤٥ – ١) على E لحصول على فئة مفتوحة محدودة Ω_1 حيث $E \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega_1^- \subseteq \Omega$ وثابت $M_1 > 0$ ، بخاصية أنه إذا كانت E محتوية فى اتحاد عدد محدود لمكعبات مغلقة فى Ω_1 بمحتوى $\alpha > 0$ على الأكثر فإن $\varphi(E)$ تكون محتوية فى اتحاد محدود مناظر لمكعبات مغلقة بمحتوى $(\sqrt{p}\,M_1)^p \alpha$ على الأكثر .

نفرض الآن أن $\varepsilon > 0$ معطاة ونحصر E فى اتحاد محدود U_ε لمكعبات مفتوحة فى Ω_1 حيث $c(U_\varepsilon) < \varepsilon$ وبحيث إن الاتحاد W_ε لإقفالات المكعبات فى U_ε تظل محتوية فى Ω_1 .

حينئذ $c(W_\varepsilon) < \varepsilon$ وينتج من مفترض (٥٤-١) أن $c(\varphi(U_\varepsilon)) \le c(\varphi(W_\varepsilon)) \le (\sqrt{p}\, M_1)^p \varepsilon$
الآن نفرض أن $B = A \setminus U_\varepsilon$ بحيث إن B لها محتوى . الآن بما أن U_ε مفتوح ويحتوى $b(\Omega_0)$ و E ، فنستنتج أن $B^- \subseteq \Omega_0 \setminus E$ نطبق الآن نظرية تغيير المتغيرات (٤٥ - ٩) على $B, \Omega_0 \setminus E$ بدلا من A, Ω لنحصل على

$$\int_{\varphi(B)} f = \int_B (f \circ \varphi)\, |J_\varphi|$$

لاحظنا الآن حالا أن $\varphi(A) \setminus \varphi(B) \subseteq \varphi(A \cap U_\varepsilon)$ وإذن

$$\left| \int_{\varphi(A)} f - \int_{\varphi(B)} f \right| \le \left| \int_{\varphi(A \cap U_\varepsilon)} f \right| \le M_f c(\varphi(A \cap U_\varepsilon))$$
$$\le (\sqrt{p}\, M_1)^p M_f \varepsilon$$

بالمثل نجد أن

$$\left| \int_A (f \circ \varphi)\, |J_\varphi| - \int_B (f \circ \varphi)\, |J_\varphi| \right| \le \int_{A \cap U_\varepsilon} (f \circ \varphi)\, |J_\varphi|$$
$$\le M_f M_J c(A \cap U_\varepsilon) \le M_f M_J \varepsilon$$

ينتج أن

$$\left| \int_{\varphi(A)} f - \int_A (f \circ \varphi)\, |J_\varphi| \right| \le [(\sqrt{p}\, M_1)^p M_f + M_f M_J]\varepsilon$$

بما أن $\varepsilon > 0$ اختيارية ، فينتج المطلوب وهو المطلوب إثباته

لإحداثيات قطبية ، نأخذ Ω_0 كفئة مفتوحة بمحتوى محتو فى $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ لإحداثيات كروية نأخذ Ω_0 لتكون فئة مفتوحة بمحتوى محتو فى $(0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$

تمرينـــــات :

٤٥ - (أ) نفرض أن $\Omega \subseteq R^p$ فئة مفتوحة ونفرض أن $f : \Omega \to R^q$ تحقق شرط لبشتز على Ω ؛ أى إنه ، عند قيمة ما $M > 0$ ، تكون $\|f(x) - f(y)\| \le M \|x - y\|$ لكل $x, y \in \Omega$. إذا كانت $K \subseteq \Omega$ مكعباً بطول ضلع $s > 0$ ، أثبت أن $f(K)$ تكون محتوية فى مكعب بطول ضلع $M\sqrt{p}s$. أثبت أنه إذا كانت $A \subseteq \Omega$ فئة مدمجة بمحتوى صفر ، فإن $f(A)$ لها محتوى صفر ، وإذا كانت $B \subset \Omega$ فئة مدمجة بمحتوى ، فان $f(B)$ لها محتوى .

٤٥ - (ب) اعتبر راسم الاحـــداثى القطبى $(x, y) = \varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ المعرف على R^2 ، وسلوكه على الفئة $A = [0,1] \times [0, 2\pi]$. استخدم نظرية (٤٥ - ٤)

لحصول على معلومات تؤكد للمرة الثانية أن الصورة $D = \varphi(A)$ ، التى هى وحدة القرص $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ لها محتوى . افحص الطريقة التى فيها ترسم φ حدود الفئة A . أثبت أن حدود D هى الصورة تحت φ لجانب واحد فقط للفئة A ، وأن الجوانب الثلاثة الأخرى للفئة A ترسم إلى داخل D .

٤٥ – (ج) اعتبر الراسم $(x, y) = \psi(u, v) = (\sin u, \sin v)$ المعرف على R^2 . حدد الصورة لحدود $B = [-\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi] \times [-\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$ تحت ψ وحدود $\psi(B)$. أثبت أن معظم ، مع أن ، ليست جميعها تماماً ، النقط الحدودية المنطقة $\psi(B)$ هى صور لنقط داخلية من B .

٤٥ – (د) إذا علم أن المساحة لقرص دائرى $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ تساوى π أوجد المساحتين لقرصين قطاعى ناقصين معادلتاهما

(أ) $\left\{(x, y): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$

(ب) $\{(x, y): 2x^2 + 2xy + 5y^2 \leq 1\}$

(إرشاد : $2x^2 + 2xy + 5y^2 = (x + 2y)^2 + (x - y)^2$)

٤٥ – (هـ) نفرض أن B هى الفئة $\{(x, y): 0 \leq x, 0 \leq y, 1 \leq x + y \leq 2\}$. نفرض أن $u = x + y, v = y$ بحيث إن B هى الصورة تحت الراسم $(x, y) = \varphi(u, v) = (u - v, v)$ لشبه المنحرف $C = \{(u, v): 1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq u\}$. أثبت أن φ احادية على كل من R^2 وأن $J_\varphi(u, v) = 1$. استنتج أن

$$\iint_B (x + y)\, d(x, y) = \iint_C u\, d(u, v) = \tfrac{7}{3}$$

٤٥ – (و) نفرض أن $B = \{(u, v): 0 \leq u + v \leq 2, 0 \leq v - u \leq 2\}$ باستخدام التحويل $(x, y) \mapsto (u, v) = (x - y, x + y)$ ، احسب التكامل

$$\iint_B (v^2 - u^2) e^{(u^2+v^2)/2}\, d(u, v)$$

٤٥ (ز) – احسب التكامل المكرر .

$$\int_1^3 \left\{ \int_{x^2}^{x^2+1} xy\, dy \right\} dx$$

مباشرة . حينئذ استخدم التحويل $(x, y) \mapsto (u, v) = (x, y - x^2)$ لحساب هذا التكامل .

٤٥ – (ح) احسب مساحة للمنطقة المحدودة بالمنحنيات

$$xy = 1, \quad xy = 2, \quad y = x^2, \quad y = 2x^2$$

بتقديم متغير مناسب للمتغير .

٤٥ – (ط) نفرض أن $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ معرفة بأنها $(u, v) = \psi(x, y) = (x^2 - y^2, x^2 + y^2)$
لاحظ أن الصورة العكسية تحت ψ للخط المستقيم $u = a > 0$ هى قطع زائد ، والصورة العكسية تحت ψ للخط المستقيم $v = c > 0$ هى دائرة . أثبت أن ψ ليست أحادية على $\mathbf{R}^2$ ، لكن تقييدها إلى $Q = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ هو راسم أحادى وفوق إلى $\{(u, v) : v > |u|\}$.
افرض أن φ هى عكس تقييد $\psi | Q$ وأثبت أنه إذا كانت $0 < a < b < c < d$ ، فإن φ ترسم المستطيل $A = [a, b] \times [c, d]$ إلى المنطقة .

$$\varphi(A) = \{(x, y) : a \le x^2 - y^2 \le b, c \le x^2 + y^2 \le d\}$$

وضح أنه إذا كانت $f : Q \to \mathbf{R}$ متصلة ، فإن

$$\iint_{\varphi(A)} f(x, y)\, d(x, y) = \iint_{A} f\left(\left(\frac{u+v}{2}\right)^{1/2}, \left(\frac{v-u}{2}\right)^{1/2}\right) \frac{1}{4(v^2 - u^2)^{1/2}}\, d(u, v)$$

بوجه خاص ، نجد أن

$$\iint_{\varphi(A)} xy\, d(x, y) = \iint_{A} \tfrac{1}{8}\, d(u, v) = \tfrac{1}{8}(b - a)(d - c)$$

٤٥ (ى) – نفرض أن $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ هى كما فى التمرين السابق . أثبت أن ψ ترسم المنطقة المثلثية $\Delta = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$ إلى المنطقة المثلثية

$$\Delta_1 = \psi(\Delta) = \{(u, v) : 0 \le u \le 1, u \le v \le 2 - u\}$$

هنا $J_\psi(x, y) = 8xy$. إذا كانت $\Omega_0 = (0, 2) \times (0, 2)$ وإذا كانت f متصلة على Δ_1 استخدم نظرية (٤٥ – ١١) لإثبات أن

$$\iint_{\Delta_1} f(u, v)\, d(u, v) = \iint_{\Delta} f \circ \psi(x, y)\, |J_\psi(x, y)|\, d(x, y)$$

وفى حالة خاصة ، أثبت أن

$$\iint_{\Delta} (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{1/2} xy\, d(x, y) = \frac{1}{8} \iint_{\Delta_1} u v^{1/2}\, d(u, v)$$

٤٥ – (ك) نفرض أن $\alpha < \beta$ تنتمى إلى $[0, 2\pi]$ ونفرض أن $h : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ متصلة وبحيث إن $h(\theta) \ge 0$ عند $\theta \in [\alpha, \beta]$. نفرض أن $H = \{(\theta, r) \in \mathbf{R}^2 : \alpha \le \theta \le \beta,\ 0 \le r \le h(\theta)\}$ هى فئة الاحداثى الصادى من h (انظر تمرين ٤٤ – س) ، بحيث إن H لها محتوى . المنحنى القطبى المتولد من h هو المنحنى فى $\mathbf{R}^2$ المعرف بأنه $\theta \mapsto (h(\theta) \cos \theta, h(\theta) \sin \theta)$ وأن فئة الاحداثى الرأسى القطبى لهذا المنحنى هو الفئة

$$H_1 = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbf{R}^2 : \alpha \le \theta \le \beta, 0 \le r \le h(\theta)\}$$

لاحظ أن H_1 هي صورة H تحت الراسم القطبي (العكسي) $\varphi_1(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$
واستخدم نظرية (٤٥ – ١١) لإثبات أن

$$c(H_1) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\theta))^2\, d\theta$$

٤٥ – (ل) نفرض أن $a<b$ ونفرض أن $f:[a, b] \to \boldsymbol{R}$ متصلة بحيث إن $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a, b]$. كما في تمرين (٤٤ – س) ، نفرض أن $S_f = \{(x, y): a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ هي فئة الاحداثي الصادي للدالة f . نفرض أن $\rho_x : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ معرفة بأنها $\rho_x(x, y, \theta) = (x, y\cos\theta, y\sin\theta)$ ونفرض أن X_f هي الصورة $S_f \times [0, 2\pi]$ تحت ρ_x . (تسمى الفئة X_f « بالجسم الدوراني الناتج من دوران فئة الاحداثي الصادي S_f حول محور x » استخدم نظرية (٤٥ – ١١) لإثبات أن

$$c(X_f) = \pi\int_a^b (f(x))^2\, dx$$

٤٥ – (م) نفرض أن $0 \leq a\ b$ ونفرض أن $f:[a, b] \to \boldsymbol{R}$ وأن S_f هي كما في التمرين السابق . نفرض أن $\rho_y : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ معرفة بأنها $\rho_y(x, y, \theta) = (x\cos\theta, y, x\sin\theta)$ ونفرض أن Y_f هي صورة $S_f \times [0, 2\pi]$ تحت ρ_y . (تسمى الفئة Y_f « بالجسم الدوراني الناتج من دوران فئة الاحداثي الصادي S_f حول محور y») . استخدم نظرية (٤٥–١١) لإثبات أن

$$c(Y_f) = 2\pi\int_a^b x f(x)\, dx$$

٤٥ – (ن) بالتحويل إلى إحداثيات قطبية ، أثبت أن

$$\iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x, y) = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2})$$

حيث $C_R = \{(x, y): 0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq R^2\}$

(ب) إذا كانت $B_L = \{(x, y): 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L\}$ ، أثبت أن

$$\iint_{B_L} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x, y) = \left(\int_0^L e^{-x^2}\, dx\right)^2$$

(ج) من الحقيقة التي تقول إن $C_R \subseteq B_R \subseteq C_{R\sqrt{2}}$ ، أثبت أن

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_0^R e^{-x^2}\, dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

ومن ثم ينتج أن $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

٤٥ – (س) نفرض أن $B = \{(x, y): 4x^2+9y^2 \leq 4\}$. استخـــدم تغيير متغيرات مناسباً لحساب

$$\iint_B e^{-(4x^2+9y^2)}\, d(x, y) = \frac{\pi}{6}(1-e^{-4})$$

٤٥–(ع) لاحظ أن الفئة $\{(x, y, z): 0 < x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}, \quad (x^2+y^2)^{1/2} \leq z \leq (1-x^2-y^2)^{1/2}\}$ هى « قطاع مخروطى مقطوع بوحدة الكرات » و الفراغ R^3 . اوجد هذه الفئة كالصورة تحت راسم الإحداثى الكروى Φ لخلية $[0, 1]\times[0, 2\pi]\times[0, \frac{1}{4}\pi]$

(أ) أثبت أن المحتوى لهذه الفئة فى R^3 يساوى $\pi(2-\sqrt{2})/3$.

(ب) أوجد المحتوى لهذه الفئة باستخدام راسم الإحداثى الرأسى الأسطوانى

$\Gamma: (r, \theta, z) \to (x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

٤٥ – (ف) نفرض أن $a > 0$ ونفرض أن A هى تقاطع الفئتين

$\{(x, y, z): x^2+y^2+z^2 \leq 4a^2\}$ و $\{(x, y, z): z \geq a\}$

(أ) استخدم راسم إحداثى كروى لإثبات أن $c(A) = 5\pi a^3/3$

(ب) استخدم راسم إحداثى صادى أسطوانى لإيجاد قيمة $c(A)$.

٤٥ – (ص) نفرض أن B هى تقاطع الفئتين

$\{(x, y, z): x^2+y^2+z^2 \leq 2\}$ و $\{(x, y, z): x^2+y^2+z^2 \leq 2z\}$

(أ) استخدم لراسم الإحداثى الرأسى الكروى لتوضح أن $c(B) = \pi(4\sqrt{2}-3)/3$

(ب) استخدم راسم الإحداثى الرأسى الأسطوانى لحساب $c(B)$.

٤٥ (ق) – نفرض أن $B_p(r) = \{x \in R^p : \|x\| \leq r\}$ هى الكرة بنصف قطر $r > 0$ فى الفراغ R^p . سوف نحسب المحتوى $\omega_p(r)$ من $B_p(r)$.

(أ) استخدم تغيير المتغيرات لإثبات أن $\omega_p(r) = r^p\omega_p(1)$

(ب) إذا كانت $p \geq 3$ ، عبر عن تكامل $\omega_p(1)$ كتكامل مكرر واستخدم جزء (أ) لإثبات أن

$$\omega_p(1) = \omega_{p-2}(1)\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1 (1-r^2)^{(p/2)-1} r\, dr\right\} d\theta$$
$$= \omega_{p-2}(1)2\pi/p$$

(ج) استنتج أنه إذا كانت $p = 2k$ زوجية ، فإن $\omega_p(1) = \pi^k/k!$. إذا كانت $p = 2k-1$ فردية ، فإن $\omega_p(1) = 4^k\pi^{k-1}k!/(2k)!$ بدلالة دالة جاما ، نجد أن $\omega_p(1) = \pi^{p/2}/\Gamma(\frac{1}{2}p+1)$

(د) أثبت النتيجة الشهيرة $\lim (\omega_p(1)) = 0$

٤٥ – (ر) سوف نحصل على نتيجة التمرين السابق بطريقة مختلفة . نفرض أن $p \in N$ ونفرض أن $\sigma : R^p \to R^p$ معرفة بأنها

$$\sigma(\theta) = \sigma(\theta_1, \ldots, \theta_p) = (\cos \theta_1, \sin \theta_1 \cos \theta_2, \ldots, \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{p-1} \cos \theta_p)$$

(أ) أثبت أن $\|\sigma(\theta)\|^2 \le 1$ وأن $\|\sigma(\theta)\| = 1$ فقط عندما $\theta_j = 0$ أو $\theta_j = \pi$ لقيمة ما من $j = 1, \ldots, p$

(ب) أثبت أن σ هى راسم أحادى وفوق $(0, \pi)^p = (0, \pi) \times \cdots \times (0, \pi)$ مرات عددها p إلى الداخل $\{x \in R^p : \|x\| < 1\}$ لوحدة الكرات $B_p(1)$. أثبت أيضاً أن σ ترسم $[0, \pi]^p$ فوقياً إلى وحدة الكرات لكن ليست أحادية على الحدود .

(ج) بحساب قيمة جاكوبيان الراسم σ ، نحصل على

$$J_\sigma(\theta) = (-1)^p (\sin \theta_1)^p (\sin \theta_2)^{p-2} \cdots (\sin \theta_{p-1})^2 (\sin \theta_p)$$

ومن ثم $J_\sigma(\theta) \neq 0$ for $\theta \in (0, \pi)^p$

(د) استخدم قانون حاصل ضرب واليس للتكامل $\int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^n \, d\theta$ الذى حصلنا عليه فى مشروع (٣٠ – γ) ، استنبط التعبيرات للمحتوى $\omega_p(1)$ فى المثال السابق

مشروع :

٤٥ (α) – هذا المشروع مؤسس على مشروع (٤٤ – γ) ويمدنا باقتراب تبادلى لنظرية تغييرات المتغيرات (٤٥ – ٩) أن نفرض $\Omega \subseteq R^p$ مفتوحة ، ونفرض أن $\varphi : \Omega \to R^p$ تنتمى إلى صنف $C^1(\Omega)$ أحادية على Ω وبحيث إن $J_\varphi(x) \neq 0$ لكل $x \in \Omega$ للتبسيط ، نفترض أيضاً أنه يوجد $M > 0$ بحيث إن $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \le M \|x - y\|$ عند $x, y \in \Omega.$

(أ) إذا كانت $\Phi : \mathscr{D}(\Omega) \to R$ معرفة بأنها $\Phi(A) = c(\varphi(A))$ عند $A \in \mathscr{D}(\Omega)$ فإن Φ تقبل الجمع على $\mathscr{D}(\Omega)$ ولها كثافة قوية تساوى $|J_\varphi|$. بالإضافة إلى ذلك عند قيمة ما $M_1 > 0$ ، نجد أن $\Phi(A) \le M_1 c(A)$ لكل $A \in \mathscr{D}(\Omega)$.

(ب) إذا كانت f دالة محدودة قابلة للتكامل على كل فئة $\varphi(A)$ ، عندما $A \in \mathscr{D}(\Omega)$ ، إذا كانت $\Psi : \mathscr{D}(\Omega) \to R$ معرفة بأنها

$$\Psi(A) = \int_{\varphi(A)} f$$

فإن Ψ تقبل الجمع على $\mathscr{D}(\Omega)$. بالإضافة إلى ذلك ، عند قيمة ما $M_2 > 0$ ، نجد أن $|\Psi(A)| \leq M_2 c(A)$ لكل $A \in \mathscr{D}(\Omega)$.

(ج) إذا كانت f دالة محدودة ومتصلة على $\varphi(\Omega)$ ، وإذا كانت Ψ معرفة كما في (ب) أثبت أن Ψ لها كثافة قوية تساوى $(f \circ \varphi) |J_\varphi|$.

(د) إذا كانت f كما في (ج) ، أثبت أن

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi) |J_\varphi| \qquad \text{for } A \in \mathscr{D}(\Omega)$$

المراجـــع

تحوى هذه القائمة عددا من الكتب والمقالات التى وردت فى النص وبعض المراجع الاضافية التى ستساعد فى الدراســـات المقبلة .

Apostol, T. M., *Mathematical Analysis,* Second Edition, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.

Bartle, R. G., *The Elements of Integration,* Wiley, New York, 1966.

Boas, R. P., Jr., *A Primer of Real Functions,* Carus Monograph Number 13, Math. Assn. of America, 1960.

Bruckner, A. M., "Differentiation of Integrals," *Amer. Math. Monthly,* Vol. 78, No. 9, Part II, 1–51 (1971). (H. E. Slaught Memorial Paper, Number 12.)

Burkill, J. C., and H. Burkill, *A Second Course in Mathematical Analysis,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1970.

Cartan, H. P., *Cours de Mathématiques,* I. *Calcul Différentiel;* II. *Formes Différentielles,* Hermann, Paris, 1967. (English translation, Houghton-Mifflin, Boston, 1971.)

Cheney, E. L., *Introduction to Approximation Theory,* McGraw-Hill, New York, 1966.

Dieudonné, J., *Foundations of Modern Analysis,* Academic Press, New York, 1960.

Dunford, N., and J. T. Schwartz, *Linear Operators,* Part I, Wiley-Interscience, New York, 1958.

Finkbeiner, D. T., II, *Introduction to Matrices and Linear Transformations,* Second Edition, W. H. Freeman, San Francisco, 1966.

Gelbaum, B. R., and J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in Analysis,* Holden-Day, San Francisco, 1964.

Halmos, P. R., *Naive Set Theory,* Van Nostrand, Princeton, 1960. (Republished by Springer-Verlag, New York, 1974.)

Hamilton, N. T., and J. Landin, *Set Theory,* Allyn-Bacon, Boston, 1961.

Hardy, G. H., J. E. Littlewood, and G. Polya, *Inequalities,* Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

Hewitt, E., and K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis,* Springer-Verlag, New York, 1965.

Hoffman, K., and R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1961

Kelley, J. L., *General Topology*, Van Nostrand, New York, 1955.

Knopp, K., *Theory and Application of Infinite Series* (English translation), Hafner, New York, 1951.

Lefschetz, S., *Introduction to Topology*, Princeton University Press, Princeton, 1949.

Luxemberg, W. A. J., "Arzelà's Dominated Convergence Theorem for the Riemann Integral," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 78, 970–979 (1971).

McShane, E. J., "A Theory of Limits," published in *MAA Studies in Mathematics*, Vol. 1, R. C. Buck, editor, Math. Assn. America, 1962.

———, "The Lagrange Multiplier Rule," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 80, 922–925 (1973).

Royden, H. L., *Real Analysis*, Second Edition, Macmillan, New York, 1968.

Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1964.

Schwartz, J., "The Formula for Change of Variables in a Multiple Integral," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 61, 81–85 (1954).

Simmons, G. F., *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1963.

Spivak, M., *Calculus on Manifolds*, W. A. Benjamin, New York, 1965.

Stone, M. H., "The Generalized Weierstrass Approximation Theorem," *Mathematics Magazine*, Vol. 21, 167–184, 237–254 (1947/48). (Reprinted in *MAA Studies in Mathematics*, Vol. 1, R. C. Buck, editor, Math. Assn. America, 1962.)

Suppes, P., *Axiomatic Set Theory*, Van Nostrand, Princeton, 1961.

Titchmarsh, E. C., *The Theory of Functions*, Second Edition, Oxford University Press, London, 1939.

Varberg, D. E., "Change of Variables in Multiple Integrals," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 78, 42–45 (1971).

Woll, J. W., Jr., *Functions of Several Variables*, Harcourt, Brace and World, New York, 1966.

Wilder, R. L., *The Foundations of Mathematics*, Wiley, New York, 1952.

ارشادات لتمرينات مختارة :

نحث القارىء على عدم النظر فى هذه الإرشادات مالم يكن محرجاً ، يحتاج كثير من التمرينات إلى البراهين ، ويوجد أكثر من حل واحد صحيح ، حتى إذا أعطى القارىء نقاشاً مختلفاً كلية فربما يكون نقاشه صحيحاً تماماً . لكن ، لكى نساعد القارىء على فهم المادة العلمية وتطوير مهارته الفنية ، نقدم بعض إرشادات وبعض حلول . سيلاحظ وجود تفصيلات أكثر للمادة المذكورة فى الأبواب الأولى .

باب (١) :

١ – (د) حسب تعريف $A\cap B\supseteq A$. إذا كانت $A\subseteq B$ فإن $A\cap B\subseteq A$ أى أن $A\cap B=A$ وبالعكس ، إذا كانت $A\cap B=A$ فإن $A\cap B\supseteq A$ ومن ثم ينتج إن $B\supseteq A$.

١ – (هـ ، و) الاختلاف المتماثل للمقدارين B و A هو اتحاد الفئتين $\{x:x\in A \text{ and } x\notin B\}$ و $\{x:x\notin A \text{ and } x\in B\}$

١ – (ح) إذا كانت x تنتمى إلى $E\cap\bigcup A_j$ فإن $x\in E$ وأن $x\in\bigcup A_j$ ، لذلك ، $x\in E$ $x\in A_j$ عند قيمة واحدة للمقدار j . على الأقل يدل هذا على أن $x\in E\cap A_j$ لقيمة واحدة للمقدار j ، بحيث إن

$$E\cap\bigcup A_j\subseteq\bigcup(E\cap A_j)$$

يبرهن الاستنتاج العكسى بعكس هذه الخطوات . يعامل التساوى الآخر بالمثل .

١ – (ل) إذا كانت $x\in\mathscr{C}(\bigcap\{A_j:j\in J\})$، فإن $x\notin\bigcap\{A_j:j\in J\}$. هذا يدل على أنه يوجد $k\in J$ بحيث إن $x\notin A_k$. لذلك $x\in\mathscr{C}(A_k)$ ومن ثم $x\in\bigcup\{\mathscr{C}(A_j):j\in J\}$ يبرهن هذا $\mathscr{C}(\bigcap A_j)\subseteq\bigcup\mathscr{C}(A_j)$. يبرهن الاستنتاج العكسى بعكس هذه الخطوات . برهان المتساوية الأخرى مماثل .

باب (٢) :

٢ - (أ) إذا كانت (a, c') و (a, c) تنتمى إلى $g^\circ f$ ، فإنه توجد b, b' في B بحيث إن (a, b') و (a, b) تنتمى إلى f وأن (b', c')و(b, c) تنتمى إلى g. بما أن f دالة ، فإن $b = b'$ ؛ بما أن g دالة ، فإن $c = c'$.

٢ - (ب) لا . كلا من $(0, 1)$ و $(0, -1)$ تنتمى إلى C

٢ - (د) افرض $f(x) = 2x,\ g(x) = 3x$

٢ - (هـ) إذا كانت $(b, a), (b, a')$ تنتمى إلى f^{-1} ، فإن $(a, b), (a', b)$ تنتمى إلى f . بما أن f غير أحادية ، فإن $a = a'$. ومن ثم تكون f^{-1} دالة .

٢ - (ز) إذا كانت $f(x_1) = f(x_2)$ فإن $x_1 = g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2) = x_2$ ومن ثم تكون f غير أحادية .

٢ - (ح) استخدم تمرين (٢ - ز) مرتين .

باب (٣) :

٣ - (أ) افرض $f(n) = n/2,\ n \in E$

٣ - (ب) افرض $f(n) = (n+1)/2,\ n \in O$

٣ - (ج) افرض $f(n) = n+1,\ n \in N$

٣ - (هـ) افرض $A_n = \{n\},\ n \in N$. حينئذ لكل فئة A_n نقطة وحيدة ، لكن $\bigcup\{A_n : n \in N\}$ لانهائية .

٣ (و) - إذا كانت A لانهائية وكانت $B = \{b_n : n \in N\}$ فئة جزئية من A ، حينئذ الدالة معرفة بأنها .

$$f(x) = b_{n+1}, \qquad x = b_n \in B$$
$$= x, \qquad x \in A \setminus B$$

هى راسم أحادى وترسم A إلى $A \setminus \{b_1\}$ فوقياً .

٣ - (ح) إذا كانت f راسماً أحادياً يرسم A إلى B فوقياً وكانت g راسماً أحادياً برسم B إلى C فوقياً ، حينئذ تكون $g^\circ f$ راسماً أحادياً برسم A إلى C فوقياً .

باب (٤) :

٤ - (ز) اعتبر ثلاث حالات : $p = 3k,\ p = 3k+1,\ p = 3k+2$

باب (٥) :

٥ - (أ) بما أن $a^2 \geq 0, b^2 \geq 0$ ، فإن $a^2+b^2=0$ تدل على أن $a^2=b^2=0$

٥ - (د) إذا كانت $c = 1 + a$ حيث $a > 0$ ، فإن :

$$c^n = (1+a)^n \geq 1+na \geq 1+a=c$$

٥ - (ز) لاحظ أن $1 < 2^1 = 2$. إذا كانت $k<2^k$ عند $k \geq 1$ ، فإن $k+1 \leq 2k < 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ وإذن $n<2^n$ لكل $n \in N$

٥ - (ح) لاحظ أن $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1}+\cdots+a^{n-1}) = (b-a)p$ ، حيث $p > 0$.

٥ - (م) $\{(x, y) : y = \pm x\}$

٥ - (ن) مربع برؤوس $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$

باب (٦) :

٦ - (أ) إذا كانت $A=\{x_1\}$ ، فإن $x_1 = \sup A$.
إذا كانت $A=\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ وإذا كانت $u = \sup\{x_1, \ldots, x_n\}$ وضح أن $\sup\{u, x_{n+1}\}$ هو أعلى A .

٦ - (ج) افرض $S=\{x \in Q : x^2 < 2\}$

٦ - (هـ) في الحقيقة $\sup A \cup B = \sup\{\sup A, \sup B\}$

٦ - (ح) إذا كانت $S = \sup\{f(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ فإن $f_1(x) \leq S$ لجميع $x \in X, y \in Y$ وإذن $f(x, y) \leq S$ لجميع $x \in X$

ومن ثم $\sup\{f_1(x) : x \in X\} \leq S$. وبالعكس ، إذا كانت $\varepsilon > 0$ فإنه توجد (x_0, y_0) بحيث إن $S - \varepsilon < f(x_0, y_0)$ وإذن $S - \varepsilon < f_1(x_0)$ ويكون :

$S - \varepsilon < \sup\{f_1(x) : x \in X\}$ بما أن $\varepsilon > 0$ اختيارية ، فنستنتج أن :

$$S \leq \sup\{f_1(x) : x \in X\}$$

٦ - (ك) بما أن $f(x) \leq \sup\{f(z) : z \in X\}$, ، فينتج أن :

$$f(x) + g(x) \leq \sup\{f(z) : z \in X\} + \sup\{g(z) : z \in X\}$$

لذلك يكون $\sup\{f(x) + g(x) : x \in X\}$ أقل من أو يساوى الطرف الأيمن .

بالمثل ، إذا كانت $x \in X$ ، فإن :

$$\inf\{f(z) : z \in X\} + g(x) \leq f(x) + g(x)$$

إذا استخدمنا (٦ – ى) ، نستنتج أن

$$\inf\{f(z): z \in X\} + \sup\{g(x): x \in X\} \leq \sup\{f(x)+g(x): x \in X\}.$$

تبرهن المطلوبات الأخرى بطريق مماثلة .

باب (٧) :

٧ – (ب) نفرض أن $a \in A$ ؛ إذا كانت $a \notin A$ فإن $a \in B$ وإذن $\xi < \xi' \leq a$, a مما يخالف الفرض وإذن $a \in A'$ وبما أن $a \in A$ اختيارية فيكون $A \subseteq A'$. بما أن $\xi < \xi'$ ، فإنه توجد $x \in \boldsymbol{R}$ حيث $\xi < x < \xi'$. بما أن $\xi < x$ فيجب أن يكون $x \in B$. . لكن بما أن $x \in A'$ نستنتج أن $A \neq A'$.

٧ – (ج) افرض :

$A = \{x: x < 1\}$, $B = \{x: x \geq 1\}$ and $A' = \{x: x \leq 1\}$, $B' = \{x: x > 1\}$

٧ – (ه) إذا كانت $x \in I_n$ لكل n ، فينتج تناقض لخاصية أرشيميدس ٦–٦ .

٧ – (و) إذا كانت $x \in J_n$ لكل n ، فينتج تناقض لنتيجة ٦–٧ (ب) .

٧ – (ح) كل عنصر فى F_1 له مفكوك ثلاثة . أول رقم فيه هو إما صفر أو 2 . النقط فى الفترات الأربع الجزئية من F_2 لها مفكوكات ثلاثية تبدأ كالآتى :

$$0.00\ldots, 0.02\ldots, 0.20\ldots, 0.22\ldots$$

إلى آخره

٧ – (ى) إذا كانت n كبيرة كبراً كافياً فإن ، $1/3^n < b - a$

٧ – (ك) قريباً من ١ كالمطلوب .

باب (٨) :

٨ – (ه) لاتتحقق خاصية ٨–٣ (ii)

٨ – (ح) الفئة S_1 هى الداخل للمربع الذى رؤوسه $(0, \pm1), (\pm1, 0)$ والفئة S_2 هى الداخل للمربع الذى رؤوسه $(1, \pm1)$, $(-1, \pm1)$

٨ – (ك) خذ $a = 1/\sqrt{p}$, $b = 1$

٨ – (ل) خذ $a = 1/p$, $b = 1$

٨ – (م) عندنا $|x \cdot y| \leq \sum |x_i|\,|y_i| \leq \{\sum |x_i|\} \sup |y_i| \leq \|x\|_1\, \|y\|_1$ لكن $|x \cdot y| \leq p\, \|x\|_\infty\, \|y\|_\infty$ وإذا كانت $x = y = (1, 1, \ldots, 1)$ فإننا نصل إلى التساوى .

٨ – (ن) العلاقة المنصوصة تدل على أن

$$\|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2 = \|x + y\|^2 \quad (\|x\| + \|y\|)^2$$
$$= \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2$$

ومن ثم $x \cdot y = \|x\|\,\|y\|$ ويظل شرط التساوى الموجود فى نظرية (٨ — ٧) قائماً بشرط كون المتجهات لا تساوى صفراً .

٨ — (ع) بما أن $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2$. فإن العلاقة المذكورة تظل صحيحة إذا وإذا فقط

٨ — (ف) تسمى فئة K محدبة إذا وإذا فقط كانت تحتوى جزء الخط المستقيم الواصل بين أى نقطتين فى K . إذا كانت $x, y \in K_1$ ، حينئذ :

$$\|tx + (1-t)y\| \leq t\,\|x\| + (1-t)\,\|y\| \leq t + (1-t) = 1$$

كذلك $tx + (1-t)y \in K_1$ عند $0 \leq t \leq 1$. النقطتان $(\pm 1, 0)$ تنتميان إلى K_4 ، لكن نقطة المنتصف $(0, 0)$ لاتنتمى إلى K_4 .

٨ — (ص) إذا كانت x, y تنتمى إلى $\bigcap K_\alpha$ ، فإن $x, y \in K_\alpha$ لكل α . ومن ثم $tx + (1-t)y \in K_\alpha$ لكل α ومنها ينتج أن $\bigcap K_\alpha$ محدبة . اعتبر الاتحاد لفترتين غير متصلتين .

باب (٩) :

٩ — (أ) إذا كانت $x \in G$ ، افرض $r = \inf\{x, 1-x\}$ حينئذ ، إذا كانت $|y - x| < r$ ، نحصل على $x - r < y < x + r$ ومنها $0 \leq x - r < y < x + r \leq 1$ بحيث إن $y \in G$. إذا كانت $z = 0$ ، فإنه لايوجد عدد حقيق $r > 0$ بحيث إن كل نقطة y فى $\mathbf{R}$ تحقق $|y| < r$ تنتمى إلى F . بالمثل عند $z = 1$.

٩ — (ب) إذا كانت $x \in G$ ، خذ $r = 1 - \|x\|$. إذا كانت $x \in H$ ، خذ $r = \inf\{\|x\|, 1 - \|x\|\}$. إذا كانت $z = (1, 0)$ إذن لكل $r > 0$ ، توجد نقطة y فى $\mathscr{C}(F)$ بحيث إن $\|y - z\| < r$.

٩ — (ز) أسرد النقط فى الفئة المفتوحة التى جميع إحداثياتها أعداد قياسية . حينئذ استخدم خطوات البرهان لنظرية (٩ — ١١) مستخدماً كوراً مفتوحة مركزها عند هذه النقط القياسية .

٩ — (ح) ناقش كما فى التمرين السابق ، لكن استخدم هذه المرة كوراً مغلقة

٩ — (ط) خذ المكملات واستخدم ٩ . ح .

٩ — (ى) الفئة A^0 هى اتحاد لمجموعة جميع الفئات المفتوحة فى A. ومن ثم أى فئة مفتوحة $G \subseteq A$ يجب أن تكون محتوية فى A^0 . حسب تعريفها يجب أن يكون $A^0 \subseteq A$. ينتج أن

$(A^0)^0 \subseteq A^0$. بما أن A^0 مفتوحة وأن $(A^0)^0$ هى الاتحاد لجميع الفئات المفتوحة فى A^0 ، يجب أن يكون $A^0 \subseteq (A^0)^0$. وإذن $(A^0)^0 = A^0$. بما أن $A^0 \subseteq A$ و $B^0 \subseteq B$ فينتج أن : $A^0 \cap B^0 \subseteq A \cap B$ ، لكن بما أن $A^0 \cap B^0$ مفتوحة فهذا يدل على أن $(A^0 \cap B^0) \subseteq (A \cap B)^0$. ومن زاوية أخرى تكون $(A \cap B)^0$ فئة مفتوحة محتوية فى A, B ؛ وإذن $(A \cap B)^0 \subseteq A^0$ و $(A \cap B)^0 \subseteq B^0$ ، ومنها $(A \cap B)^0 \subseteq A^0 \cap B^0$ وبالتالى $A^0 \cap B^0 = (A \cap B)^0$. بما أن R^p مفتوحة ، فإن $(R^p)^0 = R^p$.

نفرض أن A هى فئة جميع الأعداد القياسية فى $(0, 1)$ وأن B هى فئة كل الأعداد غير القياسية فى $(0, 1)$. حينئذ $A^0 \cup B^0 = \emptyset$. بينما $(A \cup B)^0 = (0, 1)$.

٩ – (ل) ناقش كما فى ٩ . ى ، أوخذ المكملات واستخدم ٩ .

٩ – (ن) إذا كانت $p = 1$ ، خذ $A = Q$ فى R^p ، خذ Q^p .

٩ – (س) افرض أن A, B مفتوحتان فى R . نفرض أن $(x, y) \in A \times B$ بحيث $x \in A$ و $y \in B$. توجد $r > 0$ بحيث إنه إذا كانت $|x' - x| < r$ فإن $x' \in A$, $s > 0$ بحيث إنه إذا كانت $|y' - y| < s$ وأن $y' \in B$. افرض الآن $t = \inf\{r, s\}$ الكرة المفتوحة التى نصف قطرها t تكون محتوية فى $A \times B$. العكس يكون مشابهاً .

باب (١٠) :

١٠ – (ج) إذا كانت x نقطة حشد من A فى R^p وكان N جوارا من x ، حينئذ $N \cap \{y \in R^p : \|y - x\| < 1\}$ تحتوى نقطة $a_1 \neq x$, $a_1 \in A$. تحتوى الفئة $N \cap \{y \in R^p : \|y - x\| < \|a_1\|\}$ نقطة $a_2 \neq x$, $a_2 \in A$ وأيضاً $a_2 \neq a_1$ أكمل هذه الطريقة .

١٠ – (و) كل جوار x يحتوى نقطاً كثيرة عددها لا نهائى للفئة $A \cup B$. ومن ثم إما A أو B (أو ربما كليهما) يجب أن يكون له عدد لا نهائى من العناصر فى هذا الجوار .

باب (١١) :

١١ – (أ) افرض أن $G_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1 - 1/n\}$ عند $n \in N$.

١١ – (ب) افرض أن $G_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 < n^2\}$ عند $n \in N$.

١١ (ج) – افرض أن $\mathscr{G} = \{G_\alpha\}$ غطاء مفتوحا للدالة F وافرض أن $G = \mathscr{C}(F)$ ، أى إن G مفتوحة فى R^p . إذا كانت $\mathscr{G}_1 = \mathscr{G} \cup \{G\}$ ، فإن $\mathscr{G}_1$ غطاء مفتوح للفئة K ، حينئذ يكون للفئة K غطاء جزئى محدود $\{G, G_\alpha, G_\beta, \ldots, G_\omega\}$. وإذن يكون $\{G_\alpha, G_\beta, \ldots, G_\omega\}$ غطاء جزئيا من $\mathscr{G}$ للفئة F .

١١ – (د) لاحظ أنه إذا كانت G مفتوحة فى R ، فإنه توجد فئة جزئية مفتوحة G_1 من R^2 بحيث إن $G = G_1 \cap R$. استخدم نظرية هاين بورال – بالتناوب .

١١ – (هـ) نفرض أن $\mathscr{G}=\{G_\alpha\}$ غطاء مفتوحا لوحدة الفترات المغلقة J فى R^2 اعتبر تلك الأعداد الحقيقية x بحيث إن المربع $[0,x]\times[0,x]$ يكون محتوياً فى الاتحاد لعـدد محدود لفئات فى $\mathscr{G}$ وافرض x^* هو أعلاها .

١١ – (ز) افرض أن $n\in N$ $x_n\in F_n$. إذا كان يوجد فقط عدد محدود من نقط فى $\{x_n:n\in N\}$ ، حينئذ يحدث واحدة منها على الأقل غالباً مرات عددها لا نهائى وتكون نقطاً مشتركة . إذا كان يوجد نقط كثيرة عددها لا نهائى فى الفئة المحدودة $\{x_n\}$ ، حينئذ توجد نقطة حشد x . بما أن $x_m\in F_n$ عند $m\ge n$ وبما أن F_n مغلقة ، فإن $x\in F_n$ لكل $n\in N$.

١١ – (ح) إذا كانت $d(x,F)=0$ ، فإن x نقطة حشد للفئة المغلقة F .

١١ – (ى) لا . افرض $F=\{y\in R^p:\|y-x\|=r\}$ ، حينئذ كل نقطة من F تقع على نفس المسافة من x .

١١ – (ك) افرض أن G فئة مفتوحة وافرض أن $x\in R^p$. إذا كانت : $H=\{y-x:y\in G\}$ فإن H فئة مفتوحة فى R^p .

١١ – (م) اتبع النقاش فى ١١ – ٧ ، ما عدا استخدام خلايا مفتوحة بدلا من كور مفتوحة .

١١ – (ف) افرض أن $Q=\bigcap\{G_n:n\in N\}$ ، حيث G_n مفتوحة فى الفراغ R . المكملة F_n للفئة G_n فئة مغلقة لا تحتوى أى فئة جزئية مفتوحة غير خالية ، حسب نظرية ٦ – ١٠ . ومن ثم تكون الفئة لعناصر غير قياسية هى اتحاد عائلة معدودة لفئات مغلقة لا تحتوى أى واحدة منها على فئة مفتوحة غير خالية ، لكن هذا يخالف تمرين ١١ . ع .

باب (١٢) :

١٢ – (ب) افرض أن B و A قطع عند $C'=C\cup\{x\}$. حينئذ $B\cap C'$ $A\cap C'$ غير مرتبطين ، غير خاليتين ، ولهما اتحاد C' يجب أن تحتوى إحدى هاتين الفئتين على x ، افرض أنها B . بما أن B فئة مفتوحة ، فتحتوى أيضاً نقطاً من C أى إن $C\cap(B\setminus\{x\})\neq\emptyset$ لكن حينئذ تكون $A, B\setminus\{x\}$. قطعاً من C .

١٢ – (هـ) عدل برهان النظرية ١٢ – ٤ .

١٢ – (ز) حسب نظرية ١٢ – ٨ ، تكون الفئتان C_1, C_2 فترتين . من السهل ملاحظة أن $C_1\times C_2$ محدبة أى أن ١٢ – (هـ) تطبق .

باب (١٣) .

١٣ – (أ) اختبر الوضع الهندسى $iz = (-y, x)$ بدلالة $z = (x, y)$.

١٣ – (ب) لاحظ أن $cz = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$ ، وهذا يناظر دوران عكس عقرب الساعة بزاوية نصف قطرية θ . وحول نقطة الأصل .

١٣ – (ج) ترسم الدائرة $|z-c| = r$ إلى الدائرة $|w-(ac+b)| = |a|\,r$ يمكننا كتابة $z = a^{-1}w - a^{-1}b$ وتحسب $x = \text{Re}\, z,\ y = \text{Im}\, z$ بدلالة $u = \text{Re}\, w, v = \text{Im}\, w$. بإجراء هذا نجد من السهل ملاحظة أن المعادلة $ax + by = c$ تتحول إلى معادلة فى الصورة $Au + Bv = C$.

١٣ – (د) تترك دائرة كما هى ثابتة بواسطة g إذا وإذا فقط كان مركزها يقع على المحور الحقيقى . الخطوط التى تركت ثابتة بواسطة g هما فقط المحور الحقيقى والمحور التخيلى .

١٣ – (هـ) ترسل دوائر مارة بنقطة الأصل إلى خطوط بواسطة h . ترسل كل الخطوط التى تمر بنقطة الأصل إلى دوائر مارة بنقطة الأصل ، ترسل كل الخطوط المارة بنقطة الأصل إلى خطوط مارة بنقطة الأصل .

١٣ – (و) كل نقطة من C ، ماعدا نقطة الأصل ، هى الصورة تحت g لعنصرين من C . إذا كانت $\text{Re}\, g(z) = k$ ، فإن $x^2 - y^2 = k$. إذا كانت $\text{Im}\, g(z) = k$ ، فإن $2xy = k$. إذا كانت $|g(z)| = k$ ، فإن $k \geq 0$ وأن $|z| = \sqrt{k}$.

باب (١٤) :

١٤ – (ب) لاحظ أن $0 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n}$.

١٤ – (د) لدينا $0 \leq \big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\|$.

١٤ – (ط) افرض أن $r \in R$ بحيث إن $\lim (x_{n+1}/x_n) < r < 1$ بما أن الفترة $(-1, r)$ هى جوار هذه النهاية ، فتوجد $K \in N$ بحيث إن $0 < x_{n+1}/x_n < r$ لكل $n \geq K$. وضح الآن أن $0 < x_n < Cr^n$ عند بعض C ، $n \geq K$.

١٤ – (ك) اعتبر (n) و $(1/n)$.

١٤ – (ل) المتتابعات (أ) ، (ب) ، (هـ) ، (و) تتقارب ؛ المتتابعتان (ج) ، (د) تتباعدان .

١٤ – (م) افرض أن $r \in R$ بحيث إن $\lim (x_n^{1/n}) < r < 1$. بما أن الفترة $(-1, r)$ جوار هذه النهاية ، فتوجد $K \in N$ بحيث إن $0 < x_n^{1/n} < r$ ، ومنها $0 < x_n < r^n$ لكل $n \geq K$.

باب (١٥) :

١٥ – (أ) اعتبر $z_n = y_n - x_n$ ، استخدم مثال ١٥–٥(ج) ونظرية ١٥–٦(أ).

١٥ – (ج) (أ) تتقارب إلى ١ . (ب) تتباعد . (و) تتباعد .

١٥ – (د) افرض $Y = -X$.

١٥ – (و) اعتبر حالتين : $x = 0$ و $x > 0$

١٥ – (ز) نعم

١٥ – (ح) استخدم الإرشاد فى (تمرين ١٥ – ٦ و) .

١٥ – (ل) لاحظ أن $b \le x_n \le b2^{1/n}$.

باب (١٦) :

١٦ – (أ) بالاستنتاج يكون $1 < x_n < 2$ عند $n \ge 2$. بما أن : $x_{n+1} - x_n = (x_n - x_{n-1})/(x_n x_{n-1})$ فإن المتتابعة مطردة .

١٦ – (ج) المتتابعة رتيبة ومحدودة . النهاية هي $(1+(1+4a)^{1/2})/2$

١٦ – (د) المتتابعة X تتناقص باطراد ومحدودة .

١٦ – (هـ) يسمى عنصر x_k من $X = (x_n)$ «قمة» X إذا كانت $x_k \ge x_n$ عندما $n > k$.

إذا كانت هناك قمم كثيرة لا نهائية بأدلة $k_1 < k_2 < \ldots$ ، فإن المتتابعة (x_{k_j}) للقمم متتابعة جزئية متناقصة من X .

إذا كان يوجد فقط عدد محدود من قمم بأدلة $k_1 < \cdots < k_r$ ... ، افرض أن $m_1 > k_r$ بما أن x_{m_1} ليست قمة ، فتوجد $m_2 > m_1$ بحيث إن $x_{m_1} < x_{m_2}$.

بالاستمرار بهذه الطريقة نحصل على متتابعة جزئية متزايدة بدقة (x_{m_j}) من X .

١٦ – (ز) المتتابعة تزايدية ، $x_n \le n/(n+1) < 1$.

١٦ – (ك) توجد $K \in N$ بحيث إنه إذا كانت $n \ge K$ ، فإن :

$$L - \varepsilon \le x_{n+1}/x_n \le L + \varepsilon$$

استخدم الآن نقاشاً مشابهاً للنقاش الموجود فى تمرين ١٤ – ١ .

١٦ – (م) (أ) e ، $e^{1/2}$

(ج) إرشاد : $(1+2/n) = (1+1/n)(1+1/(n+1))$

(د) e^3 .

١٦ (ع) – أوجد أن $y_n \in F$ بحيث إن $\|x - y_n\| < d + 1/n$. إذا كانت $y = \lim (y_{n_k})$ فإن $\|x - y\| = d$

باب (١٧) :

١٧ – (أ) الجميع .

١٧ – (ج) إذا كانت $x \in Z$ ، فإن النهايات؛ إذا كانت $x \notin Z$ ، فإن النهاية صفر .

١٧ – (ه) إذا كانت $x = 0$ ، فإن النهاية = ١ ؛ إذا كانت $x \neq 0$ ، فإن النهاية = صفر .

١٧ – (ز) إذا كانت $0 < \varepsilon < \pi/2$ و $x > 0$ ، فإن $(\pi/2 - \varepsilon) > 0$. ويكون $nx \geq \tan(\pi/2 - \varepsilon)$ لكل $n \geq n_\varepsilon$ ، التي منها ينتج أن : $\pi/2 - \varepsilon \leq \text{Arc} \tan nx \leq \pi/2.$

١٧ – (ح) إذا كانت $x > 0$ ؛ فإن $e^{-x} < 1$ ١٧ – (ى) ليس ضرورياً .

١٧ – (م) اعتبر المتتابعة $(1/n)$ أو لاحظ أن $\|f_n\|_D \geq \frac{1}{2}$

١٧ – (ع) نعم ١٧ – (ف) نعم .

باب (١٨) :

١٨ – (أ) (أ) ± 1 . (ب) 0 . (ج) ± 1 (د) ± 1

١٨ – (ه) افرض أن $p \leq mm$ ، $p \in N,$ حينئذ $v_m(X + Y) = \sup\{x_n + y_n : n$

$\geq m\} \leq \sup\{x_n : n \geq m\} + \sup\{y_n : n \geq m\} = v_m(X) + v_m(Y) \leq v_p(X) + v_m(Y)$

وإذن $(x + y)^* = \inf\{v_m(X + Y) : m \in N\} \leq v_p(X) + y^*$

بما أن هذا يكون صحيحاً لكل $p \in N,$ ، نستنتج أن $(x + y)^* \leq x^* + y^*$

١٨ – (ز) (أ) $\pm \infty$. (ج) $0, +\infty$.

باب (١٩) :

١٩ – (ه) إذا كانت $j \leq n$ ، فإن $x_j(1 + 1/n) \leq x_j + (1/n)x_{n+1}$ و $x_j \leq x_{n+1}$ الآن اجمع .

١٩ – (ط) إذا كانت X تزايدية وغيرها تقاربية في R ، فإن X غير محدودة .

١٩ – (ك) (أ) لا يوجد . (ب ، ج) كل الثلاثة متساوية .

(د) النهايتان المكررتان مختلفتان والنهاية المزدوجة غير موجودة

(ه) النهاية المزدوجة تساوى نهاية مكررة واحدة .

(و) النهايتان المكررتان متساويتان ، لكن النهاية المزدوجة غير موجودة .

١٩ – (ل) افرض أن $x_{mn} = n$ إذا كانت $m = 1$ وأن $x_{mn} = 0$ إذا كانت $m > 1$

١٩ – (ن) فى (ب ، ج ، هـ) .

١٩ – (س) طبق نتيجة ١٩–٧ إلى $x = \sup\{x_{mn} : m, n \in N\}$

١٩ – (ع) افرض $x_{mn} = 0$ عند $m < n$ وأن $x_{mn} = (-1)^m/n$ عند $m \geq n$

باب (٢٠) :

٢٠ – (أ) إذا كانت $a = 0$ خذ $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$. إذا كانت $a > 0$ ، استخدم التقدير

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$$

٢٠ – (ب) استخدم مثال ٢٠ – ٥ (ب) ونظرية ٢٠ – ٦ .

٢٠ – (ج) استخدم تمرين ٢٠ – (ب) – ونظرية ٢٠ – ٦ .

٢٠ – (هـ) أثبت أن $|f(x) - f(\frac{1}{2})| = |x - \frac{1}{2}|$

٢٠ – (و) كل عدد حقيق هو نهاية متتابعة لأعداد قياسية .

٢٠ – (ى) توجد متتابعتان $(x_n), (y_n)$ بحيث إن $\lim(h(x_n)) = 1$ ، $\lim(h(y_n)) = -1$

٢٠ – (ل) أثبت أن $f(a+h) - f(a) = f(h) - f(0)$. إذا كانت f مطردة على R ، فإنها تكون متصلة عند نقطة ما .

٢٠ – (م) أثبت أن $f(0) = 0$ وأن $f(n) = nc$ عند $n \in N$. أيضاً $f(n) + f(-n) = 0$ ، لذلك $f(n) = nc$ عند $n \in Z$ وبما أن $f(m/n) = mf(1/n)$ فينتج بأخذ $m = n$ ، أن $f(1/n) = c/n$ ، إذن $f(m/n) = c(m/n)$. الآن استخدم اتصال f .

٢٠ – (ن) أما $g(0) = 0$ وفى هذه الحالة $g(x) = 0$ لكل x فى R ، أو $g(0) = 1$ وفى هذه الحالة $g(a+h) - g(a) = g(a)\{g(h) - g(0)\}$

باب (٢١) :

٢١ – (ج) $f(1,1) = (3, 1, -1),\ f(1,3) = (5, 1, -3)$

٢١ – (د) متجه (a, b, c) فى مدى الدالة f إذا وإذا فقط $a - 2b + c = 0$

٢١ – (ز) إذا كانت $\Delta = 0$ ، فإن $f(-b, a) = (0, 0)$. إذا كانت $\Delta \neq 0$ فإن الحل الوحيد للمعادلتين

$$ax + by = 0, \qquad cx + dy = 0$$

هو $(x, y) = (0, 0)$

٢١ – (ط) لاحظ أن $g(x) = g(y)$ إذا وإذا فقط كانت $g(x-y) = \theta$

٢١ – (ع) لاحظ أن $c_{ij} = e_i \cdot f(e_j)$ واستخدم متباينة شفارتز .

باب (٢٢) :

٢٢ – (ج) إذا كانت $f(x_0) > 0$ ، فإن $V = \{y \in \mathbf{R} : y > 0\}$ جوار $f(x_0)$.

٢٢ – (ح) افرض أن $f(s, t) = 0$ إذا كانت $st = 0$ فإن $f(s, t) = 1$ ، إذا كانت $st \neq 0$.

٢٢ – (ل) افرض أن معامل أكبر قوة موجب . أثبت أنه يوجد $x_1 < 0 < x_2$ بحيث إن $f(x_1) < 0 < f(x_2)$

٢٢ – (م) افرض أن $f(x) = x^n$. إذا كانت $c > 1$ ، فإن $f(0) = 0 < c < f(c)$

٢٢ – (ن) إذا كانت $f(c) > 0$ ، فيوجد جوار من c تكون عليه f موجبة ، ومن ثم $c \neq \sup N$. بالمثل إذا كانت $f(c) < 0$.

٢٢ – (س) بما أن f متزايدة بدقة ، وأن $a < b$ ، فإن f ترسم الفترة المفتوحة (a, b) فى نمط أحادى فوق الفترة المفتوحة $(f(a), f(b))$ ، التى منها ينتج أن f^{-1} متصلة .

٢٢ – (ع) نعم . افرض أن $a < b$ ثابتة وافرض أن $f(a) < f(b)$. إذا كانت c بحيث إن $a < c < b$ ، فإنه إما (i) $f(c) = f(a)$ ، (ii) $f(c) < f(a)$ ، أو (iii) $f(a) < f(c)$. حالة (i) مرفوضة من الفرض . إذا كانت(ii) ، فإنه توجد a_1 فى (c, b) بحيث أن $f(a_1) = f(a)$ ، وهذا مخالف . حينئذ تظل (iii) صحيحة بالمثل $f(c) < f(b)$ وأن f متزايدة بدقة .

٢٢ – (ف) افرض أن g متصلة وافرض أن $c_1 < c_2$ هما النقطتان فى $\mathbf{I}$ التى عندهما تصل g لأعلاها . إذا كانت $0 < c_1$ ، اختر عددين a_1, a_2 بحيث إن $0 < a_1 < c_1 < a_2 < c_2$ افرض أن k تحقق $g(a_i) < k < g(c_i)$. حينئذ توجد ثلاثة أعـــداد b_i بحيث إن $a_1 < b_1 < c_1 < b_2 < a_2 < b_3 < c_2$ وحيث $k = g(b_i)$ ، مما يخالف الفرض . لذلك ، يجب أن يكون $c_2 = 1$ و $c_1 = 0$. استخدم الآن نفس النمط من المناقشة عند النقط التى عندها تصل g لأدناها لتحصل على تخالف .

٢٢ – (ق) لاحظ أن $\varphi^{-1}(S)$ ليست مدمجة . أيضاً φ^{-1} ليست متصلة عند $(1, 0)$.

باب (٢٣) :

٢٣ – (أ) الدالة فى مثال ٢٠ – ٥ (أ ، ب ، ط) متصلة بانتظام على $\mathbf{R}$.

٢٣ – (ز) الدالة g محدودة ومتصلة بانتظام على $[0, p]$.

٢٣ – (ط) إذا كانت (x_n) متتابعة فى $(0, 1)$ حيث $x_n \to 0$ حينئذ $(f(x_n))$ هى متتابعة كوشى ولذلك تكون تقاربية فى $\mathbf{R}$.

٢٣ – (ك) خذ $f(x) = \sin x, g(x) = x$ عند $x \in \mathbf{R}$.

باب (٢٤) :

٢٤ – (ب) خذ $((1/n) f)$ حيث f كما فى مثال ٢٠ – ٥ (ز) .

٢٤ – (ج) أحصل على الدالة فى مثال ٢٠ – ٥ (ح) بهذه الطريقة .

٢٤ (ﻫ) – (أ) التقارب منتظم على $[0, 1]$.

(ب) التقارب منتظم على أى فئة مغلقة لا تحتوى 1.

(ج) التقارب منتظم على $[0, 1]$ أو على $[c, +\infty), c > 1$

٢٤ (ى) – ينتج أن f متزايدة باطراد . حيث f متصلة بانتظام ، إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، افرض أن $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_h = 1$ بحيث إن $f(x_j) - f(x_{j-1}) < \varepsilon$ وافرض أن n_j بحيث إنه إذا كانت $n \geq n_j$ فإن $|f(x_j) - f_n(x_j)| < \varepsilon$. إذا كانت $n \geq \sup\{n_0, n_1, \ldots, n_h\}$ أثبت أن $|f(x) - f_n(x)| < 3\varepsilon$ لكل $x \in \mathbf{I}$.

٢٤ – (ق) أى كثيرة الحدود (أو نهاية منتظمة لمتتابعة كثيرات الحدود) تكون محدودة على فترة محددة .

باب (٢٥) :

٢٥ – (ز) (ب) إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، فتوجد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث أنه إذا كانت $c < x < c + \delta(\varepsilon),\ x \in D(f)$ فإن $|f(x) - b| < \varepsilon$.

(ج) إذا كانت (x_n) أى متتابعة فى $D(f)$ بحيث إن $c < x_n$ وكانت $c = \lim (x_n)$ فإن $b = \lim (f(x_n))$.

٢٥ – (ى) (أ) إذا كانت $M > 0$ ، فإنه توجد $m > 0$ بحيث إنه إذا كانت $x \geq m$ وكانت $x \in D(f)$ ، فإن $f(x) \geq M$.

(ب) إذا كانت $M < 0$ ، فإنه توجد $\delta > 0$ بحيث إنه إذا كانت $0 < |x - c| < \delta$ ، فإن $f(x) < M$.

٢٥ – (ل) (أ) افرض أن $\varphi(r) = \sup\{f(x) : x > r\}$ وضع $L = \lim_{r\to+\infty} \varphi(r)$
بالتناوب إذا كانت $\varepsilon > 0$ فإنه توجد $m(\varepsilon)$ بحيث إنه إذا كانت $x \geq m(\varepsilon)$ ،
حينئذ $|\sup\{f(x) : x > r\} - L| < \varepsilon$

٢٥ – (م) استخدم مفترض ٢٥ – ١٢ .

٢٥ – (ن) اعتبر الدالة $f(x) = -1/|x|$ عند $x \neq 0$ ، $f(0) = 0$.

٢٥ – (ع) اعتبر مثال ٢٠ – ٥ (ح) .

٢٥ – (ص) ليس ضرورياً . اعتبر $f_n(x) = -x^n$ عند $x \in I$.

٢٥ – (ق) نعم .

باب (٢٦) :

٢٦ – (ب) أثبت أن مجموعة $\mathscr{A}$ لكثيرات الحدود فى $\cos x$ تحقق فرض نظرية ستون – فير – شتراس .

٢٦ – (هـ) إذا كانت $f(0) = f(\pi) = 0$ ، أولا قرب f بدالة g تتلاشى على بعض فترات $[\pi - \delta, \pi]$ و $[0, \delta]$. حينئذ اعتبر $h(x) = g(x)/\sin x$ عندما $x \in (0, \pi)$ ، $h(x) = 0$ عند $x = 0, \pi$.

٢٦ (ط) – اعتبر $f(x) = \sin(1/x)$ عند $x \neq 0$.

٢٦ (ك) – استخدم نظرية هاين – بورال أو نظرية غطاء لبسيج كما فى برهان نظرية الاتصال المنتظم .

٢٦ – (ف) (أ) نطاق مدمج ، متتابعة متساوية الاتصال بانتظام لكن غير محدودة .
(ب) نطاق مدمج ، متتابعة محدودة لكن ليست متساوية الاتصال بانتظام .
(ج) نطاق ليس محدوداً ، متتابعة محدودة ،ومتساوية الاتصال بانتظام .

باب (٢٧) :

٢٧ – (د) لاحظ أن $g'(0) = 0$ وأن $g'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ عند $x \neq 0$.

٢٧ – (هـ) نعم .

٢٧ – (ل) يمكننا كتابة

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{x-c}{x-y} \cdot \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \frac{y-c}{x-y} \cdot \frac{f(y)-f(c)}{y-c}$$

٢٧ – (ق) (ب) إذا كانت $b \neq 0$ ، حينئذ عندما $n \in \mathbf{N}$ تكون كبيرة بكفاية بإعطاء $x > n$ ، فإنه توجد $x_n > n$ بحيث إن

$$|(f(x)-f(n))/x| = |(x-n)/x|\,|f'(x_n)| \geq |(x-n)/x|\,|b|/2.$$

باب (٢٨) :

٢٨ – (و) بين جذور p' المتتالية تكون كثيرة الحدود مطردة دقيقة . إذا كانت x_0 جذراً تكراريا مفرد الكثيرة الحدود من p' ، فإن x_0 هي نقطة نهاية عظمى دقيقة لكثيرة الحدود p .

٢٨ – (ح) للدالة f جذور مكررة عددها n عند كل من $x = \pm 1$; الدالة f' لها جذور مكررة عددها $n - 1$ عند كل من $x = \pm 1$ ، ولها جذر بسيط داخل $(-1, 1)$ ؛ الخ .

٢٨ – (س) إستخدام تمرين ٢٧ – س

باب (٢٩) :

٢٩ – (د) إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، فإنه توجد أعداد قياسية $r_1, \ldots, r_m$ في $\mathbf{I}$ بحيث إن $0 \leq f(x) < \varepsilon$ إذا كانت $x \neq r_k$. افرض أن P تقسيما بحيث يكون طول كل من (على الأكثر $2m$) فترات جزئية تحتوى واحداً من الأعداد $r_1, \ldots, r_m$ أقل من $\varepsilon/2m$. أثبت أن $0 \leq S(P; f, g) \leq 2\varepsilon$

٢٩ – (ى) إذا كانت $f_1(x) = f(x)$ عند $x \notin \{c_1, \ldots, c_m\}$ وكانت $\varepsilon > 0$ ، افرض أن P هي تقسيما بحيث أن طول كل من الفترات الجزئية المحتوية على واحد من $c_1, \ldots, c_m$ أقل من $\varepsilon/2mM$ ، حيث $M \geq \sup\{\|f\|_J, \|f_1\|_J\}$. باستخدام نفس النقط الوسطى ، نحصل على $|S(P; f, g) - S(P; f_1, g)| < \varepsilon$ حيث $g(x) = x$ عند $x \in J$

٢٩ – (ن) افرض أن $c \in (a, b)$ ؛ حينئذ تكون f قابلة للتكامل على $[a, c]$ ، . إذا كانت g_1 هي قيد g على $[a, c]$ ، فينتج من ٢٧ (ن) أن g'_1 متصلة على $[a, c]$ ؛ بالمثل للقيد g_2 من g على $[c, b]$. ينتج من نظرية ٢٩ – ٨ أن fg'_1 قابلة للتكامل على $[a, c]$ وأن fg'_2 قابلة للتكامل على $[c, b]$ وأن

$$\int_a^c f\,dg = \int_a^c fg'_1, \qquad \int_c^b f\,dg = \int_c^b fg'_2.$$

افرض الآن أن $(fg')(x) = f(x)g'_1(x)$ عند $a \leq x \leq c$ وأن $(fg')(x) = f(x)g'_2(x)$ عند $c < x \leq b$.

٢٩ (ع) – إذا كانت $\|P\| < \delta$ وإذا كانت Q تكريراً P ، حينئذ $\|Q\| < \delta$.

٢٩ – (ص) إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، افرض أن $P_\varepsilon = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ هو تقسيم J بحيث إنه إذا كانت $P \supseteq P_\varepsilon$ ، وكانت $S(P; f)$ أى حاصل جمع ريمان المناظر ، حينئذ $|S(P; f) - \int_a^b f| < \varepsilon$. افرض أن $M \geq \|f\|_J$ ، وافرض $\delta = \varepsilon/4nM$. إذا كانت $Q = (y_0, y_1, \ldots, y_m)$ تقسيما بعمود $\|Q\| < \delta$ ، افرض أن $Q^* = Q \cup P_\varepsilon$ ، بحيث إن $Q^* \supseteq P$ وبحيث يكون لها على الأكثر $n - 1$ نقطة أزيد من نقط Q . أثبت أن $S(Q^*; f) - S(Q; f)$ تختزل إلى $2(n - 1)$ حداً على الأكثر فى الصورة :

$$\pm\{f(\xi) - f(\eta)\}\,(x_j - y_k) \qquad \text{حيث} \qquad |x_j - y_k| < \delta$$

باب (٣٠) :

٣٠ – (ج) إذا كانت $\varepsilon > 0$ معطاة ، افرض P_ε كما فى برهان ٣٠ – ٢ . إذا كانت P أى تكرير من P_ε فإن

$$|S(P_\varepsilon; f, g) - S(P; f, g)| \leq \sum |f(u_k) - f(v_k)|\,|g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

حيث $|u_k - v_k| < \delta(\varepsilon)$ وإذن يكون المقدار εM سائدا لهذا المجموع .
الآن استخدم معيار كوشى .

٣٠ – (هـ) حساب مباشر يعطى

$$\left(\int_a^b (f(x))^n\, dx\right)^{1/n} \leq M(b-a)^{1/n}.$$

وبالعكس ، $f(x) \geq M - \varepsilon$ على فترة جزئية ما من $[a, b]$.

٣٠ – (ح) إذا كانت $m \leq f(x) \leq M$ عند $\alpha \leq x \leq \beta$ فإنه يوجد A حيث $m \leq A \leq M$ بحيث أن

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f\, dg = A\{g(\beta) - g(\alpha)\}.$$

٣٠ – (ط) افرض أن $f(x) = -1$ عند $x \in [-1, 0)$ وأن $f(x) = 1$ عند $x \in [0, 1]$

٣٠ – (ى) استخدم نظرية القيمة المتوسطة ٢٧ – ٦ لحصول على $F(b) - F(a)$. كحاصل جمع ريمان لتكامل f .

٣٠ – (م) إذا كانت $m \leq f(x) \leq M$ عند $x \in J$ ، فإن

$$m\int_a^b p \leq \int_a^b fp \leq M\int_a^b p.$$

استخدم الآن نظرية بولتزانو ٢٢ – ٤ .

٣٠ – (ع) الدالتان φ, φ^{-1} أحاديتان ومتصلتان . التقسيمات للفترة $[c, d]$ هى تناظر أحادى مع التقسيمات للفترة $[a, b]$ وحواصل جمع ريمان – اشتلتجز للتركيب $f\circ g$ بالنسبة إلى $g\circ\varphi$ فى تناظر أحادى مع تلك الدالة f بالنسبة إلى g .

٣٠ – (ت) (أ) $3/4$. (ج) 9 . (ه) $\pi/2$.

باب (٣١) :

٣١ – (ك) بما أن $f_n(x)-f_n(c)=\int_c^x f'_n$ فيمكننا استخدام نظرية ٣١ – ٢ لنحصل على $f(x)-f(c)=\int_c^x g$ لكل $x\in J$. أثبت أن $g=f'$.

٣١ – (ق) استخدم نظرية ٣٠ – ٩ إلى (٣١ – ٢) حيث $h(t)=(b-t)^{n-1}$.

٣١ – (ت) أثبت أن الدالتين H و G متصلتان . يكون الباقى من البرهان كما فى ٣١ – ٩ .

٣١ – (خ) الدالة f متصلة بانتظام على $J_1\times J_2$.

٣١ – (ذ) افرض أن $g_2(0)=0,\ g_2(x)=\frac{1}{2}$ عند $0<x<1$ ، $g_2(x)=1$.

باب (٣٢) :

٣٢ – (د) (أ) ، (ب) ، (د) ، (ه) تقاربيــة .

٣٢ – (ه) (أ) تقاربية عند $p, q>-1$ (ب) تقاربية عند $p+q>-1$

٣٢ – (و) (أ) ، (ج) تقاربيان مطلقان . (ب) تباعدية .

٣٢ – (ز) (أ) تقاربية مطلقة إذا كانت $q>p+1$

(ب) تقاربية إذا كانت $q>0$ وتقاربيــة مطلقة إذا كانت $q>1$.

باب (٣٣) :

٣٣ – (أ) إذا كانت $0\le t\le\beta$ فإن $x^t e^{-x}\le x^\beta e^{-x}$.

٣٣ – (ب) استخدم اختبار درشلت ٣٢ – ٤ .

٣٣ – (ج) (أ) تقاربية بانتظام عند $|t|\ge a>0$.

(ب) تباعدية إذا كانت $t\le 0$ وتكون تقاربية بانتظام إذا كانت $0<c\le t$.

(ج) ، (ه) تقاربيتان بانتظام لجميع t .

٣٣ – (و) . $\sqrt{\pi}$

باب (٣٤) :

٣٤ – (ج) جمع الحدود فى المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ لتنتج تقاربا إلى ١ – وإلى صفر .

٣٤ – (ز) اعتبر $\Sigma\,((-1)^n n^{-1/2})$. لكن ، اعتبر أيضاً الحالة حيث $a_n \geq 0$.

٣٤ – (ح) إذا كانت $a, b \geq 0$ ، فإن $2(ab)^{1/2} \leq a+b$

٣٤ – (ط) أثبت أن $b_1+b_2+\cdots+b_n \geq a_1(1+\frac{1}{2}+\cdots+1/n)$

٣٤ – (ى) استخدم تمرين ٣٤ – و (أ) .

٣٤ – (ك) وضح أن $a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}$ محدودة من أسفل بالمقدار $\frac{1}{2}\{a_1+2a_2+\cdots+2^n a_{2^n}\}$ ومن أعلى بالمقدار :

$$a_1+2a_2+\cdots+2^{n-1}a_{2^n-1}+a_{2^n}$$

٣٤ (س) – اعتبر حواصل الجمع الجزئية s_k حيث $n/2 \leq k \leq n$ استخدم معيار كوشى .

باب (٣٥) :

٣٥ – (ج) (أ) ، (ه) تباعديتان . (ب) تقاربية .

٣٥ – (د) (ب) ، (ج) ، (ه) تباعدية .

٣٥ – (ز) (أ) تقاربيـــة . (ج) تباعدية .

٣٥ – (ل) إذا كانت $r < 1$ فإن $m < \log(m+1) - r/m$ عندما $m \in \mathbf{N}$ تكون كبيرة بكفاية أثبت أن المتتابعة $(x_n n \log n)$ متزايدة .

باب (٣٦) :

٣٦ – (أ) استخدم اختبار درشلت .

٣٦ – (د) (أ) تقاربيـــة . (ب) تباعدية .

٣٦ – (ه) (ج) إذا كانت $\Sigma\,(a_n)$ تقاربية مطلقة ، كذلك تكون $\Sigma\,(b_n)$. إذا كانت $a_n = 0$ ماعدا عندما تكون $\sin n$ قريبة من ± 1 ، فيمكن أن تحصل على مثال عكسى (د) اعتبر $a_n = 1/n(\log n)^2$.

٣٦ – (ط) إذا كانت $m > n$ ، فإن $s_{mn} = +1$ ؛ إذا كانت $m = n$ فإن : $s_{mn} = 0$ إذا كانت $m > n$ ، فإن $s_{mn} = -1$

٣٦ – (ك) لاحظ أن $2mn \leq m^2+n^2$.

باب (٣٧) :

٣٧ – (أ) (أ) ، (ج) تتقاربان بانتظام لكل x (ب) تتقارب عند $x \neq 0$ وبانتظام عندما تقع x فى مكملة أي جوار $x = 0$ (د) تتقارب عند $x > 1$ وبانتظام عند $x \geq 0$ حيث $a > 1$.

٣٧ – (ج) إذا كانت المتسلسلة تقاربية بانتظام ، فإن

$$|c_n \sin nx + \cdots + c_{2n} \sin 2nx| < \varepsilon,$$

بشرط أن تكون n كبيرة بكفاية . أحصر الآن الانتباه بحيث تقع x فى فترة تحقق $kx > \frac{1}{2}$ عند $n \le k \le 2n$

٣٧ – (ح) (أ) ∞ ، (ج) $1/e$ ، (و) 1 .

٣٧ – (ل) استخدم نظرية الوحدوية ٣٧ – ١٧ .

٣٧ – (ن) أثبت أنه إذا كانت $n \in N,$ ، فإنه توجد كثيرة حدود P_n بحيث أنه إذا كانت $x \neq 0$ ، فإن $f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} P_n(1/x)$

٣٧ – (ر) المتسلسلات $A(x) = \Sigma (a_n x^n),\ B(x) = \Sigma (b_n x^n)$, and $C(x) = \Sigma (c_n x^n)$ تتقارب لدوال متصلة على I من نظرية الضرب ٣٧ – ٨ ، نجد أن $C(x) = A(x)\, B(x)$ عند $0 \le x < 1$ ، ومن الاتصال نجد أن $C(1) = A(1)\, B(1)$.

٣٧ – (ش) متتابعة حواصل الجمع الجزئية تزايدية على الفترة $[0, 1]$.

٣٧ – (ت) إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، فإن $|a_n| \le \varepsilon p_n$ ، عند $n > N$. قسم حاصل الجمع $\sum (a_n x^n)$ إلى حاصل جمع على $n = 1, \ldots, N$ وحاصل جمع على $n > N$.

باب (٣٨) :

٣٨ – (ب) (ب) إذا كانت $a_n = 0$ ، فإن

$$F(x + 2\pi) = \int_c^{x+2\pi} f(t)\, dt = \int_c^x f(t)\, dt + \int_x^{x+2\pi} f(t)\, dt$$
$$= F(x) + 0 = F(x)$$

لكل $x \in \mathbf{R}$.

٣٨ – (هـ) (ج) احسب $f_2(0)$ بطريقتين .

٣٨ – (ز) (أ) إذا كانت k_1 متصلة ، فإن $k_1(-\pi) = -\pi^3$ ، لكن بما أن k_1 لها دورة 2π حينئذ $k_1(-\pi) = k_1(\pi) = \pi^3$.

٣٨ (ط) – (ب) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \cdots\right]$

(ج) $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \cdots\right]$

(هـ) $\frac{\pi^2}{6} - \left[\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \cdots\right]$

٣٨ – (ك) (ب) $\frac{8}{\pi}\left[\frac{\sin 2x}{1\cdot 3}+\frac{2\sin 4x}{3\cdot 5}+\frac{3\sin 6x}{5\cdot 7}+\cdots\right]$

(هـ) $\frac{8}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^3}+\cdots\right]$

٣٨ – (ن) (د) استخدم تمرين ٣٨ – ز (ب) .

٣٨ – (س) (أ) $\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin \frac{1}{2}\pi x}{1}-\frac{\sin \pi x}{2}+\frac{\sin \frac{3}{2}\pi x}{3}-\cdots\right]$

(ب) $1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{4}\right]$

٣٨ – (ق) استخدم نظرية فيجر ٣٨ – ١٢ نظرية ١٩ – ٣ .

٣٨ – (ر) عدل برهاني ٣٨ – ٧ ، ٣٨ – ١٢

باب (٣٩) :

٣٩ – (ز) لدينا $|G(u,v)-G(0,0)|\le|u^2+v^2|=\|(u,v)\|^2$ بحيث أن : $DG(0,0)(u,v)=0$. إذا كانت $(x,y)\neq(0,0)$ ، فإن :

$$D_1G(x,x)=2x\sin(2x^2)^{-1}-x^{-1}\cos(2x^2)^{-1}$$

وهي غير محدودة عند $x\to 0$.

٣٩ – (ل) (أ) $\nabla_{(a,b,c)}f_1=(2a,2b,2c)$

(ج) $\nabla_{(a,b,c)}f_3=(bc,ac,ab)$

٣٩ – (م) (أ) $3/\sqrt{2}$ ، (ج) صفر . .

٣٩ – (س) (أ) عند $(1,2)$ يكون $\{(x,y,z): z-5=2(x-1)+4(y-2)\}$

(ج) عند $(1,1)$ يكون $\{(x,y,z): z-\sqrt{2}=-(x+y-2)/\sqrt{2}\}$

٣٩ – (ف) (أ) عند $t=0$ يكون $\{(x,y,z): x=t, y=0, z=0\}$ ، عند $t=1$ يكون $\{(x,y,z): x=1+s, y=1+2s, z=1+3s\}$

(ج) عند $t=\frac{1}{2}\pi$ يكون $\{(x,y,z): x=-2s,\ y=2,\ z=\frac{1}{2}\pi+s\}$

٣٩ – (ق) (ب) عند النقطة $(3,-1,-3)$ مناظرة إلى $(s,t)=(1-2)$ نجد أن

$$S_h=\{(x,y,z): x=3+(s-1)+(t-2),\ y=-1+(s-1)-(t-2),\ z=-3+2(s-1)-4(t-2)\}$$

(د) عند النقطة $(1,0,0)$ المناظرة إلى $(s,t)=(0,\frac{1}{2}\pi)$ نجد أن

$$S_h = \{(x, y, z) : x = 1, y = s, z = -(t - \tfrac{1}{2}\pi)\}$$

٣٩ – (ت) لاحظ أنه إذا كانت $z \in \mathbf{R}^r$, $y \in \mathbf{R}^q$ فإن $(y, z) \in \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^r = \mathbf{R}^{q+r}$
بحيث أن $\|(y, z)\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$

باب (٤٠) :

٤٠ – (أ) $F'(t) = 2(3t+1)3 + 2(2t-3)2 = 26t - 6$

٤٠ – (د) $D_1F(s, t) = (\sin s \cos t + \sin t)(-\sin s) + (\cos s + \sin t)(\cos s \cos t) + 0$

٤٠ – (ز) (أ) $D_1F(x, y) = f'(xy)y, \quad D_2F(x, y) = f'(xy)x$

(د) $D_1F(x, y) = f'(x^2 - y^2)(2x), \quad D_2F(x, y) = f'(x^2 - y^2)(-2y)$

٤٠ – (ك) (ب) بما أن $g'(t) = D_1 f(tc)\, c_1 + \ldots + D_p f(tc) c_p$ فينتج من علاقة أويلر أن

$$tg'(t) = (tc_1)D_1f(tc) + \cdots + (tc_p)D_pf(tc) = kf(tc) = kg(t)$$

لذلك يكون $g(t) = Ct^k$ لماذا ؟ لثابت ما C . بما أن $f(c) = g(1) = C$ ، فلستنتج أن $f(tc) = g(t) = t^k f(c)$ ومنها تكون f متجانسة من درجة k .

٤٠ – (م) بما أن

$$\|B(x+u, y+v) - B(x, y) - (B(x, v) + B(u, y))\|$$
$$= \|B(u, v)\| \le M\,\|u\|\,\|v\| \le \tfrac{1}{2}M(\|u\|^2 + \|v\|^2) = \tfrac{1}{2}M\,\|(u, v)\|^2$$

ينتج أن $B(x, v) + B(u, y)$ موجودة وتساوى $DB(x, y)(u, v)$.

٤٠ – (ع) $Dg(c)(u) = (ug_1'(c), \ldots, ug_p'(c)) = ug'(c)$ عند $u \in \mathbf{R}$ ، ينتج من قاعدة السلسلة أن

$$Dh(c)(u) = Df(g(c))(Dg(c)(u)) = Df(g(c))(ug'(c)) = uDf(g(c))(g'(c))$$

ومنها $h'(c) = Df(g(c))(g'(c))$

٤٠ – (ف) إذا كانت $f = (f_1, \ldots, f_q)$ فإنه توجد نقط $c_i \in S$ بحيث أن : $f_i(b) - f_i(a) = Df_i(c_i)(b-a)$ افرض الآن أن L لها تمثيل المصفوفة $[D_j f_i(c_i)]$

٤٠ – (ص) بنظرية ١٢ – ٧ تكن لأى نقطتين فى Ω اتصالها بمنحنى مضلعى يقع داخل Ω . طبق نظرية القيمة المتوسطة على كل ضلع من هذا المنحنى .

٤٠ – (ش) فى الحقيقة $D_xf(x, y) = y(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-1} + 4x^2y^3(x^2 + y^2)^{-2}$
$D_{yx}f(0, 0) = -1$ ، بينما $D_{xy}f(0, 0) = +1$

٤٠ – (ث) إذا كانت $\varphi : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbf{R}^q$ معرفة بأنها $\varphi(t) = f(a + t(b-a))$

فإن $\varphi'(t) = Df(a + t(b - a))(b - a)$ اكتب $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_q(t))$
حيث $\varphi_j(t) = f_j(a + t(b - a))$) ولاحظ أن $\varphi_j(1) - \varphi_j(0) = \int_0^1 \varphi_j'(t)$

باب (٤١) :

٤١ – (أ) استخدم تمرين ٢١ . ع .

٤١ – (د) هنا $Df(0) = 0$. لا .

٤١ – (هـ) اعتبر تمرين ٢٧ – ح ، ٢٢ – س

٤١ – (و) اعتبر تمرين ٤٠ . ل .

٤١ – (ى) أوجد النهاية العظمى النسبية قرب 0 .

٤١ – (ف) (أ) عند $(1, 1, 2)$ يكون $S_F\{(x, y, z) : 2x + 2y - z = 2\}$
(ج) عند $(4, \frac{1}{2}, 2)$ يكون $S_F = \{(x, y, z) : x + 8y - 2z = 4\}$

٤١ – (ق) إذا كانت $D_1 f$ متلاشيان على فئة مفتوحة ، استخدم تمرين ٤٠ – ق .
إذا كانت $D_1 f(x_0, y_0) \neq 0$ حينئذ اعتبر $F(x, y) = (f(x, y), y)$ قرب (x_0, y_0).

٤١ – (ر) إذا كانت $D_1 g(c) \neq 0$ ، حينئذ اعتبر $G(x, y) = g(x) + (0, y)$

٤١ – (ت) وضح ، كما فى برهان ٤١ – ٦ ، أنه إذا كانت $\|y\| < m/2$. حينئذ
يوجد متجه $x \in R^p$ حيث $\|x\| \leq 1$ بحيث أن $y = L_1(x)$.

٤١ –(ث) إذا كانت $y \in R^p$ ، افرض أن $x_0 = 0$: وأن

$$x_{n+1} = x_n - (f(x_n) - f(x_{n-1}) - (x_n - x_{n-1}))$$

وضح ، كما فى برهان ٤١ – ٦ ، أن $\bar{x} = \lim (x_n)$ موجودة وأن $f(\bar{x}) = y$.

باب (٤٢) :

٤٢ – (أ) (أ) نقطة ركوب عند $(0, 0)$
(ب) نهاية صغرى نسبية دقيقة عند $(-2, \frac{3}{2})$.
(ج) نقطة ركوب عند $(0, -1)$ ، نهاية صغرى نسبية دقيقة عند $(0, 3)$
(و) نقطة ركوب عند $(0, 0)$، نهاية صغرى نسبية دقيقة عند $(0, -1)$،
$(0, 2)$.

٤٢ – (د) إذا لم تكن f ثابتة ، حينئذ إما الأعلى أو الأدنى للدالة f على $S = \{x \in R^p : \|x\| \leq 1\}$ ليس صفرا . بما أن S مدمجة فإن هذا الأعلى أو الأدنى يكون عند نقطة $c \in S$. الفرض يلغى إمكانية كون $\|c\| = 1$.

٤٢ – (و) (أ ، د) نهاية صغرى نسبية عند (0, 0) . (ب ، ج ، ه) نقطة ركوب عند (0, 0) (و) نهاية صغرى نسبية دقيقة عند (0, 0) .

٤٢ –(ز) نقطة ركوب عند (1, 1) .

٤٢ – (ح) القرود لها ذيول .

٤٢ – (ط) $\frac{7}{3}$. ٤٢ – (ك) $\frac{2}{7}$.

٤٢ – (ق) (أ) نهاية عظمى = ١ ، تحدث عند $(\pm 1, 0)$ ؛ بأنها صغرى = -1 ، تحدث عند $(0, \pm 1)$.

(ب) نهاية عظمى = 3 ، تحدث عند $(1, 0)$ ، قيمة صغرى = -1 ، تحدث عند $(-1, 0)$.

(ج) نهاية عظمى = 4 ، تحدث عند $(1, \pm 1)$ ، نهاية صغرى = -1 تحدث عند $(-1, 0)$.

(د) نهاية عظمى = 1 ، تحدث عند $(0, \pi/2)$ ، قيمة صغرى = -1 تحدث عند $(0, -\pi/2)$.

٤٢ – (ش) نهاية عظمى = 1 ، تحدث عند $(0, 0, 1)$ ، نهاية صغرى = $5/9$ ، تحدث عند $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

باب (٤٣) :

٤٣ – (ب) إذا كانت $p \in \mathbf{N}$ معطاة ، افرض أن $n > (2^{1/p} - 1)^{-1}$. إذا كانت الأطوال الجانبية لخلية I فى $\mathbf{R}^p$ هى $0 < a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_p$, افرض أن $c = a_1/n$ فإن تكون I محتوية فى اتحاد $n([a_2/c]+1)\cdots([a_p/c]+1)$ مكعبات بطول جانبى c ، وله محتوى كل أقل من $2(a_1 \cdots a_p) = 2c(I)$. حينئذ ، إذا كانت Z محتوية فى اتحاد الخلايا بمحتوى كل أقل من ε ، فإنها تكون محتوية فى الاتحاد لمكعبات بمحتوى كل أقل من 2ε .

٤٣ – (ه) لا .

٤٣ – (ح) إذا كان الإقفال J_j هو $[a_{j1}, b_{j1}] \times \cdots \times [a_{jp}, b_{jp}]$, عند $j = 1, \ldots, n$, وإذا كان $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$, ، افرض أن P_1 هو التقسيم للفترة $[a_1, b_1]$ الذى نحصل عليه باستخدام النقط $\{a_{j1}, b_{j1} : j = 1, \ldots, n\}, \ldots$ ، وأن P_p هو تقسيم الفترة $[a_p, b_p]$ الذى نحصل عليه باستخدام $\{a_{jp}, b_{jp} : j = 1, \ldots, n\}$ تنتج التقسيمات $P_1, \ldots, P_p$ تقسيما للخلية I .

٤٣ – (ط) احصر Z فى الاتحاد لعدد محدود من خلايا مغلقة فى I بمحتوى كل أقل من ε استخدم الآن ٤٣ . ح .

٤٣ – (ى) احصر Z فى الاتحاد لعدد محدود من خلايا مفتوحة فى I بمحتوى كلى أقل من ε. استخدم الآن ٤٣ ح.

٤٣ – (ك) نكون متتابعة تقسيمات من I إلى مكعبات بطول جانب $2^{-n}\delta$ بتنصيف متوال لأضلاع I. بإعطاء مكعب $K \subseteq I$ بطول جانبى r، احصر K فى الاتحاد لكل المكعبات الموجودة فى التقسيم النونى الذى تقاطعه مع K هو فئة غير خالية. إذا كانت n كبيرة بدرجة أن $(1+\delta/2^{n-1}r)^p < 2$ ، فإن لهذا الاتحاد محتوى كلى أقل من $2c(K)$.

٤٣ – (ل) استخدم (٤٣ – ز). ٤٣ – (م) استخدم (٤٣ – ل).

٤٣ – (ص) أولا اعتبر الحالة $f = g$ ، ثم اعتبر $(f+g)^2$.

٤٣ – (ر) افرض $M > \|f\|_I, \|g\|_I$ بما أن f, g متصلتان بانتظام على K ، إذا كانت P_ε دقيقة بكفاية، حينئذ f, g تختلفان بمقدار أقل من $\varepsilon/2M$ على كل K_i وبحيث أنه لأى $p_i \in K_i$ ، يكون $|\int_K fg - \sum f(p_i)g(p_i)c(K_i)| \leq (\varepsilon/2)c(K)$ وإذن نجد أن

$$\left|\int_K fg - \sum f(x_i)g(y_i)c(K_i)\right| \leq \left|\int_K fg - \sum f(x_i)g(x_i)c(K_i)\right|$$

$$+\left|\sum f(x_i)[g(x_i)-g(y_i)]c(K_i)\right| \leq \varepsilon c(K)$$

٤٣ – (ت) (د) إذا كانت Z مدمجة ومحتوية فى اتحاد الخلايا المفتوحة $J_1, J_2, \ldots$ فإنها تكون محتوية فى الاتحاد لعدد محدود من هذه الخلايا.

باب (٤٤):

٤٤ – (ب) (أ) إذا كانت $c \notin b(A)$ ، فإنه إما أن تكون c نقطة داخلية من A أو تكون نقطة داخلية من $\mathscr{C}(A)$. فى أى حالة، يوجد جوار للنقطة c منفصل عن $b(A)$ ، وإذن $\mathscr{C}(b(A))$ مفتوحة.

٤٤ – (ج) فى مثال (٤٣ – ٢ (ز))، يكون $S^- = b(S) = I \times I$ لكن $b(I \times I) = I \times \{0, 1\} \cup \{0, 1\} \times I$

٤٤ (د) – بما أن $(A \cap B)^- \subseteq A^- \cap B^-$ ، فينتج أن

$$\begin{aligned} b(A \cap B) &= (A \cap B)^- \cap (\mathscr{C}(A \cap B))^- \subseteq A^- \cap B^- \cap (\mathscr{C}(A) \cup \mathscr{C}(B))^- \\ &= A^- \cap B^- \cap (\mathscr{C}(A)^- \cup (\mathscr{C}(B)\ ) \\ &= (B^- \cap b(A)) \cup (A^- \cap b(B)) \subseteq b(A) \cup b(B) \end{aligned}$$

٤٤ (ى) – إذا كانت $\varepsilon > 0$ ، افرض أن P_ε تقسيم مثل الذى فى تمرين (٤٣ – ع) وبحيث أن الاتحاد لخلايا فى P_ε الذى يحتوى نقطاً فى $b(A)$ محتوى كلى أقل من $\varepsilon/2\|f\|_I$ استخدم الآن تمرين (٤٣ – ع) إلى قيد الدالة f إلى A.

٤٤ – (ك) بما أن $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$ عند $x \in A,$ ، فينتج أن : $m\int_A g \le \int_A fg \le M\int_A g$. إذا كانت $\int_A g \ne 0$ خذ $\mu = (\int_A fg)(\int_A g)^{-1}$

٤٤ – (ن) الفئة $b(K) = K$ ليس لها محتوى صفر .

٤٤ – (ص) لاحظ أن $F(x, y) = \int_0^y \{\int_0^x f(s, t)\, ds\}\, dt$

باب (٤٥) :

٤٥ – (أ) افحص البراهين ٤٥ – ١ ، ٤٥ – ٤ .

٤٥ – (د) (أ) 6π

٤٥ – (و) $(e - 1)^2$

٤٥ – (ح) افرض أن $u = xy,\ v = y/x^2$. المساحة تساوي $(\log 2)/3$.

Glossary	**قائمة بالمصطلحات العلمية**
Introduction	**المقـــدمة**
Elements	عناصر
Set	فئـــة
Theory	نظرية
Class	درجة أو رتبـــة
Collection	مجمـــوعة
Aggregate	جملة أو مجموع
Ensemble	طقـــم
Section	باب
Member	عضو
Subset	فئة جزئية
Proper subset	فئة جزئية فعلية
Integers	أعداد صحيحة
Natural numbers	أعداد طبيعية
Unit interval	فترة الوحـــدة
Complex numbers	الأعداد المركبـــة
Intersection	تقاطع
Union	إتحـــاد
Empty set	فئـــة خالية
Void set	فئـــة شاغرة
Disjoint	غير مربوطة
Non-intersecting	غير متقاطعة
Idempotent property	خاصية المماثلة
Cummulative property	خاصية التبديل
Associative property	خاصية الترافق
Distributive property	خاصية التوزيع
Complement	إتمام أو إكمال
Cartisian product	حاصل الضرب الكارتيزى

Ordered pairs	الأزواج المرتبة (الثنائيات المرتبة)
Symmetric difference	اختلاف متماثل
Function	دالة
Mapping	راسم
Formula	صيغة
Explicit	صريحة
Graph	رسم بيـــاني
Domain	النطاق
Range	مدى
Into	إلى
Image	صورة
Transformation	تحويل
Restrictions	قيود
Extensions	امتدادات
Composition	تركيب
Order	رتبـــة
Injective functions	دوال إدخالية أو دوال حقنية
Inverse functions	دوال عكسية
Branch	فـــرع
Surjective functions	دوال فوقية
Bijective functions	دوال تناظر أحادية
Onto	فوق
Single	وحيـــدة
Finite sets	فئات منتهية أو فئات غير محدودة
Infinite sets	فئات غير منتهية أوفئات غير محدودة
Countable	معدودة أو قابلة للعد أو محسوبة
Well-ordered	جيدة الترتيب (حسنة الترتيب)
Mathematical induction	الاستنتاج الرياضي
Initial segment	القطعة الابتدائية
Denumable (Enumerable)	تنازلية عددية
Countable	معدودة (قابلة للعد)
Rational number	أعداد منطقة أو أعداد قياسية أوأعداد جذرية

Diagonal procedure	الطريقة القطرية
Digit	رقم من صفر إلى ٩
Axion	بدهيــة
Axiom of choice	بدهية الاختيار
George-Cantor	ج . كانتور
One-one	راسم أحادي

الفصل الأول

System	نظام
Algebraic properties	الخواص الجبرية
Order properties	الخواص المرتبة
Completeness property	خاصية الإتمام أو خاصية الإكال
Nested Cells	خلايا متداخلة
Field	حقل
Binary operation	عملية ثنائية
Irrational numbers	أعداد غير قياسية أو أعداد غير جذرية
Strict	مضبوط أو دقيق
Property of trichotomy	خاصية واحد من ثلاثة
Absolute value	القيمة المطلقة
The triangle inequality	متباينة المثلث
Suprema (Supremum)	الأعلى (العلو)
Infima	الأدنى
Lemma	مأخوذة أو مفترض
Projects	الإسقاطات
Hint	إرشاد
Exponential function	دالة أسية
Logarithm	اللوغاريتم
Cuts	القواطع (القص)
Isomorphic	متشاكل
Cells	خــلايا
Intervals	فترات

Open rays	شعاعات مفتوحة
Closed rays	شعاعات مغلقة
Open cell	خلية مفتوحة
Closed cell	خلية مغلقة
Nested	متداخلة – متشابكة – وكرية
Bernoullis inequality	متباينة برنولى
Archimedean Property	خاصية أرشميدس
Dedekind cut	قاطع ديدكانيد
Kronecker	رونكر

الفصل الثانى

Vector space	فراغ المتجه
Normed space	فراغ العمودى
Inner product space	فراغ حاصل الضرب القياسى
Inner product	حاصل الضرب القياسى – حاصل الضرب العددى
Multiple	مضاعف
Tuple	طية – مركبة
P-tuples	من الطيات أو المرتبات
Dot product	حاصل الضرب العددى أو ضرب نقطة
Coordinates	أحداثيات
Components	مركبات
Parallelogram identity	متطابقة متوازى الأضلاع
Orthogonal	عمودى
Perpendicular	عمودى
Convex	محدب
Metric	مترى أو قياسى
Discrete metric	المترية المنفصلة
Entire set	فئة شاملة
Neighborhoods	جيرة – جوار – متاخمة
Interior point	نقطة داخلة
Boundary point	نقطة حدودية

Exterior point	نقطة خارجة
Closure	إقفال
Bolzano-Weierstrass Theorem	نظرية بولزانوفير اشتراوس
Schwarz inequality	متباينة شفارتز
Cauchy - Bunyakovskii - Schwaz inequality	متباينة كوشى – بونيا كوفسكي – شفارتز
Lagranges Identity	متطابقة لاجرانج
Cauchys Inequality	متباينة كوشى
Holders Inequality	متباينة هولدر
Minkowski Inequality	متباينة مينكوسكى
Chebyshev Inequality	متباينة شيشف
Rectangle	مستطيل
Parallelepiped	متوازى السطوح
Cluster points	نقطة الحشد أو المجموع أو التجميع أو التراكم أو نقط المنقود أو السباطة
Point of accumulation	نقط التجميع أو التجمع أو التركيم أو التراكم أو نقط المنقود أو السباطة
Family	عائلة أو فصيلة
Heine-Boral theorem	نظرية هين بورل
Compact	مدمجة – داجة – محكة
Compactness	الإدماج – الإحكام
Covering	غطاء
Eduard Heine	إدوارد هاين
Emile Borel	أميل بوريل
Hermite	هرمت
Lebesque	لبسج
Contour	كونتور
Translation	نقل
Baire Category Theorem	نظرية طبقة بير
Connected Sets	الفئات المتصلة (الموصلة – المرتبطة)
René Louis Baire	رينه لويس بير
Polygonal curve	منحنى مضلع

Complex number system	نظام العدد المركب
Real part	جزء حقيق
Imaginary part	جزء تخيلى
Identity element	عنصر محايد
Carl Friedrich Gauss	كارل فريدرش جاوس
Geodesy	الجيوديسيا (المساحة التطبيقية)
Inversion mapping	الرواسم العكسية
Analytic function	الدوال الهولومورفية

الفصل الثالث

Inductive	حثى أو استقرائى
Convergence	تقارب
Uniqueness	انفرادية – وحدة
Coordinate	متساوى الرتبة (أو الدرجة)
Subsequences	متتابعات جزئية
Combinations of sequences	مجموعات مؤتلفة من المتتابعات
Combination	توافيق
Criteria	معايير أو مقاييس
Monotone	رتابة (وتيرة واحدة) – باطراد
Cauchy Criterion	معيار كوشى
Cauchy Sequences	متتابعات كوشى
Harmonic series	متسلسلة توافقية
Shuffled sequence	متتابعة مختلطة
Vector sum	جمع متجه
Scalar multiple	ضرب عددى
Supremum norm	العمود الأعلى
The limit function	الدالة النهائية
The limit superior	العلو النهائى
Dual	ثنائى ، مثنى
Unbounded Sequences	متتابعات غير محدودة
Infinite limits	نهايات لانهائية

Order of magnitude	رتبة مقدار
Equivalent	مكافئة
Lower order of magnitude	أقل رتبة مقدار
Dominated	سائدة
Cesaro summation	مجموع سيزارو
Oscillatory sequences	متتابعات تذبذبية
Summability	قابلية الجمع
Sequence of arithmetic means	متتابعة المتوسط الحسابي
Counter-examples	أمثلة مضادة
Iterated sequences	المتتابعات المكررة أو المعادة
Double sequences	المتتابعات المزدوجة
Array	نظام – مجموعة مرتبة

الفصل الرابع

Class	صنف (طائفة)
Continuous Functions	دوال متصلة (مستمرة)
The constant function	الدالة الثابتة
The identity function	الدالة المتطابقة (التطابقية)
The squaring function	الدالة التربيعية
Dirichlets discontinuous function	دالة درشلت غير المتصلة
Combinations of functions	محصلة دوال
Composition	تركيب أو إنشاء
Polynomial	دالة كثيرة الحدود
Sine function	دالة الجيب
Additive function	دالة جمعية
Jump of	قفزة – وثبة
Exponential function	دالة أسية
Matrix	مصفوفة
Global properties	الخواص الكروية
Bolzanos intermediate value theorem	نظرية القيمة المتوسطة لبولتزانو

Family	فصيلة — عائلة
Antipodal points	النقط المقابلة من الكرة الأرضية
Equator	خط الاستواء
Lipschitz condition	شرط لبشتز
Contraction	تقلص — انكماش
Rapidity	الإسراع
Oscillation	تذبذب — ذبذبة
Interchange	تبادل
Approximation	تقريب
Step function	دالة الخطوة
Weight factors	معاملات الترجيح
Theory of inference	نظرية الاستدلال
The deleted limit	النهاية المحذوفة
Semi	شبه — نصف
Classical	طائفى — كلاسيكى
Equicontinuity	متساوى الاتصال
Diagonal process	عملية قطرية

الفصل الخامس

Several variables	متغيرات متعددة (عديدة)
Improper integrals	تكاملات معتلة
The mean value theorem	نظرية القيمة المتوسطة
Graph	رسم بيانى — خط بيانى — مخطط بيانى
Relative maximum	نهاية عظمى نسبية
Even function	دالة زوجية
Odd function	دالة فردية
Telescopic sum	حاصل جمع تلسكوبى (مقرابى—متداخل أوصال)
Multiplicity one	تعدد واحد
Multiplicity n	تعدد ن
Sine function	دالة الجيب

Cosine function	دالة جيب التمام
Hyperbolic sine function	دالة جيب الزائدى
Hyperbolic cosine function	دالة جيب التمام الزائدى
Convex	محدبة
Midpoint	نقطة الوسط
Overlapping	تراكيب ، تداخل
Partition	انقسام – تقسيم
Fine	دقيق
Refinement	تكرير
Integrand	تكاملية (المطلوب تكاملها)
Integrator	المكاملة
Bilinearity	خطية ثنائية
Closure	الإقفال أو الإغلاق
Indefinite integral	تكامل غير محدود
Anti-derivative	غير مشتقة
Projects	مشروعات
Parameter	بارامتر – كية متغيرة القيمة
Variable	متغير – يمكن تغييره
Change	تغـــير
Iterated integrals	تكاملات مكررة أو تكاملات مـ دة
Mean-square	متوسط مربع
Transformation	تحويل – تحول
Kind	صنف
Gamma function	دالة جاما
The undulatory theory	النظرية الموجبة
Dominated	سائد – غالب
Iterated	مكرر (معاد)
Beta function	دالة بيتا
Technique	أسلوب فنى
Addition formulas	قوانين الإضافة
Duplication formulas	قوانين المضاعفة
Chain	سلسلة

الفصل السادس

Generating function	دالة مولدة
A symptotic series	متسلسلات متقاربة
Harmonic series	متسلسلات توافقية
Condensation test	إختبار تكثيف
Sharp limiting	نهاية حادة
Alternating series	متسلسلات مترددة (أو متناوبة)
Double series	متسلسلات مزدوجة
Power series	متسلسلات قوى
Uniqueness	إنفراد (وحدة)
Abel summable	أبل القابلة للجمع
Trigonometric polynomial	كثيرة الحدود مثلثية
Kernel	جوهر (قلب)
Orthonormal	عمودى
Weighted means	متوسطات موزونة

الفصل السابع

Affine	دالة مألوفة (دالة خطية مضاف إليها مقدارثابت)
Rank	رتبـــة
Directional derivative	المشتقة الاتجاهية
Argument	إزاحـــة
Gradient	انحـــدار
Implicit functions	دوال ضمنية
Nullity	بطلان
Spen	يجتـــاز
Level plane	مستوى مستو
Critical point	نقطة حرجة
Saddle point	نقطة راكية
Monkey saddle	راكية نطاطة

الفصل الثامن

Diamond-shaped	على شكل منحرف (ماسة)
Common refinement	تكرير عام
Additive function	دالة جمعية أو دالة إضافية
Strong density	كثـافة قوية
Polar coordinates	إحداثيات قطبية
Spherical Coordinates	إحداثيات كروية

فهــرس ابجــدى

(أ)

(ب)

(ت)

(ج)

(م)

(ن)

رقم الايداع ٨٢/٢٤٧٠

ترقيم دولى ١ــ٢٠ــ٧٢٤٤ــ٩٧٧ ISBN



هذا الكتاب هو أحد كتب برنامج WiLEY ARAbooks الذى وضع لتلبية الحاجة الماسة لتوفير كتب دراسية علمية باللغة العربية يتضمن البرنامج ترجمات عربية لبعض الكتب القيمة التى تصدرها دار جون وايلى، بالاضافة الى كتب جيدة مؤلفة أصلا باللغة العربية



JOHN WILEY & SONS, INC.
605 Third Avenue
New York, N.Y. 10158
U.S.A.

Bartle,
THE ELEMENTS OF
REAL ANALYSIS
Second Edition

ISBN 0-471-06391-6